Überblick Analysis

A) Voraussetzung für alle Analysis (und ganz ähnlich auch die Vektorgeometrie):

> ein *Punkt* P(x|y) liegt genau dann auf dem Graphen einer Funktion f, wenn seine *Koordinaten* x und y die Funktionsgleichung erfüllen (also: immer zwischen *einem Punkt* und seinen *beiden Koordinaten* unterscheiden!)

Beispiel: P(3| 9) liegt auf der Parabel zu f: $y = x^2$, weil
x = 3 y = 9 $\Rightarrow$ $9 = 3^2$

B) Ableitung

1. Definition
   - Definition der Tangente als Limes der Sekanten
   - Definition der Tangentensteigung als Limes der Sekantensteigungen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

(*einzige* Ableitungsformel für *alle* ableitbaren Funktionen, egal ob ganzrational oder e-Funktion))

2. Ableitungsregel nur für *Potenz*funktionen
   $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
3. *Allgemeine* Ableitungsregeln
   - Summenregel: Funktionen werden *summandenweise* unter Beibehaltung der *Koeffizienten abgeleitet*
   - Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot k(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot k(x) + g(x) \cdot k'(x)$

   - Kettenregel: $m(x) = f[g(x)] \Rightarrow m'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$
4. Kurvendiskussionen
   a) - Ermittlung der Eigenschaften einer vorgegebenen Funktion
   - Zeichnung aus Ergebnissen der Kurvendiskussion

   α) Nullstellenbestimmung N(x|0), d.h. y = 0
   (quadratische Ergänzung, p/q-Formel, Substitution bei biquadratischen Funktionen, Raten & Polynomendivision)

   ß) Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0|y)$, d.h. x = 0

   γ) Verhalten für $x \to {}^{+}/{-}\ \infty$
   Richtet sich bei ganzrationalen nach dem Summanden mit dem *höchsten Exponenten* und dessen *Vorzeichen*.
   (Richtet sich bei e-Funktionen nach dem Vorzeichen des e-Terms.)

   δ) Symmetrie:
   Ein Funktionsgraph ist achsensymmetrisch zur y-*Achse*, wenn f(+ x) = f (- x)

   > Alle ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich *geraden* Exponenten sind *achsensymmetrisch zur y-Achse.*

   Beispiel: $f(x) = 13x^4 - 7x^2 + 3\ (x^0)$
   Ein Funktionsgraph ist punktsymmetrisch zum *Ursprung* (0|0), wenn f(+ x) = - f(- x)

   > Alle ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich *un*geraden Exponenten sind *punktsymmetrsich zum Ursprung*.

   Beispiel: $f(x) = 123x^3 - 27x^{(1)}$
   Über die Symmetrie ganzrationaler Funktionen mit *sowohl* geraden *als auch* ungeraden Exponenten läßt sich *keine* Aussage machen.
   (Bei e-Funktionen ist keine Symmetrie feststellbar.)

δ) Minimax, Wendepunkte u.a.

A) $f\,'(x) < 0$ auf I $\Rightarrow$ streng monoton fallend auf I(ntervall)

B) $f\,'(x) > 0$ auf I $\Rightarrow$ streng monoton steigend auf I

C) $f\,'(x) \leq 0$ auf I $\Rightarrow$ monoton fallend auf I (evtl. auch gleichbleibend)

D) $f\,'(x) \geq 0$ auf I $\Rightarrow$ monoton steigend auf I (evtl. auch gleichbleibend)

E) $f\,'(x) = 0,\ f\,''(x) < 0$ $\Rightarrow$ Maximum

F) $f\,'(x) = 0,\ f\,''(x) > 0$ $\Rightarrow$ Minimum

G) $f\,''(x) < 0$ auf I $\Rightarrow$ Rechtskurve auf I

H) $f\,''(x) > 0$ auf I $\Rightarrow$ Linkskurve auf I

I) $f\,''(x) = 0,\ f\,'''(x) \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt

J) $f\,'(x) = 0,\ f\,''(x) = 0,\ f\,'''(x) \neq 0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt = Wendepunkt mit waagerechter Tangente

b) "angewandte" Minimaxaufgaben
(geometrische Aufgaben oftmals mittels Pythagoras oder Strahlensatz lösbar)

c) Ermittlung einer Funktion aus ihren Eigenschaften
z.B.: welche verschobene Normalparabel hat ihr Minimum in P(0|2)?

5. die Analysis *nichtrationaler* Funktionen

$f(x) = e^x \Rightarrow$ a) $f\,'(x) = e^x$

b) $F(x) = e^x$

$f(x) = \ln x \Rightarrow$ a) $f\,'(x) = \frac{1}{x}$

b) $F(x) = \ln x$

C. Integration

1. Definition des Integrals als Limes der Flächen von Unterrechtecken

2. f heißt *Rand*funktion, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ *Stamm*funktion zu f

3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
F Stammfunktion von f $\Leftrightarrow F\,'(x) = f(x)$

4. Integration von *Potenz*funktionen
$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \bullet x^{n+1}$

5. Summenregel: Funktionen werden *summandenweise* unter Beibehaltung der *Koeffizienten* integriert

6. $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

7. Unterscheidung Fläche/Integral:
Fläche *immer* positiv, Integral positiv *oder* negativ
Fläche *unter* x-Achse $\Rightarrow$ Fläche = *Betrag* des Integrals
am besten *immer* Beträge der Integrale zwischen Integrationsgrenzen/Nullstellen aufaddieren

8. Fläche zwischen Graphen *zweier* Funktionen f und g
Berechnung für die Differenzfunktion d = f - g

9. Unendlich hohe/breite Flächen, „uneigentliches Integral“

Z.B. $\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int_1^{n} f(x)dx$, und die Berechnung von $\int_1^{n} f(x)dx$ ist ja bereits bekannt (vgl. 6.)
Bedenke: den Limes immer mitschleppen und erst *ganz am Ende* anwenden, wenn *absehbar* ist, wie er sich auswirkt.

Die Ableitung: Definition, Potenzfunktionen

Analysis

Die gesamte Unter- und Mittelstufenmalgebra war "nur" dazu da, ein Fundament für eine umfassendere Betrachtung der *Funktionen* in der Oberstufe zu schaffen. Funktionen sind nunmal das A und O der Algebra. In der Mittelstufe haben wir viel über Funktionen erfahren, was wir jetzt weiterverwenden können (z.B. Definition von Funktionen, Nullstellenberechnung). Jetzt kommen genauere Betrachtungen hinzu (vor allem die *Steigung* [Extrema, Wendepunkte] und *Integrale/Flächeninhalte*). Damit ist es dann endlich möglich, Funktionen hinreichend vollständig zu beschreiben.
Diesen neuen Bereich nennt man "Analysis", weil Funktionen noch genauer *analysiert* werden.

Die Ableitung

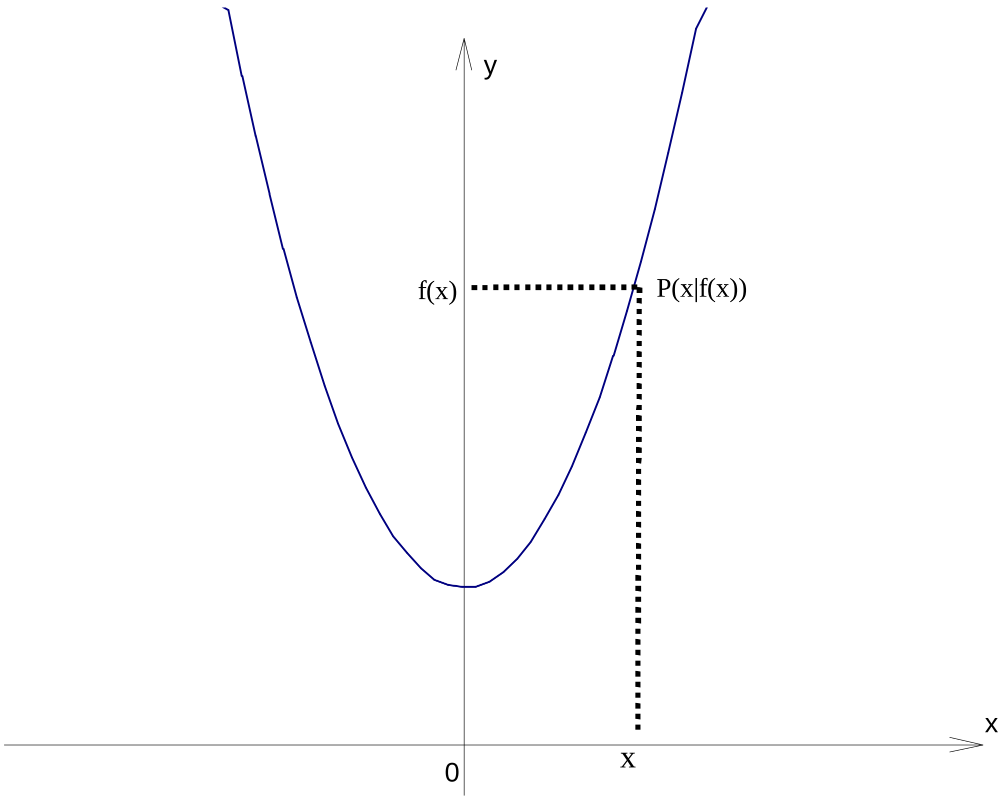
Ein physikalisches Beispiel macht sehr gut das Grundproblem der Ableitungsmathematik klar: der freie Fall von Gegenständen zur Erde verhält sich nach der Formel

$$\underset{\substack{|\\ \text{Weg}}}{s} = \frac{1}{2}\underset{\substack{|\\ \text{Gravita-}\\ \text{tionskon-}\\ \text{stante}}}{g} \bullet \underset{\substack{|\\ \text{Zeit}}}{t^2}$$

d.h. der Weg wächst mit dem *Quadrat* der Zeit (quadratische Funktion), bzw. der fallende Gegenstand wird immer schneller.
Die Fall-Funktion ist also parabelförmig-krumm statt linear.
Damit stellt sich die Frage, welche Geschwindigkeit der Gegenstand zu einem bestimmten *Zeitpunkt* Z hat. Da aber der Gegenstand *beschleunigt*, hat er kurz *vor* Z noch eine *geringere*, kurz *nach* Z bereits eine *höhere* Geschwindigkeit. Wie aber stellt man die Geschwindigkeit in einem *Augenblick* der Zeitausdehnung Null fest? Hier sei nur erwähnt, daß das etwas mit der Steigung einer "krummen" Kurve in einem Punkt zu tun hat (s.u.).

(Das hier vorliegende Problem ist exakt das, für das Newton damals die nun folgende neue Mathematikrichtung entwickelt hat [gleichzeitig zu und unabhängig von Leibnitz]. Wir lernen diese Mathematikrichtung des Ableitens heute allerdings in der systematisierten Form des 19. Jahrhunderts [vgl. Weierstraß] und über den *Limes* statt *infinitesimaler Größen* [Rechnen mit unendlich vielen unendlich kleinen Strecken] kennen. Der Name „Infinitesimalrechung“ hat sich allerdings erhalten.)

Nun ist die Steigung von *linearen* Funktionen/Geraden sehr einfach zu bestimmen: entweder liest man sie an der Zeichnung am Stei-gungsdreieck ab, oder man entnimmt sie direkt als m aus der Funktionsgleichung y = mx+c. Beides ist bei Funktionen mit "krummen" Graphen *nicht* direkt möglich:



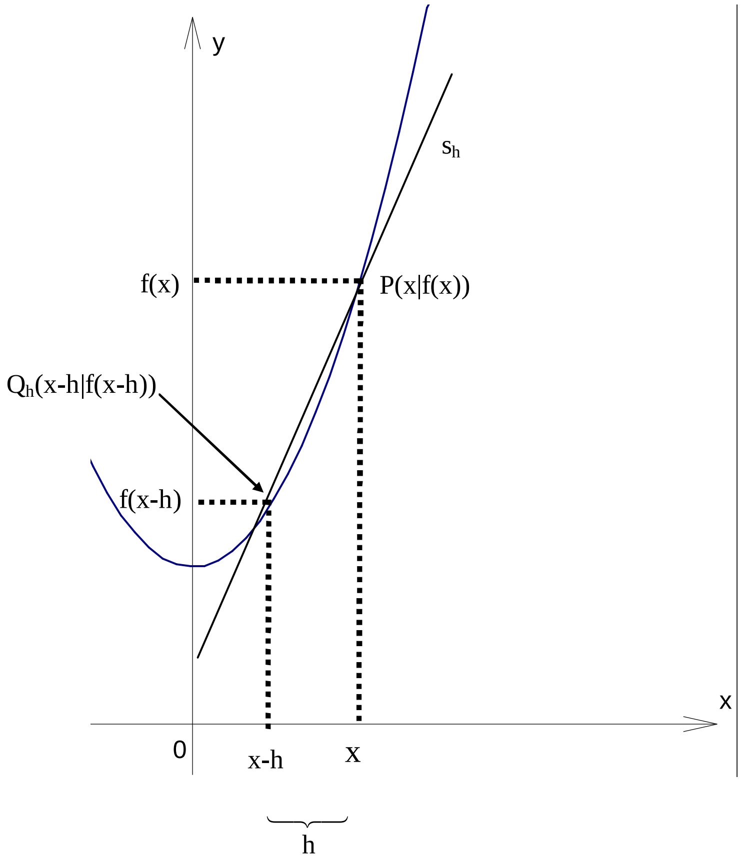
Hier ist sogar erstmal gar nicht klar, was denn überhaupt die Steigung im Punkt P sein soll. Naheliegend ist die Steigung m der *Tangente* t in diesem Punkt. Aber gerade diese Tangente ergibt gleich zwei Probleme:

1. verändert sich die Tangente von Punkt zu Punkt und damit auch die Steigung (die Kurve wird ja immer steiler)
2. können wir die Tangente weder absolut genau zeichnen noch berechnen (wir kennen nur *einen* Punkt und *nicht* ihre genaue Steigung: das reicht weder für die Zweipunkte noch für die Punktsteigungsform [s.o.] der Tangentengerade).

Dennoch war die anschauliche Idee mit der Tangentensteigung nicht ganz unnütz. Wir werden uns halt überlegen müssen, wie wir die Tangente doch noch auf anderem Wege *bekommen* können. Schauen wir dazu nochmal zurück:

1. Steigungen sind problemlos für *Geraden* anzugeben
2. eine Gerade können wir z.B. dann genau angeben, wenn wir *zwei* ihrer Punkte kennen (Zweipunkteform).

Solche Geraden mit *zwei* bekannten Punkten gibt es glücklicherweise: wir nehmen einfach den Punkt P(x|f(x)) aus der obigen Zeichnung und einen weiteren Punkt Q_h(x-h|f(x-h)) auf dem Graph von f. (immer in Abhängigkeit von h, also dem Abstand der x-Koordinaten von P und Q_h). Durch beide Punkte legen wir eine Sekante s_h, d.h. eine Gerade, die den Graph in P und Q_h *schneidet* (lat. secari = schneiden):



Die Steigung m_h dieser Sekante s_h können wir problemlos über das Steigungsdreieck bestimmen:

$$m_h = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{x-(x-h)} = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Läßt man nun h gegen 0, also x-h *gegen* x gehen (ohne daß jemals x-h = x), so geht Q_h gegen P, d.h. die Sekante s_h nähert sich immer mehr der Tangente t an: für $h \to 0$ ist t der "Grenzwert" oder "Limes" von s_h:

$$t = \lim_{h \to 0} s_h$$

(genaugenommen wird die Tangente t erst durch diesen Limes *definiert*, denn wir haben ja gesehen, daß wir sie anders gar nicht erhalten können)
Wo also die Tangente t der Limes der Sekanten s_n ist, ist es naheliegend, die Tangente*steigung* m als Limes der Sekanten*steigungen* m_h zu definieren. Also hat t die Steigung

$$m = \lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Statt von m im Punkte P(x|f(x)) sprechen wir auch kürzer von der Steigung oder "Ableitung" der Funktion in x oder noch kürzer von f'(x). Damit ergibt sich kurz

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \qquad \text{(A)}$$

f '(x) ist nur definiert, wenn sich bei *beliebiger* Annäherung von x-h an x für f '(x) *gleiche* Werte ergeben (für $h > 0$ ist $x- h < x \Rightarrow$ Annäherung von links, für $h < 0$ ist $x-h > x \Rightarrow$ Annäherung von rechts).

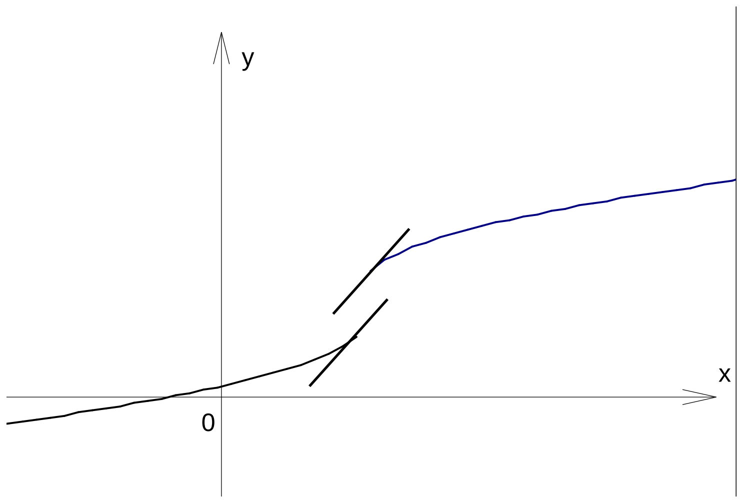
Die *Ableitung* f '(x) einer Funktion f im Punkt P(x|f(x)) ist definiert als die Steigung der *Tangente* in diesem Punkt und die wiederum als *Limes der Steigungen* m_n *der Sekanten* durch P (x|f(x)) und Q_n(x - h; f(x - h))
Daher gilt für *jede ableitbare* Funktion:

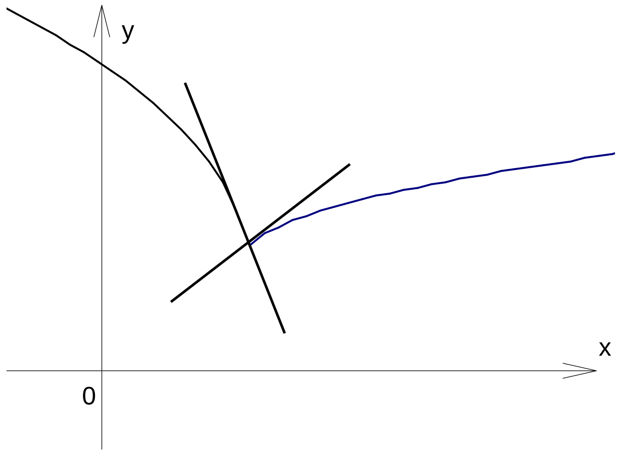
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad (\#)$$

Weil die Formel sich als Quotient von Differenzen ergibt, nennt man sie auch „Differenzenquotient“.
Diese Definition ist die *einzige* Ableitungsformel, die für *alle ableitbaren* Funktionen gilt.
Wichtig: ist f (x) eine *Funktion*, so ist auch f '(x) eine *Funktion*, und zwar die sogenannte "Ableitungsfunktion", die jedem x die *Steigung* f '(x) im Punkte P[x|f(x)] zuordnet.

Die Erstellung der Formel (#) und die weiter unten gezeigten „praktischeren“ Ausführungen (etwa bei ganzrationalen Funktionen) haben enorme mathematisch-technische Auswirkungen gehabt: für jeden Prozeß, der sich als (stetige) Funktion beschreiben läßt, läßt sich mittels der Ableitung jedeauch noch so minimale *punktuelle* Änderung (mittels Tangentensteigungsveränderung) messen, d.h. man ist nicht mehr auf ungenaue *Mittelwerte* und *Annäherungen* angewiesen: man kennt z.B. beim freien Fall nicht mehr nur die *Durchschnitts*geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitintervall, sondern die *exakte* Geschwindigkeit in jedem minimalen Augenblick.

Es gibt allerdings auch Funktionen, die gar *nicht* ableitbar bzw. differenzierbar sind. Und zwar ist das bei Funktionen der Fall, die *Lücken* haben (nicht "stetig" sind) oder *Knicke* (evtl. sind sie dann auf Lücken und knickfreien Teilintervallen ableitbar).
An zwei Beispielen sei gezeigt, daß sich dann keine eindeutige, sondern zwei Tangenten t_1 und t_2 ergeben (und damit im zweiten Fall auch andere Steigungen je nach Annäherung von links oder rechts):





Ableitung von ganzrationalen Funktionen

Am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$ sei nun gezeigt, wie die Ableitung einer konkreten Funktion berechnet wird:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x-h)^2}{h} =$$

$$\underset{\text{Binomi}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x^2 - 2xh + h^2)}{h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{2xh - h^2}{h}}_{B} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x-h)}{h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} (2x-h)}_{C}$$

$= 2x$

Noch einige Kommentare zum typischen Vorgehen:

1. der Limes wird solange *mitgeschleppt* (und gar nicht genauer betrachtet), bis nach gewöhnlicher *Termumformung* eine ganz simple Formel überbleibt (A), auf die der Limes dann sehr einfach anzuwenden ist.
2. Bei *allen* Ableitungsberechnungen von Potenzfunktion der Form $f(x) = x^n$ fällt schon in (B) der Term x^n (hier x^2) weg und erscheint nur die *nächstkleinere* Potenz x^{n-1} (hier $x^{2-1} = x^1 = x$). Daraus folgt schon: die Ableitungsfunktion f ´ ist *immer um einen Grad niedriger* als die Ausgangsfunktion f.
3. Anfangs haben wir den Nenner h, der für $\lim\limits_{h \to 0}$ gegen Null geht. Das hört sich gefährlich an, weil ein Nenner 0 (Teilen durch 0) strikt verboten ist. Nun ist es allerdings nicht ganz so gefährlich: der Nenner *geht gegen* Null, erreicht sie aber *nie*. Und dennoch: im Bruch (B) sehen wir, daß h in *allen* Summanden des Zählers vorkommt, also mittels Distributivgesetz ausgeklammert und dann gegen den Nenner gekürzt werden kann, so daß er dort (C) wegfällt. Die Gefahr, daß im Nenner eine Null steht, ist also spätestens in (C) gebannt. Auch hier sei erwähnt, daß das bei *allen* Potenzfunktionen funktioniert.
   Überhaupt ist hier etwas sehr Merkwürdiges passiert: obwohl in der Formel (#) des Differenzenquotienten Zähler *und* Nenner gegen Null gehen, geht - wie unsere Ableitung von x^2 deutlich macht - der Gesamtbruch *nicht* gegen Null. Das berechnen zu können, war ein Riesenfortschritt in der Mathematik, nach dem Jahrhunderte lang gesucht worden ist, denn der Differenzenquotient an sich war lange vorher bekannt.

Insgesamt ergab unsere obige Rechnung $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$.

Allgemein gilt:

1. für Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ gilt: $f'(x) = nx^{n-1}$ (d.h. der *alte* Exponent kommt einfach als *Koeffizient* davor, der *neue* ist gegenüber dem alten *um 1 verringert*)

   Vorsicht!!!: diese Regel mit den Exponenten gilt *nicht* für Exponentialfunktionen (s.u.)

2. Ist a eine Konstante und $f(x) = a$, so gilt $f'(x) = 0$

   (*alleinstehende* Konstanten *verschwinden* also in der Ableitung bzw. konstante Funktionen der Form $f(x) = a$ steigen ja nicht, haben also die Steigung 0)

3. $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

   (Konstanten vor x^n werden in der Ableitung also einfach übernommen/bleiben unverändert erhalten)

4. Ist f eine ganzrationale Funktion der Form

   $$f(x) = x^n + \ldots + x^m,$$

   so ist die *Ableitung der Summe* gleich der *Summe der Ableitungen*: $f'(x) = nx^{n-1} + \ldots + mx^{m-1}$

Ein Beispiel für 1. - 4.: $f(x) = 3x^7 - 5x^3$

$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 7x^6 - 5 \cdot 3x^2$

Anwendungsbeispiel Tangenten

1. Tangenten sind Geraden und haben somit die Form $t(x) = mx + c$, wobei m die Steigung und c der y-Achsenabschnitt ist
2. Die Steigung m der Tangente des Funktionsgraphen von f im Punkt $P(x_1|y_1)$ ist gleich
   - der Steigung von f in P bzw.
   - der Ableitung für x_1, also $m = f'(x_1)$

1. Beispiel:

Gegeben: die Funktion f: $x^2 - x$. Gesucht: die Gleichung der Tangente in P(4|?).
Als erstes berechnen wir die y-Koordinate von P. Da P *auf* dem Graph von f liegen soll, muß y der *Funktionswert* von 4 sein, also $y = f(4) = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow P(4|12)$.
Um in $t(x) = mx + c$ das m und c zu finden, benutzen wir die vorhandenen Informationen:
1. da t die Tangente in P ist, stimmt ihre Steigung mit der Steigung von f dort überein. Also $m = f'(4)$

$f'(x) = 2x - 1$

$\Rightarrow m = f'(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$\Rightarrow t(x) = 7x + c$

2. t ist Tangente in P $\Rightarrow$ P liegt *auf* t $\Rightarrow$ P muß die Geradengleichung von t erfüllen

$\Rightarrow 12 = 7 \cdot 4 + c \Leftrightarrow 12 = 28 + c \Leftrightarrow c = 12 - 28 = -16$

$\Rightarrow t(x) = 7x - 16$ ist die gesuchte Tangente.

Merke schon:

1. die y_1-Koordinate von P(x|y) berechnet man, indem man das konkrete x_1 in die Ausgangsfunktion f einsetzt;
2. die Steigung in P(x|y) berechnet man, indem man das konkrete x_1 in die Ableitungsfunktion f ´ einsetzt;

3 die Steigung in einem *speziellen* Punkt P(x|y) wird immer so berechnet, daß man
- erst *allgemein* f ´ berechnet
- und dann dort erst die spezielle x_1-Koordinate einsetzt (nebenbei: die y_1-Koordinate braucht man dann gar nicht).

Begründung für 3.: setze ich *erst* x = 4 in die Ausgangsfunktion f: $y = x^2 - x$ ein, so ergibt sich y =16, also eine *Konstante*. Die Ableitung einer Konstanten ist aber *immer* Null, jede Ableitung also ohne Aussagewert.

2. Beispiel:

Gegeben: - ein Punkt P(3|9) auf dem Graph einer noch unbekannten Funktion f
- die Tangente t in P geht auch durch Q(4|10)
[Vorsicht: t, nicht aber unbedingt f geht durch Q].

Gesucht: - die Tangentengleichung (*)
- die Steigung von f in P, also eine bisher noch unbekannte Eigenschaft der Funktion f. (#)

Um in t(x) = mx + c das m und c zu finden, benutzen wir die vorhandenen Informationen:
1. P liegt auf t, also müssen die *Koordinaten* von P die Gleichung von t erfüllen
$\Leftrightarrow$ $9 = m \cdot 3 + c$ (A)
2. Gleiches gilt für Q
$\Rightarrow$ $10 = m \cdot 4 + c$ (B)

Mit (A) und (B) haben wir ein Gleichungs*system* aus *zwei* Gleichungen mit *zwei* Unbekannten. Das können wir lösen. Es ergeben sich m = 1 und c = 6. Die Tangentengleichung lautet also $t(x) = 1 \cdot x + 6$ (* gelöst)
Nun ist t Tangente im Punkt P der Funktion f, d.h. die dortige Steigung f '(3) ist gleich der Steigung m der Tangente, also f '(3) = 1 (# gelöst)

Vorverweis auf die Integration:

Ein beliebter Aufgabentypus ist es, die *Fläche* zwischen dem Graphen einer *Funktion* f und der *Tangente* t in einem seiner Punkte $P(x_1|y_1)$ bestimmen zu lassen.
Das geht nur, wenn diese Tangente t den Graphen von f *nochmal* in einem Punkt $Q(x_2|y_2)$ schneidet (zwischen P und Q wird dann integriert). Als Schnittpunkt von f und t muß Q auf dem Graphen von f *und* dem von t liegen, muß also gelten: $f(x_2) = y_2 = t(x_2)$ oder kurz $f(x_2) = t(x_2)$ bzw. ohne Indizes f(x) = t(x).
Sollte bei dieser Gleichsetzung z.B. eine Gleichung 3. Grades rauskommen, so braucht man, um sie überhaupt lösen zu können, mindestens ein bereits bekanntes x, das f(x) = t(x) erfüllt. Solch ein x ist aber x_1 von P, denn P lag ja auch schon auf den Graphen von f *und* t. Mittels Polynomendivision kann man dann weitere x_2 finden, für die $f(x_2) = t(x_2)$.

Die Ableitung: Kurvendiskussion

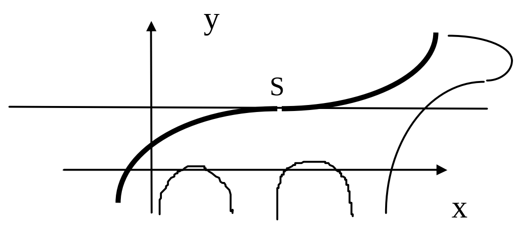
Nun aber zu der Frage, was man davon hat, wenn man die Steigung bzw. Ableitung einer Funktion bestimmen kann:

1. in einem Maximum oder Minimum ist die Tangente *waagerecht*, d.h. ihre Steigung 0. Also muß gelten:
   $f\,'(x) = 0$
2. eine Funktion *steigt* (*fällt*) auf einem Intervall I, wenn
   a) für *wachsende* x auch y *wächst* (für *wachsende* x   y *fällt*)
   b) die Tangente dort eine *positive* (negative) Steigung hat, wenn also $f\,'(x) > 0$
   ($f\,'(x) < 0$) für alle $x \in I$
3. auf einem Intervall I liegt eine *Rechts*kurve (*Links*kurve) vor, wenn dort für *wachsende* x die *Steigung* $f\,'(x)$
   immer mehr *abnimmt* (*zunimmt*),
   wenn also auf I die *Steigung* $f\,'(x)$ *fällt* (*steigt*),
   wenn also $f\,''(x) < 0$ ($f\,''(x) > 0$) für alle $x \in I$
   (Man bedenke dabei: nicht nur die *Ausgangs*funktion f(x), sondern auch ihre *Ableitungs*funktion f'(x) kann steigen/fallen: die "Steigung der Steigung[sfunktion]" bestimmt man aber mit $f\,''(x)$)
4. Ein *Maximum* (*Minimum*) liegt in einer *Rechts*kurve (*Links*kurve).
   Damit folgt aus 3.: für ein Maximum (Minimum) gilt zusätzlich zu 1.: $f\,''(x) < 0$ ($f\,''(x) > 0$)
   (also Max. $\Rightarrow$ "<" , Min $\Rightarrow$ ">" [Fehlermöglichkeit: bei Max. würde man ">" erwarten, bei Min. "<"])
5. In einem *Wendepunkt* geht eine Rechts- in eine Linkskurve (oder eine Links- in eine Rechtskurve) über. D.h. aber doch, daß *bis* dahin die Steigung $f\,'(x)$ zu- und *danach* abnimmt (oder bis dahin ab und danach zu): also muß im Wendepunkt ein *Maximum* (Minimum) der 1. Ableitung $f\,'(x)$ vorliegen:
   also muß gelten: $f\,''(x) = 0$ und $f\,'''(x) < O$ (oder $f\,'''(x) > 0$)
   oder insgesamt: $f\,''(x) = 0$ und $f\,'''(x) \neq 0$

(Man beachte einen grundsätzlichen Unterschied: in 1., 4. und 5. liegen *punktuelle* Eigenschaften vor, in 2. und 3. *Intervall*eigenschaften; wobei natürlich z.B. das Maximum [1.] indirekt auch eine Intervalleigenschaft ist: der höchste *Punkt* auf einem *Intervall*.)

Kurzfassung zur Kurvendiskussion:

A) $f\,'(x) < 0$ auf I ⇒ streng monoton fallend auf I
B) $f\,'(x) > 0$ auf I ⇒ streng monoton steigend auf I
C) $f\,'(x) \leq 0$ auf I ⇒ monoton fallend auf I (evtl. auch gleichbleibend)
D) $f\,'(x) \geq 0$ auf I ⇒ monoton steigend auf I (evtl. auch gleichbleibend)
E) $f\,'(x) = 0$, $f\,''(x) < 0$ ⇒ Maximum
F) $f\,'(x) = 0$, $f\,''(x) > 0$ ⇒ Minimum
G) $f\,''(x) < 0$ auf I ⇒ Rechtskurve auf I
H) $f\,''(x) > 0$ auf I ⇒ Linkskurve auf I
I) $f\,''(x) = 0$, $f\,'''(x) \neq 0$ ⇒ Wendepunkt
J) $f\,'(x) = 0$, $f\,''(x) = 0$, $f\,'''(x) \neq 0$ ⇒ Sattelpunkt = Wendepunkt mit waagerechter Tangente



Allerdings gelten A) - J) nur in genau der angegebenen Richtung „⇒„ , aber *nicht* unbedingt *umgekehrt* („⇐„). Man sagt auch: die jeweils linken Bedingungen sind „hinreichend“, d.h.: *wenn* sie gelten, reicht das hin/aus, um die rechte Bedingung zu folgern. Aber die Bedingungen sind nicht „notwendig“, d.h.: wenn die linke Bedingung *nicht* gilt, kann *dennoch* die rechte gelten.

Ist also z.B. $f\,'(x) = 0$ und $f\,''(x) < 0$, so liegt garantiert ein Maximum vor. Ist aber *nicht* $f\,'(x) = 0$ und $f\,''(x) < 0$, so kann *dennoch* ein Maximum vorliegen (wir können es nur nicht mit diesem neuen Verfahren herausbekommen).

Ein Beispiel:. $f(x) = x^4$ (Parabelform) hat sicherlich in $x = 0$ ein Minimum, *obwohl* wir erhalten: $f\,'(x) = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f\,''(x) = 12x^2 \Rightarrow f\,''(0) = 0$, *obwohl* also in $x = 0$ *nicht* $f\,''(x)$ *größer* 0 gilt.

In solchen Fällen ist der Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung zu betrachten:

1. $f\,'(x) = 4x^3 < 0$ für $x < 0 \Rightarrow$ für $x < 0$ ist $f(x) = x^4$ *fallend*;
2. $f\,'(x) = 4x^3 > 0$ für $x > 0 \Rightarrow$ für $x > 0$ ist $f(x) = x^4$ *steigend*;

1./2. ⇒ für $x = 0$ muß ein *Minimum* vorliegen.

Zur sogenannten "Kurvendiskussion" gehört die Bestimmung
1. der Nullstellen (Schnittpunkte mit der xAchse): $y = 0$ (evtl. *mehrere* Nullstellen)
2. des Schnittpunkts S_y mit der yAchse: $x = 0$ (höchstens *ein* S_y)
3. der Maxima und Minima
4. der Intervalle, auf denen die Funktion steigt/fällt
5. der Intervalle, auf denen eine Rechts/Linkskurve vorliegt
6. der Wendepunkte

Um einem gängigen Fehler vorzubeugen, sei die Minimumbestimmung am einfachen Beispiel $f(x) = x^2$ vorgeführt:

$f\,'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dieses Ergebnis x = 0 wird nun keineswegs *sofort* in die erste Ableitung eingesetzt, um dann nochmals zur 2. Ableitung hin abzuleiten, sondern erst wird die *allgemeine* Form f '(x) = 2x nochmal zu f"(x) = 2 abgeleitet, und erst *dann* wird x = 0, also die Nullstelle der 1. Ableitung, in die 2. Ableitung eingesetzt:
f "(0) = 2 > 0 ⇒ Minimum.
Hätten wir *erst* x = 0 in f '(x) eingesetzt, so hätten wir natürlich f '(0) = 0 erhalten, denn x = 0 ist ja gerade die Nullstelle der 1. Ableitung. Leitet man dann f '(0) = 0 nochmals ab, so erhält man natürlich als Ableitung der Konstanten 0 auch f "(0) = 0, woraus man *nicht* die Minimumseigenschaft hätte ablesen können.

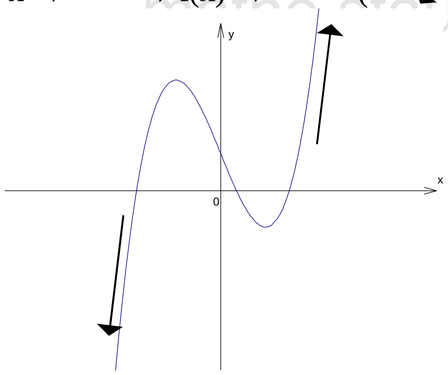
Merke also nochmals: immer *erst* allgemein ableiten, *dann* konkrete Werte einsetzen; nie umgekehrt!

Am Kurven werden üblicherweise noch zwei andere Dinge diskutiert:

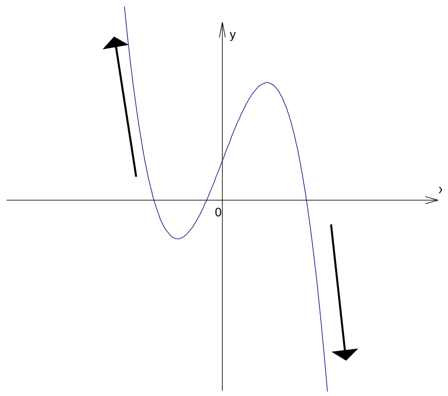
Das Verhalten für x → +/- ∞
richtet sich bei ganzrationalen nach dem Summanden mit dem *höchsten Exponenten* und dessen *Vorzeichen*.

Beispiel: f (x) = $t \bullet x^3 - 27x^2 + 1$
Das Verhalten für große x richtet sich allein nach dem Teilterm $t \bullet x^3$. Der Graph sieht also im Prinzip s-förmig aus, und zwar gilt

für t > 0 x → + ∞ ⇒ f(x) → + ∞ (↗)
x → - ∞ ⇒ f(x) → - ∞ (↙)



t < 0 x → + ∞ ⇒ f(x) → - ∞ (↘)
x → - ∞ ⇒ f(x) → + ∞ (↖)



Symmetrie:
Ein Funktionsgraph ist achsensymmetrisch zur y-*Achse*, wenn f(+ x) = f (- x)

Alle ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich *geraden* Exponenten sind *achsensymmetrisch zur y-Achse*.

Beispiel: $f(x) = 13x^4 - 7x^2 + 3\ (x^0)$

Ein Funktionsgraph ist punktsymmetrisch zum *Ursprung* (0|0), wenn $f(+x) = -f(-x)$

Alle ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich *un*geraden Exponenten sind *punktsymmetrsich zum Ursprung*.

Beispiel: $f(x) = 123x^3 - 27x^{(1)}$

Über die Symmetrie ganzrationaler Funktionen mit *sowohl* geraden *als auch* ungeraden Exponenten läßt sich *keine* Aussage machen.

Wenn man Symmetrie feststellt, so erleichtert das nicht nur das *Zeichnen*, sondern kann es auch viele *Rechnungen* überflüssig machen.
Hat z.B. eine *zur y-Achse symmetrische* Funktion in P (1|3) ein *Maximum*, so hat sie auch in Q(-1|3) ein *Maximum*
Oder hat eine *zum Ursprung symmetrische* Funktion in P(1|3) ein *Maximum*, so hat sie auch in Q(-1|-3) ein *Minimum*.
Ebenso werden Wendepunkte gespiegelt.

Zwecke der Kurvendiskussion

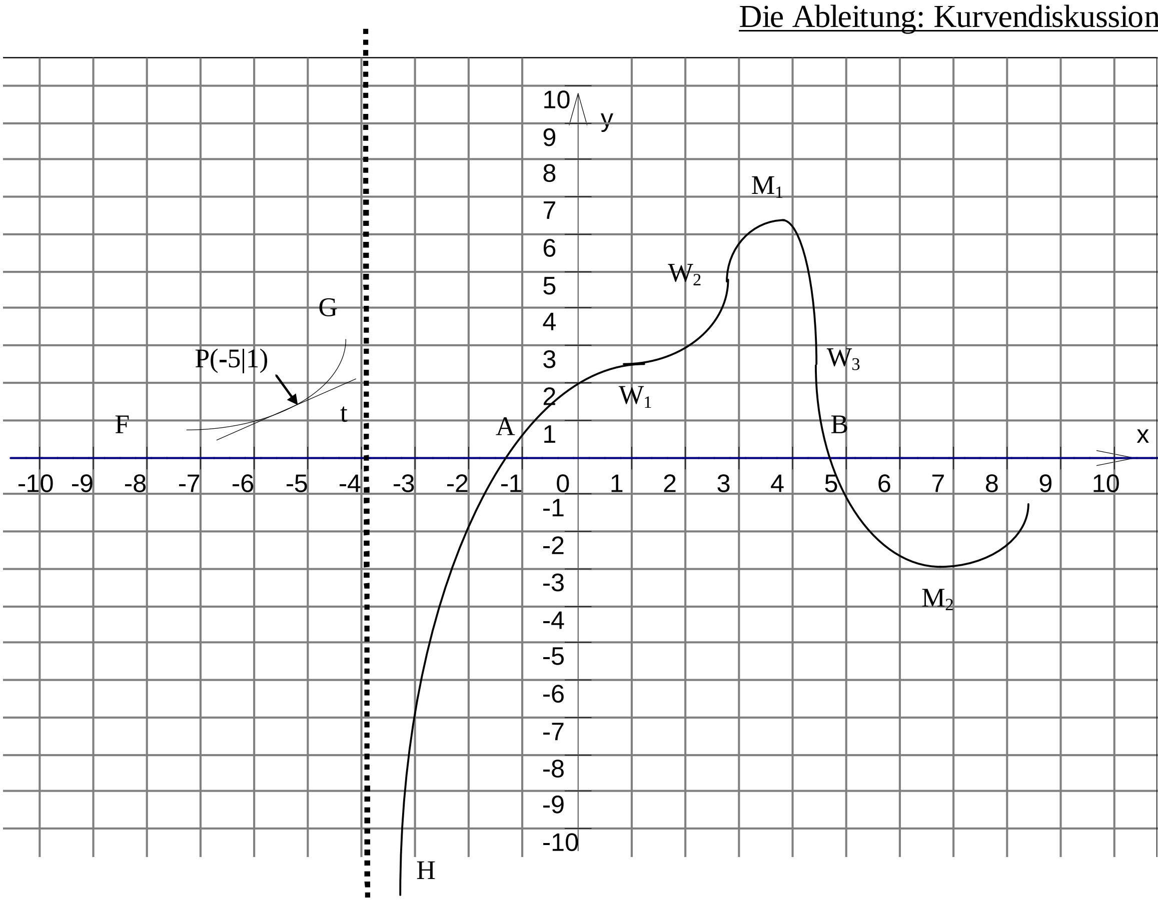
1. Zweck: *angewandte "Extremwertaufgaben"*
(z.B.: welche kubische 1-Liter-Milchpackung hat minimale[n] Oberfläche = Verpackungsmaterialverbrauch?)

2. Zweck: Zeichnung informativer *Graphen*

Ein weiterer Zweck von Kurvendiskussionen ist häufig das Anlegen von Zeichnungen: man erhält einen Überblick über die wichtigsten *Punkte* und das Verhalten *zwischen* ihnen. Genauer: zwischen ihnen ereignet sich nichts "Weltbewegendes" mehr (da wir weitgehend stetige Funktionen behandeln, also solche ohne Sprung).
Angenommen also, wir erhalten für eine Funktion f rechnerisch folgendes:

a) Nullstellen (y = 0) für A) x = -1 und
B) x = 5,
b) Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0) bei y = 1,5
c) Maximum in $M_1(4|5)$
d) Minimum in $M_2(7|-3)$
e) Wendepunkte in C) $W_1(0{,}5|2)$,
D) $W_2(3|4)$,
E) $W_3(4{,}5|2)$
f) Tangente $t(x) = (\frac{1}{2})x + 4{,}5$ in P(-5|1), d.h. dort Steigung $\frac{1}{2}$
g) F) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
G) $\lim\limits_{x \uparrow -4} f(x) = +\infty$
H) $\lim\limits_{x \downarrow -4} f(x) = -\infty$,

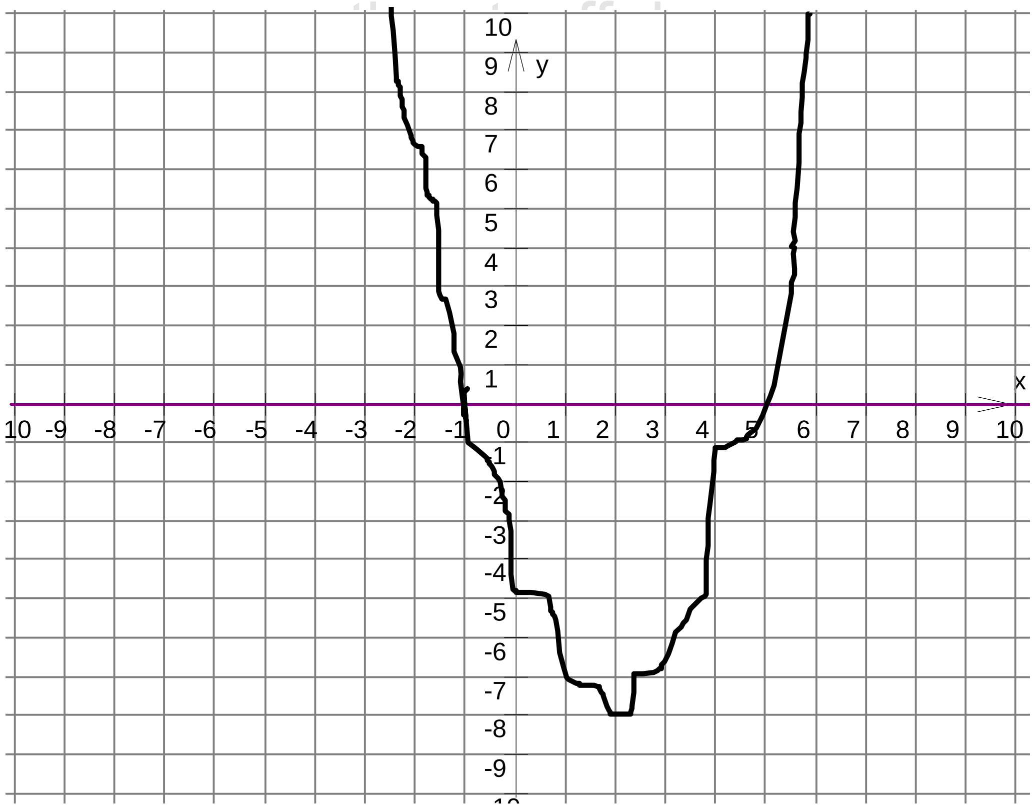
so ergeben sich daraus folgende Grundelemente einer Zeichnung (durchgezogen, mit Buchstaben versehen) und damit durch bloßes stetiges Verbinden die (gestrichelte) Zeichnung:



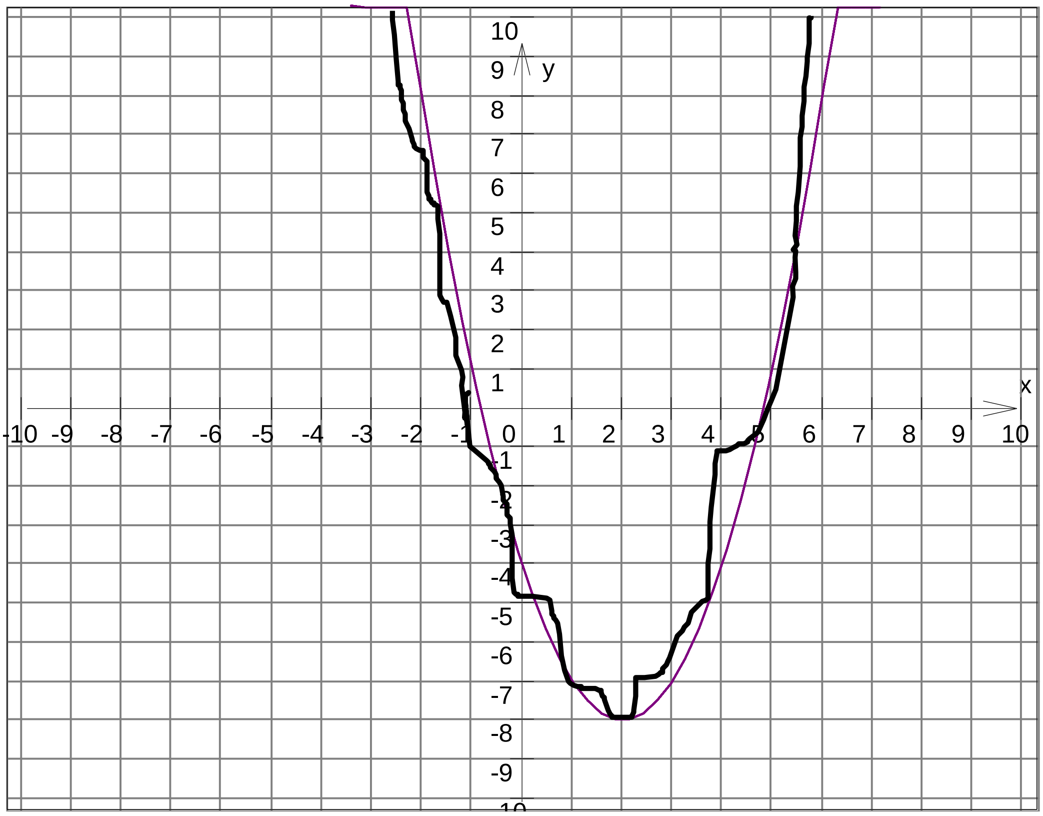
y
x
M1
W2
W3
W1
M2
G
P(-5|1)
t
F
A
B
H

Die Ableitung: Ermittlung einer Funktion aus ihren Eigenschaften

Bisher hatten wir immer aus einer *gegebenen* Funktion mittels Kurvendiskussion *nachträglich* ihre *Eigenschaften* ermittelt. Diesmal gehen wir umgekehrt vor: wir wissen nur einige *Eigenschaften* und wollen erst ermitteln, für welche *Funktion* sie gelten.
Diese Überlegung ist nicht nur Anlaß, die Kurvendiskussion - nur umgekehrt - zu wiederholen, sondern das Problem stellt sich auch oft bei Anwendungen: die Graphen physikalischer Vorgänge verhalten sich keineswegs hübsch einfach mathematisch nach einer Funktionsgleichung, sondern nur so *ungefähr* (z.b. stimmt Einsteins berühmte Formel $E = mc^2$ auch nicht so hübsch exakt quadratisch, sondern ist „nur“ eine Näherung). Um solche Anwendungsgraphen und damit auch die Anwendungen selbst nun überhaupt mathematisch-systematisch behandeln zu können (sie genauer analysieren und Voraussagen machen zu können), versucht man nun, zentrale Eigenschaften des Graphen zu erfassen und durch einen nicht *ganz*, aber doch in wichtigen *Details* passenden mathematischen *Funktionsgraphen* anzunähern. Dafür gibt es komplizierte Verfahren, die hier nicht genauer erläutert werden sollen. (Kleiner philosophischer Nachschlag: vielleicht *funktioniert* die Natur also gar nicht mathematisch, sondern wird nur mit allen menschlichen Tricks mathematisch *angenähert*.)
Ein Anwendungsbeispiel sei aber doch genannt: Musik-Synthesizer, also Computer, die Mathematik und sonst rein gar nichts beherrschen, können dennoch *jeden* beliebigen Naturton imitieren, indem sie seine Frequenz als Summe *exakter* (verschieden frequenter und verschieden amplitudiger) Sinusfunktionen darstellen (Fourier-Analyse).
Ein einfaches Beispiel für die mathematische Annäherung eines physikalischen Vorgangs. Angenommen, die graphische Darstellung eines natürlichen Vorgangs sieht folgendermaßen aus:



Das sieht ziemlich parabelförmig aus, und deshalb liegt es nahe, eine exakte Parabel zu suchen, die in markanten Eigenschaften mit dem unregelmäßigen Graph übereinstimmt, nämlich dieselben *Nullstellen* hat (für $x \approx -1$ und $x \approx 5$) und denselben *Tiefpunkt* T(2|-7). Eine (ohne Begründung) gute Näherung wäre etwa der Graph von f: $y = x^2 - 4x - 4$:



Damit aber zu einem „mathematischeren“ Beispiel, bei dem nur noch gewisse mathematische Eigenschaften vorgegeben sind (wie so oft wird *außer*mathematische Anwendung dann doch wieder nur *inner*mathematisch geübt, weil die reine Mathematik um so viel *einfacher* ist):

Der Graph einer Funktion f hat für x = 0 und x = 3 seine einzigen Nullstellen und im Wendepunkt W(2|f(2)) die Wendetangente t: $t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$. Welche *ganzrationale Funktion dritten Grades* erfüllt diese Eigenschaften?

Beginnen wir mit einer *Systematisierung* (denn ohne Systematik findet man sich in dem - notwendigen - Wust an Informationen eh nicht zurecht):

Für welche Funktion gilt?:
a) sie ist ganzrational und
b) dritten Grades, und ihr Graph hat
c) bei A) x = 0 und
B) x = 3
seine einzigen Nullstellen und im
d) Wendepunkt W(2|f(2)) die
e) Wendetangente t: $t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$.

Zuerst *mathematisieren* wir all diese Angaben:
zu a) und b): $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wobei a, b, c und d Formvariable sind

zu c): A) $f(0) = 0$

$\Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 0$

$\Rightarrow f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$ (A)

B) $f(3) = 0$

$\Leftrightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 = 0$

$\Leftrightarrow 27a + 9b + 3c = 0$ (B), eine Information, die wir vorerst nicht weiterverwenden können (aber fleißig sammeln!)

zu d): $f''(2) = 0$

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$ (A)

$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (D)

$\Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$

$\Rightarrow 6a \cdot 2 + 2b = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0$ (E), wieder eine Information, die wir vorerst nicht weiterverwenden können

zu e): für x = 2 liegt die Tangente t: $t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$.vor, dort hat die Funktion also die Steigung $-\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow f'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -\frac{1}{2}$ (D)

$\Rightarrow 12a + 4b + c = -\frac{1}{2}$ (F), wieder eine Information, die wir vorerst nicht weiterverwenden können.

Schauen wir uns nun aber mal die „Abfall"-Gleichungen (B), (E) und (F) an: zusammen sind das 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Das könnte als Gleichungs*system* lösbar sein:

$$\left\langle \begin{array}{ll} 27a + 9b + 3c = 0 & \text{(B)} \\ 12a + 2b = 0 & \text{(E)} \\ 12a + 4b + c = -\frac{1}{2} & \text{(F)} \end{array} \right.$$

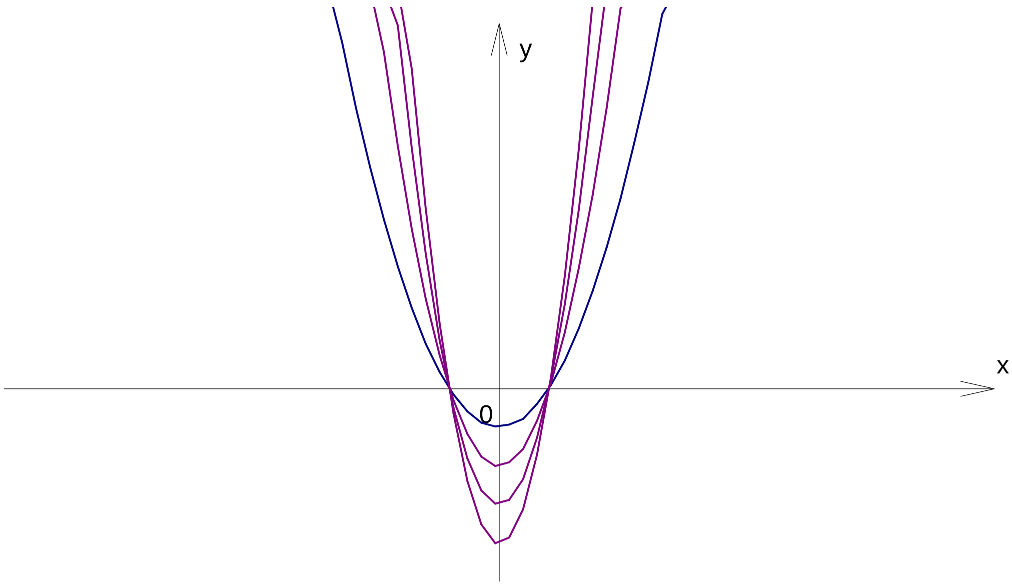
Das läßt sich auflösen zu $a = \frac{1}{6}$, $b = -1$, $c = \frac{3}{2}$, und somit ist die gesuchte Funktion

$$f: f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x.$$

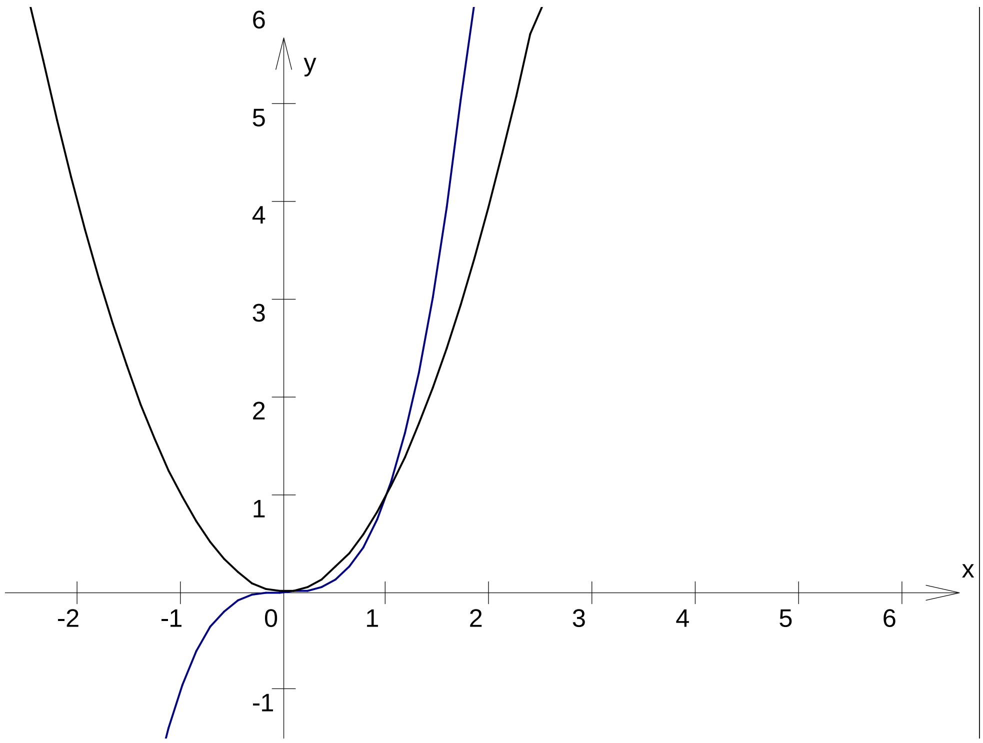
Man beachte: wir haben nur aus bekannten *Eigenschaften* die ursprüngliche (vorher nicht bekannte oder verloren gegangene) *Ausgangsfunktion* rekonstruiert.

Des weiteren wird deutlich: manchmal braucht man eine ganze Menge exakter Vorgaben (s.o. a - e), um daraus (mittels Gleichungssystemen) eine *eindeutig* bestimmte Funktionsgleichung gewinnen zu können.

Beispielsweise reicht es nicht, nur die *Nullstellen* einer Parabel vorzugeben, weil durch diese Nullstellen *unendlich viele* gestauchte oder gestreckte Parabeln gehen:



Des weiteren sei darauf hingewiesen, daß nicht *jede* Informationskombination zum Ziel führt. Die Zeichnung macht z.B. klar, daß die Informationen a) Nullstellen für x = 1 und -1 sowie b) Tiefpunkt für x = 0 nicht reichen, um eine eindeutige Parabel zu ergeben (*rechnerisch* zeigt sich solch eine Uneindeutigkeit durch allgemeinlösbare Gleichungssysteme mit z.B. der Zeile 0 = 0). Hinreichend, um exakt *eine* Parabel herauszufinden, wäre hingegen: die Parabel hat a) Nullstellen für x = 1 und -1 und geht b) durch den Punkt T(0|-3) (vgl. tiefste Parabel).
Eine andere Methode, diese Annäherung *komplizierter* durch *einfache* Graphen zu üben, ist es, komplizierte *mathematische* Funktionen durch einfache *mathematische* Funktionen anzunähern. Ohne nähere Erklärung sei z.B. darauf hingewiesen, daß die (einfache) *quadratische* Funktion f: $y = x^2$ die (schwierigere) *kubische* Funktion g: $y = x^3$ für $0 \leq x \leq 1$ (also zwischen den Schnittpunkten der Funktionen) erstaunlich gut annähert, ja, die Graphen fast identisch erscheinen:



Ableitung: Musterextremwertaufgaben

Bei allen vier Aufgaben geht´s im Grunde immer um dasselbe: *Rechenverfahren* und eine *Systematik* zu lernen, die bei Extremwertaufgaben *regelmäßig* auftauchen.
Zu den *Rechenverfahren*: sobald eine Aufgabe geometrisch aussieht, taucht doch fast garantiert der Strahlensatz oder Pythagoras auf, und zwar auch dann - sehr wichtig! -, wenn er *nicht* in der Aufgabenformulierung genannt wird.
Zur *Systematik*: insbesondere mit der 4. Aufgabe wird ein Beispiel vorgeführt, das derart viele (Neben-)Rechnungen erfordert, daß man aufgeschmissen ist, wenn man sich nicht *vorher* ein *schrittweises* Verfahren plant (es auch *aufschreibt*) und jederzeit weiß, wo man sich grade befindet: was man bereits erledigt *hat* (Zwischenantworten!) und noch zu erledigen *bleibt*. Nur wer nach einem *System* vorgeht, hat auch in der hintersten Ecke einer Nebenrechnung noch einen Überblick, was das *Gesamtziel* bleibt.

Extremwertaufgaben dienen dazu, markante Eigenschaften von Funktionen zu betimmen: mittels waagerechter Tangenten, die durch Standardableitungsregeln bestimmt werden, kann man Minima oder Maxima von Funktionen herausfinden.
Was bis hierhin noch rein geometrisch-innermathematisch aussieht, hat aber enorme Folgen für die Anwendbarkeit auf „Alltagsprobleme“, wenn diese sich durch Funktionen beschreiben lassen.
Beispiele solcher „Alltagsprobleme“ sind alle sich zeitlich entwickelnden *Prozesse*, die sich durch Funktionen beschreiben lassen (z.B. das Maximum der Firmengewinne), sowie Vorgänge, bei denen zwei Eigenschaften direkt voneinander *abhängig* sind (wenn sich also die zweite Eigenschaft y als *Funktion* der ersten Eigenschaft x darstellen läßt; wir werden das unten andauernd wiedersehen, wenn zwei Werte direkt voneinander abhängen).
Bei solchen „Alltagsproblemen“ insbesondere in Technik und Physik hat die Extremwertbestimung zu enormen Erfolgen geführt.

Nun sind „Anschaulichkeit“, „Anwendbarkeit“ und „Alltagsproblem“ natürlich Gummibegriffe: es gibt genügend Menschen, die ihr gesamtes Leben nie mit Mathematik in Berührung kommen - und die auch etwa die mathematischen Hintergründe der Technik nicht im mindesten interessieren. Daraus folgt: wenn man - wie Schüler oft fordern - echte, „lebensnahe“ Matheaufgaben für wahrhaft *jedermann* durchnehmen wollte, so bliebe außer dem Aufaddieren von Preisen im Laden rein gar nichts mehr über (so ähnlich wie mit Literatur: wollte man absolut allgemeinverständliche Literatur durchnehmen, so müßte man schon allein vom Sprachniveau her die „Bild“-Zeitung noch *unter*schreiten - und das würde wiederum die Gebildeteren langweilen).
Hinter dem Ruf nach „Anwendbarkeit“ steckt zudem inzwischen ein kulturelles Problem: wir *nutzen* immer mehr Technik - und *verstehen* sie immer weniger: „ist uns doch schnuppe, wie ein Staubsauger funktioniert“. Und wie wir noch ganz am Ende dieses Aufsatzes sehen werden: vieles - außer eben dem ganz Banalen, sofort Verständlichen - *ist* nunmal nicht (problemlos) anschaulich - und existiert doch.
Zudem sollten Schüler fast froh sein, daß die meisten Aufgaben abstrakte Mathematik sind. Denn sie sind schon auf den rein mathematischen Anteil zurechtdestilliert. *Echte* Anwendungsaufgaben hingegen sind oftmals derart schwierig zu mathematisieren und fordern soviel außermathematisches Zusatzwissen, daß selbst ausgebildete Mathematiker da größte Schwierigkeiten haben.
Die Schulaufgaben sind also meistens *glücklicherweise* nur *scheinbare* Anwendungsaufgaben: sie sind so konstruiert, daß die reine Mathematik einem relativ leicht ins Auge fällt - und dementsprechend wirkt dann die Anwendung oftmals auch nur aufgesetzt.

Zwei Beispiele (vgl. Aufgaben unten): die 1. Aufgabe ist fast rein geometrisch, und es kann einem doch schnuppe sein, ob es sich um *Milchtüten* oder *Schuhkartons* handelt, Hauptsache, es liegen (geometrischer Fachbegriff:) *Quader* vor. Und doch werden wir sehen, daß diese rein *geometrische* Überlegung sogar *ökologisch* bedeutsam ist. Oder zur 3. Aufgabe: da hat man auf alle anschauliche Verpackung verzichtet, die aber doch problemlos hinzuzufügen wäre: statt „lege ein Rechteck in ein Dreieck" hieße es dann „ein Glaser will aus einer dreieckigen Restscheibe ein rechteckiges Stück ausschneiden".

1. Aufgabe

Wie muß eine 1-Liter-Milchpackung konstruiert sein, damit für ihre Herstellung ein *Minimum* an Pappe nötig ist (Papierersparnis = Schonung der Wälder = Umweltschutz).
Gleich vorweg: Klebefalze lassen wir mal der Einfachheit halber unberücksichtigt.

1. Mathematisierung

Die Aufgabe schreit geradezu nach einer ersten Mathematisierung, da sich ja schon geometrische Begriffe andeuten. Mathematisiert heißt die Aufgabe also:
Bei konstantem *Volumen* V = 1 Liter soll die *Oberfläche* F der Packung *minimal* sein (womit wir schon mitten in der Geometrie sind).
Es scheint auf Anhieb gar nicht so eindeutig klar, wie in der Aufgabe vorausgesetzt, daß verschieden *geformte* 1-Liter-Packungen sich auch in der *Oberfläche* unterscheiden. Ja, es wäre sogar denkbar, daß alle verschieden geformten Packungen nicht nur dasselbe *Volumen*, sondern auch dieselbe *Oberfläche* haben. Und dann wäre es schlichtweg überflüssig, sich über Verbesserungen Gedanken zu machen.
Schauen wir uns dazu mal die quaderförmige Standard-Milchpackung an, wie es sie in jedem Laden zu kaufen gibt. Sie hat (wenn wir mal den „Giebel" vernachlässigen) folgende Maße hat: Grundfläche 7,1 cm • 7,1 cm, Höhe 19,8 cm (was in der Tat ein Volumen von ca. einem Liter ergibt). Ihre Oberfläche beträgt demnach 2 • 7,1 cm • 7,1 cm (Boden und Deckel) plus 4 • 7,1 cm • 19,8 cm (die vier Seitenwände), also insgesamt 663,14 cm^2. Halten wir dieses Ergebnis mal fest, um es mit einem sich später ergebenden, vielleicht günstigeren Ergebnis zu vergleichen.

Bevor wir die Aufgabe genauer bearbeiten, seien noch einige weitere (nötige) Grundvoraussetzungen gemacht: 1. soll die Packung zwecks guter Stapelbarkeit *quaderförmig* sein, 2. soll die Grundfläche *quadratisch* sein, um die Packung längs und quer gleichgut einstellen zu können.

2. rein mathematischer Teil

Unsere Packung habe also die Grunseitenlängen x und die Höhe y.
Damit ergibt sich für die Oberfläche

$$F = \underset{\text{Boden/Deckel}}{2x^2} \quad + \quad \underset{\text{4 Seitenwände}}{4xy}$$

Diese Fläche soll nun *minimiert* werden.

Als Standardproblem ergibt sich nun aber, daß die Fläche noch von *zwei* Variablen (x und y) abhängig ist, und solche Funktionen können wir prinzipiell nicht ableiten (wir kennen nur Ableitungen von Funktionen mit *einer* Variablen). Wir müssen also eine der beiden Variablen rauswerfen - indem wir sie in Abhängigkeit von der *anderen* ausdrücken.

2a) Verbinden der beiden Variablen

Immerhin ist anschaulich klar, daß x und y irgendwie *zusammenhängen*: bei der Grundvoraussetzung „Volumen 1 Liter" können wir die Maße nicht beliebig wählen, sondern wähle ich eine *große* Grundfläche (x sehr groß), so muß die Höhe (y) sehr *klein* sein -und umgekehrt: x und y scheinen also über die Vorgabe des 1-Liter-Volumens zusammenzuhängen.
Und in der Tat gilt: $V = \underline{x \bullet x \bullet y = 1}$

Der unterstrichene Teil läßt sich nach y auflösen, was ergibt: $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ (#)

Wir können nun also y in direkter Abhängigkeit von x ausdrücken - und setzen das in die F-Formel ein:

$$F = 2x^2 + 4x \quad y =$$
$$= 2x^2 + 4x \bullet x^{-2} =$$
$$= 2x^2 + 4x^{-1}$$

Da wir nun also F als Funktion der *einzigen* Variablen x darstellen können, markieren wir das auch als:

$$F(\underline{x}) = 2x^2 + 4x^{-1} \qquad (\#\#)$$

Nach diesem rein *algebraischen* Teil müssen wir uns zurückerinnern, was wir eigentlich vorhatten: es sollte überprüft werden, wann die Fläche *minimal* wird. Das aber überprüft man mittels der *Ableitungen*.

<u>2b) Minimaxbestimmung mittels Ableitung:</u>

$$F'(x) = 4x - 4x^{-2}$$

Hinreichende Voraussetzung für ein Maximum ist erstens, daß die 1. Ableitung gleich Null wird. Zu fragen ist also: wann gilt

$$4x - 4x^{-2} = 0 \qquad | + 4x^{-2}$$
$$\Leftrightarrow 4x = 4x^{-2} \qquad | : 4$$
$$\Leftrightarrow x = x^{-2} \qquad | : x^{-2}$$
$$\Leftrightarrow x^3 = 1 \qquad | \sqrt[3]{\ }$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Aus Gleichung (#) ergibt sich zudem, daß auch y = 1 dm. Zu überlegen wäre noch die Einheit: da 1 Liter als 1 dm • 1 dm • 1 dm definiert ist, ist die Einheit 1 dm.

<u>3. Rückübersetzung in die Textaufgabe/Antwort auf die Frage</u>

Die gesuchte Packung hat die Maße 1 dm • 1 dm • 1 dm, ist also ein *Würfel* der Seitenlänge 1 dm = 10 cm. (Nebenbei: das ergibt sich oft in geometrischen Extremwertaufgaben, daß das Quadrat, der Würfel, der Kreis oder die Kugel der günstigste Fall ist; diese Figuren/Körper scheinen aufgrund ihrer Einfachheit auch besonders *praktisch* zu sein).

Die Überprüfung anhand der *zweiten* Ableitung, ob es sich für x = 1 wirklich um ein Flächen*minimum* und nicht doch um ein *Maximum* handelt, wollen wir uns hier mal sparen. Bzw. wir ersetzen sie durch eine andere Überlegung:

Wie groß ist denn nun die Oberfläche des errechneten Würfels?

Mit (##) ergibt sich: $F = 2 \quad x^2 + 4 \quad x^{-1}$

$$= 2 \bullet 1^2 + 4 \quad 1^{-1} = 2 + 4 = 6$$

Die Oberfläche des Würfels ist also 6 dm^2 oder 600 dm^2. Damit hat die bisher übliche Einheitsverpackung (s.o.) mit 663,14 cm^2 eine um 63,14 cm^2 *größere* Oberfläche - unser Würfel kann also nicht *maximale* Oberfläche haben - also ist seine Oberfläche *minimal*.

Was soll das alles? Nun, wenn pro Tag schätzungsweise 10 000 000 Milchpackungen verkauft werden, ließen sich mit der optimaleren Würfelform pro Tag 10 000 000 • 63,14 cm^2 = 631 400 000 cm^2 = 63140 m^2 Pappe sparen. Oder auf´s Jahr umgerechnet 23 046 100 m^2 = 23,0461 km^2 Pappe!

Da fragt man sich doch, weshalb überhaupt noch *nicht*-würfelförmige Verpackungen erlaubt sind. Kann der Umweltminister keine Mathematik? (Nunja, Glasflaschen sind noch umweltfreundlicher!)

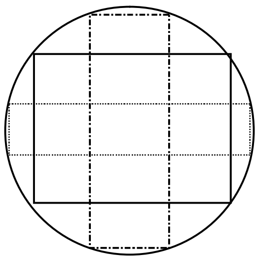
<u>6. Schlußkommentar:</u>

Wie schon vorweg angedeutet: die Aufgabe ist letztlich *reine* Geometrie, *außer*mathematische Kenntnisse sind *nicht* nötig.

Das ist bei der folgenden Aufgabe schon ein wenig anders:

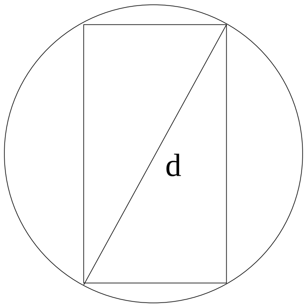
2. Aufgabe:
Aus einem Eichenstamm mit dem Durchmesser 30 cm soll derjenige (im Querschnitt) rechteckiger Balken ausgeschnitten werden, der - waagerecht unter einer Decke verlegt - höchste Tragkraft (Belastungsfähigkeit) hat.
1. Mathematisierung:
In dieser 2. Aufgabe ist die Mathematik offensichtlich schon erheblich verborgener: nur „30cm“ und „rechteckig“ sind wirklich mathematische Begriffe. Immerhin ahnt man wohl noch: der Querschnitt des Eichenstamms ist *kreis*förmig, und „höchste Tragkraft“ läuft wohl auf eine Maximierung (Ableitung) hinaus.
Wie wir sehen werden, ist „Eichenstamm“ nur Ausschmückung; ebenso gut könnte es sich um eine rechteckige Betonbohle handeln (wenn die auch wohl kaum aus einer runden hergestellt würde).
Fangen wir mit den eindeutig mathematischen Sachen an, nämlich erstmal dem Querschnitt durch den Baum und den zukünftigen Balken. Dabei sei eben der Baumquerschnitt als (mathematisch abstrahiert) absolut kreisförmig gedacht, ebenso der fertige Balkenquerschnitt als absolut rechteckig (ganz ist das nie erreichbar, und doch legt eine Säge gerade und senkrechte Schnitte nahe). Natürlich wäre der Baum selbst (ohne irgendwelchen Abschnitt) am stabilsten, aber das wäre doch arg unpraktisch (zu geringe, da tangentiale Auflagefläche für die Decke; Staubfalle in den Auflageritzen). Bzgl. des rechteckigen Balkens ist allemal klar, daß er möglichst viel von dem Eichenstamm nutzen soll (daß also der Abschnitt möglichst gering sein soll). Das ist offensichtlich der Fall, wenn die Ecken des Balkenquerschnitts auf dem Kreis des Baumquerschnitts liegen.

Als denkbare Möglichkeiten ergeben sich z.B.:



Um das auf eine Planskizze zu reduzieren, gehen wir erstmal davon aus, daß der Idealbalken vermutlich *nicht quadratischen* Querschnitt hat. Denn Vorsicht: geht man von *quadratischem* Aussehen aus, ist man schnell (rechnerisch) blind für *rechteckige* Ideallösungen, ja, kann sich vielleicht überhaupt nicht mehr rechnerisch ein eventuell rechteckiges Idealmaß ergeben. Umgekehrt ist das kein Problem: gehen wir von einem *Rechteck* aus, kann sich immer noch - als Spezialfall des Rechtecks - ein *Quadrat* ergeben.
Kommt hinzu, daß unter den o.g. Vorgaben eh nur *ein* Quadrat in den Stamm paßt, also a) keine Rechnung mehr übrigbleibt und b) das ja noch lange nicht die beste Lösung sein muß.
Wenn wir nun eine Planskizze zeichnen, sollten wir vorweg noch eine andere Vorgabe der Aufgabe nutzen: der *Durchmesser des Baumstamms* ist gleichzeitig die *Diagonale des Balkenquerschnittsrechtecks*. Also zeichnen wir ihn auch sofort so ein - was uns später auf den richtigen Rechenweg bringen wird: vernünftige *Planskizzen*anlage als bester *Rechen*tip!

(*)

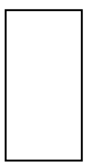


Ein ganz anderes Problem ist die zu maximierende Tragfähigkeit: hier soll nämlich nicht eine *mathematisch-geometrische* Größe (etwa die *Fläche*) maximiert werden, sondern eine *physikalische*, nämlich die *Tragfähigkeit*.
Im Gegensatz zur 1. Aufgabe (in der alles Außermathematische schnell verschwand) reicht hier also *nicht* rein mathematisches Wissen, sondern braucht man auch noch *physikalisches* Zusatzwissen. Das aber hilft uns (als Mathematikern) aber nur, wenn es letztlich *dennoch* mathematisierbar ist (und in der Tat funktioniert die Natur „glücklicherweise“ oftmals annähernd mathematisch).
Nun läßt sich die Formel für die Tragfähigkeit natürlich einem Physik- oder Statikbuch entnehmen, und käme eine solche Aufgabe in einer Mathe-Klausur vor, müßte der Lehrer solch ein außermathematisches Detail natürlich hinzufügen.
Aber viel interessanter ist es doch, die Formel für die Tragfähigkeit halbwegs *selbst* zu entdecken. Da wir hier keine Experimente machen können, geschieht das weitgehend in *Gedanken*experimenten. Die mag man als langweilig und arg abstrakt (eben mal wieder keine *echte* Anwendung) empfinden, umgekehrt sind sie aber doch ein geradezu phantastisches Zeugnis dafür, wie sehr der Mensch die Natur gedanklich durchdringen kann bzw. ihre Logik in sich aufgesaugt hat. Denn die Frage ist doch wahrhaft: was war eher, das Ei oder die Henne? Richtet sich die Natur zufällig weitgehend nach der Mathematik, oder haben wir die Mathematik von der Natur gelernt?

Solche Gedankenexperimente haben auch die großen Naturwissenschaftler oftmals angestellt (z.B. Galilei oder Einstein). Sie ersparen viel Ärger, schalten viele mißlingende oder von unklaren Randbedingungen verfälschte Experimente aus - und sind eh unersetzlich, um ein Experiment *planen* und kritisch *auswerten* zu können.
Bevor wir aber zu einem physikalischen Einschub kommen, sei doch erstmal eindeutig unser Zwischenziel definiert:

wir suchen eine *mathematische* Formel für die Tragfähigkeit eines im Querschnitt rechtwinkligen Balkens, da wir nur *mathematische* Formeln ableiten und somit das Maximum bestimmen können. (**)

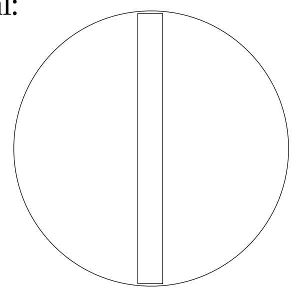
Es sei noch hinzugefügt: für den idealen *Querschnitt* ist die *Länge* des Balkens (und des Baumstamms, aus dem er geschnitten wird) völlig unerheblich.
<u>1a) physikalischer Einschub</u>
Vielleicht ist einem schonmal aufgefallen, wie die Balken unter der Decke alter Bauernhäuser (aus runden Baumstämmen) geschnitten sind. Meist haben sie folgenden Querschnitt



und eben nicht folgenden:

Nun haben die Bauern früher sicherlich keine (gar noch Ableitungs-)Mathematik zur Verfügung gehabt, aber doch wohl aus uraltem *Erfahrungs*wissen die Balken systematisch hochkant statt quer verlegt.
Und es könnte einen doch reizen, dieses Erfahrungswissen selbstentdeckend nachzuvollziehen - und vielleicht auch bis zur Mathematik hin zu systematisieren (bzw. uraltes Erfahrungswissen zu *beweisen*). Man muß ja nicht *alles* verstehen (kann´s in unserer Kultur wohl auch gar nicht mehr), aber das Gefühl, *überhaupt* mal irgendetwas selbstentdeckend verstanden zu haben, ist doch ungeheuer erhebend, läßt uns nicht mehr als so nebensächliche Erben großer Kulturschätze erscheinen. Kommt hinzu, daß, wer mal die Tragfähigkeit eines Bauernhausdeckenbalkens verstanden hat, im Prinzip auch die Konstruktion der Golden Gate Bridge in San Francisco versteht (an der nämlich dieselbe [Eisen-]Balkenanordnung vorkommt)..
Mag sein, daß die Bauern zu ihrem Erfahrungswissen durch blindes „trial and error“ gelangt sind: irgendwann haben sie halt bemerkt, daß Häuser mit hochkant verlegten Balken länger halten. Und doch steckte da vermutlich mehr hinter: der Entdecker der „Hochkant“-Verlegung muß ja überhaupt auf die Form der Balken *geachtet* haben - und war damit schon in den ersten Gedankenexperimenten. Vermutlich wird er sich also (*bevor* sein Haus einstürzte) gefragt haben:

Ist es eigentlich für die Tragfähigkeit egal, ob ein Balken quer oder längs liegt oder im Querschnitt quadratisch ist? Und dann hat er vielleicht das erste kleine Experiment gemacht: er hat eine 5 cm • 1 cm-Leiste quer und längs durchgebrochen und festgestellt: über die 5cm ist das spürbar schwerer als über die 1 cm. Folgerung für Deckenbalken: da der Druck der Decke von *oben* kommt, muß der Deckenbalken mehr *hoch* als *breit* sein. Woraus man aber schließen könnte: Hauptsache, der Balken ist möglichst hoch - und infolge des begrenzten Baumstammdurchmessers möglichst schmal:



Auch das läßt sich durch ein Gedankenexperiment ausschließen: belastet man ein senkrecht gestelltes (also sehr hohes, aber auch sehr schmales) Blatt Papier von oben, so verknautscht und bricht es zu den Seiten aus. Kurz und gut: Seitenstabilität/Breite ist *auch* wichtig. Das läßt sich auch durchaus einleuchtend physikalisch erklären: der von oben kommende Druck einer Decke verteilt sich im Balken eben nicht nur nach *unten*, sondern - aufgrund der verwurschtelten Holzstruktur - auch *seitlich*. Flapsige Folgerung: Höhe ist wichtig, aber Breite ist auch nicht ohne (nur eben nicht ganz so wichtig wie Höhe). (***)
Und wer soweit gedacht hat, sucht auch experimentell nach einer Systematik. Um aber eine Systematik zu finden, muß er auch systematisch vorgehen. Denkbar wäre also: er vergrößert (bei gleichbleibender Höhe) die *Breite* systematisch (z.B. doppelt, dreimal so groß) und stellt

durch Belastungsexperimente fest (Belastung bis zum Brechen): die Tragfähigkeit vergrößert sich eben auch systematisch (wird eben genau doppelt/dreimal so groß).
Mathematisch formuliert:

(1) die Tragfähigkeit T ist proportional zur Breite b des Balkens.

(Proportionalität beinhaltet dabei nebenbei einen Proportionalitätsfaktor, der z.B. besagt: die Tragfähigkeit in kg ist immer 27 mal so groß wie die Breite des Balkens in cm).

Und dann versucht unser Experimentator es halt mit der *Höhe*: er vergrößert (bei gleichbleibender Breite) die *Höhe* systematisch (verdoppelt, verdreifacht sie) - und stellt etwas Merkwürdiges fest: die Tragfähigkeit wird zwar *auch* systematisch größer, aber wächst besonders *schnell* (vervierfacht bzw. verneunfacht sich). Die obige Vermutung (***), daß die Höhe maßgeblicher als die Breite ist, bestätigt sich also.
Mathematisch formuliert:

(2) die Tragfähigkeit T ist proportional zum *Quadrat* der Höhe h des Balkens.

(1) und (2) zusammen ergeben mathematisch:

(3) $T = a \bullet b \bullet h^2$,womit das Zwischenziel (**) erreicht ist.

Dabei ist a ein Proportionalitätsfaktor, der vom Material und der Konsistenz des Balkens (z.B. gutes/schlechtes Eichenholz) abhängt. Für ein und dasselbe Material ist a konstant, z.B. 27. Womit man sich fragen kann: müssen wir, um unsere Aufgabe zu lösen, nicht das Material (Eiche) des Balkens berücksichtigen und seinen Proportionalitätsfaktor kennen? Wir werden sehen: er fällt irgendwann aus der Rechnung raus - so daß wir ihn hier *allgemein* mitschleppen können, solange wir wissen, daß er keine Variable, sondern eine Konstante (mathematische Fachsprache: Formvariable, je nach Material anders einzusetzen) ist.
Die zur Aufgabenlösung benötigte Formel (3) war nunmal nicht anders als physikalisch-statisch-experimentell zu bekommen. Immerhin bemerkenswert, daß sich ein Balken so hübsch exakt mathematisch verhält (wenn man von Unregelmäßigkeiten des Holzes absieht; aber wie anders, als dermaßen abstrahierend, will man denn überhaupt ein Haus oder gar einen Wolkenkratzer konstruieren?). Wo wir die benötigte Formel nun aber haben, können wir die Physik wieder verlassen:
2. rein mathematischer Teil
Die Tragfähigkeit soll nun also maximiert werden. Das geht mathematisch nur mittels Ableitung - und führt prompt zum nächsten (Standard-)Problem: wir können nur Gleichungen mit *einer* Variablen ableiten, die Gleichung enthält aber die *beiden* Variablen b und h (wohlgemerkt: a ist eine Konstante!).
Wir müssen also eine der beiden Variablen b und h durch die jeweils andere ausdrücken - und sie dann rauswerfen.
2a) Verbinden der beiden Variablen
Hängen b und h überhaupt *anschaulich* voneinander ab - und wenn ja, wie *exakt*? Schauen wir uns dazu an, wodurch ihre jeweiligen Ausmaße überhaupt eingeschränkt werden: doch offensichtlich durch die Größe des Baumstammquerschnitts.
Anschaulich können wir aber schonmal festhalten: je größer b, desto kleiner h - und umgekehrt. Es scheint also eine direkt Abhängigkeit vorzuliegen.
Um exakter zu werden, erinnern wir uns, daß der Baumstammquerschnitt einzig und allein (neben der Kreisförmigkeit) durch den Durchmesser 30 cm definiert ist. Davon scheint es also

abzuhängen, wie b und h sich zueinander verhalten. Und damit stellt sich die Frage: gibt es in der Querschnittszeichnung oben eine Figur, in der d = 30 cm *und* b *und* h vorkommen - und mit der wir *rechnen* können. Die Figur sieht man aber nur, wenn man wie oben rechtzeitig 30 cm als *Rechtecksdiagonale* eingezeichnet hat - oder es spätestens jetzt tut (vgl. [*]).
Und nun erkennt man mit geübtem Auge, daß da der Satz des Pythagoras hilft (wohlgemerkt: in der Aufgabenstellung kam er nirgends vor - und kein Lehrer wird ihn als Hilfsmittel nennen, sondern ihn einfach voraussetzen):

$$b^2 + h^2 = 30^2$$
$$\Leftrightarrow \quad b^2 + h^2 = 900 \qquad | - b^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 900 - b^2 \qquad (4)$$

Ein weiteres Wurzelziehen (Auflösen nach h) können wir uns glücklicherweise sparen, da wir in Formel (3) nur b^2 brauchen.
Der gesuchte Zusammenhang zwischen $h^{(2)}$ und $b^{(2)}$ ist also hergestellt, und somit können wir (4) in (3) einsetzen:

$$T = a \bullet b \bullet (900 - b^2) =$$
$$= 900ab - ab^3$$

T ist damit nun endlich nur noch von der *einzigen* Variablen b abhängig (nochmals: a ist nur eine Konstante), und somit können wir verdeutlichend schreiben:

$$T\,\underline{(b)} = 900ab - ab^3$$

Und das nun endlich können wir zwecks Maximumsbestimmung ableiten nach b:
2b) Minimaxbestimmung mittels Ableitung:
Dabei ist zu beachten, daß a wie eine Konstante zu behandeln ist, also bei jeder Ableitung erhalten bleibt:

$$T'(b) = 900a - 3ab^2 \overset{?}{=} 0 \qquad | + 3ab^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 900a = 3ab^2 \qquad | : 3a$$

(wohlgemerkt: hier fällt a endgültig raus, so daß der ideale Balken unabhängig vom *Material* wird)

$$\Leftrightarrow \quad 300 = b^2 \qquad |\sqrt{\ }$$

(Fallunterscheidung nicht nötig, da nur *positive*Streckenlängen möglich)

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{300} = b$$

also $b \approx 17{,}32$

$b = \sqrt{300}$ eingesetzt in Gleichung (4), die den Zusammenhang zwischen h und b beschreibt, ergibt:

$$h^2 = 900 - (\sqrt{300})^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 900 - 300$$
$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 600 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow \quad h = \sqrt{600}$$

also $h \approx 24{,}29$

(Die Überprüfung anhand der 2. Ableitung, ob für $b = \sqrt{300}$ tatsächlich ein Maximum vorliegt, sei hier aus Platzgründen weggelassen.)
3. Rückübersetzung in die Textaufgabe/Antwort auf die Frage:
Der ideale Balken maximaler Tragfähigkeit hat die Höhe $h = \sqrt{600}$ cm und die Breite $b = \sqrt{300}$ cm.
(Wohlgemerkt: in der Antwort haben natürlich auch wieder die *Einheiten* aufzutauchen, wenn welche in der *Aufgabe* vorgegeben waren. In den folgenden Aufgaben sparen wir uns aber schon in den Aufgabenstellungen Einheiten.)

Im folgenden seien *zwei* sehr ähnliche Aufgaben gegeben. Die dritte (im Zweidimensionalen) dient dazu, Grundverfahren zu lernen, die dann auch in der vierten (im Dreidimensionalen) benutzt werden können. Ja, wir wir sehen werden, läßt sich die 4. Aufgabe (im Dreidimensionalen) nicht nur *glücklicherweise* auf´s Zweidimensionale reduzieren, sondern diese Reduktion des Drei- auf´s Zweidimensionale ist überhaupt der *einzige* Weg, die 4. Aufgabe zu lösen. Also: wer zu „dumm“ für´s Dreidimensionale ist und nur das Zweidimensionale beherrscht, ist nicht auf dem *Holz*-, sondern dem *Königs*weg. Auch wahre Mathematikgenies hätten´s nicht dreidimensional lösen können.

3. Aufgabe:

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h_c = 150$ und der Hypotenusenlänge $c = 300$. In das Dreieck seien Rechtecke gelegt, deren *eine Seite* auf der Hypotenuse des Dreiecks *aufliegt* und deren *obere Eckpunkte* auf den *Katheten* des Dreiecks liegen. Welches dieser verschiedenen möglichen Rechtecke hat *maximalen Flächeninhalt*?

1a) *Veranschaulichung* der *verbalen* Aufgabenvorgaben durch eine *Planskizze*

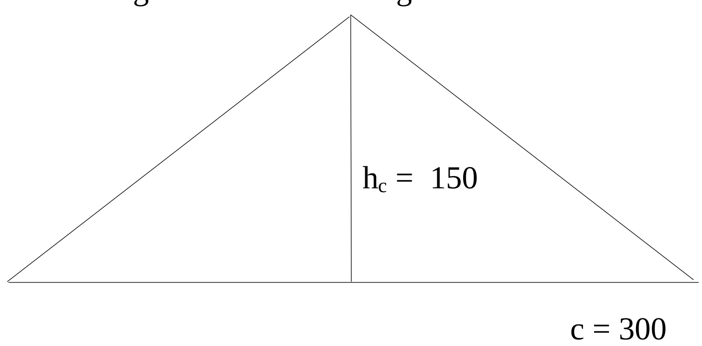
Eine Planskizze ist *kein* überflüssiges Übel und auch nicht nur für *schlechte* Mathematiker nötig, sondern ich wette, daß selbst der beste Mathematiker diese Aufgabe nicht ohne Planskizze lösen kann. Mehr noch: wir werden sehen, daß die Probleme beim Anlegen einer Planskizze schon zu Hinweisen für die Lösung führen bzw. daß die Konstruktion einer Planskizze schon den Lösungsweg beinhaltet.

Eine Planskizze muß nicht die konkreten *Maße* beinhalten, sollte aber die zentralen *Eigenschaften* umfassen. Und *nur* die, also nicht *zusätzliche* Eigenschaften, die nicht in der Aufgabe stehen.

Zentrale Eigenschaften der Aufgabe aber sind:

- das Dreieck ist *gleichschenklig* (und z.B. *nicht* notwendig *rechtwinklig*; also hüte man sich auch, es eindeutig oder annähernd rechtwinklig zu *zeichnen*, denn das könnte einen dazu verführen, fälschlich den Pythagoras anzuwenden; eine *genaue* Konstruktion würde nebenbei sowieso schnell klarmachen, daß das Dreieck *nicht* rechtwinklig ist);
- die *Lage* des Rechtecks ist vorgegeben (nicht aber seine *sonstige Form*; also hüte man sich, es eindeutig oder annähernd *quadratisch* zu zeichnen, weil man dann eventuelle andere Lösungsmöglichkeiten übersieht; und wie wir sehen werden, ist das ideale gesuchte Rechteck *kein* Quadrat);

Mit diesen Vorgaben aber ergibt sich als *eine* Möglichkeit:



Aber selbst dabei wollen wir es nicht belassen:

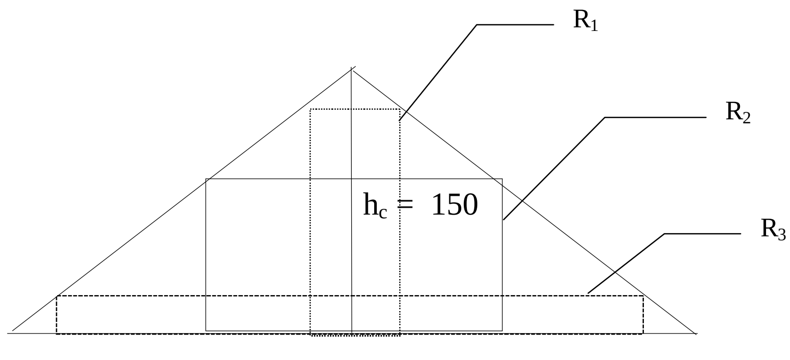
1.: wenn die Höhe h_c schon gegeben ist, zeichne man sie auch an der richtigen Stelle ein.

2.: wenn man das Dreieck regelrecht *konstruiert*, taucht die Höhe h_c sowieso als Konstruktionsmittel auf.

Wir werden unten noch sehen, daß die Höhe h_c dringend *im* Dreieck eingezeichnet sein muß, um überhaupt auf den einzig möglichen Lösungsweg zu kommen.
Nochmals: die Planskizze ist also kein *Luxus* und auch nicht nur zur *Veranschaulichung* (für Leute mit schlechtem Vorstellungsvermögen) nötig, sondern liefert überhaupt erst die *Lösungsidee*.
Kurz und gut: *Zeichnungen* sind oft die beste Hilfe zur *Rechnung*. Denn als Faustregel gilt: was man *zeichnen* kann, ist auch *berechenbar*.

1b) Veranschaulichung der Aufgabenstellung/des Grundproblems

Die Aufgabenstellung beinhaltet, daß in das Dreieck *verschiedene* Rechtecke einzeichenbar sind. Des weiteren behauptet die Aufgabenstellung indirekt, daß diese verschiedenen *Rechtecke* auch verschieden große *Flächeninhalte* haben und *eines* der Rechtecke einen eindeutig maximalen Flächeninhalt. Das schlucke man nicht allzu leichtfertig, sondern veranschauliche es sich auch einmal an verschiedenen (Extrem-)Möglichkeiten:

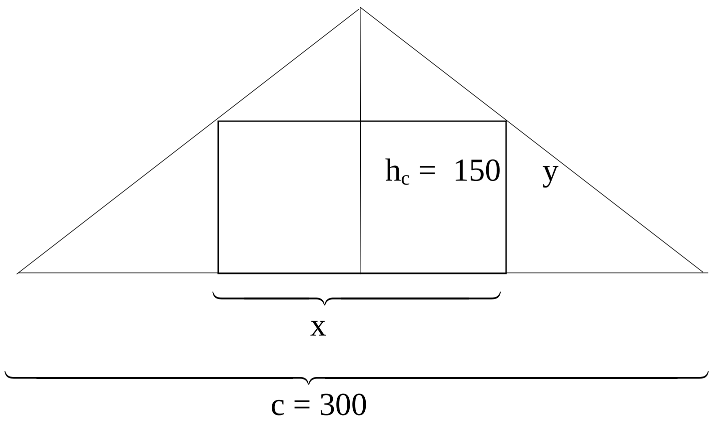


Anhand der drei eingezeichneten Rechtecke R_1, R_2 und R_3 werden die verschiedenen möglichen Formen der Rechtecke klar (alle drei entsprechen den Aufgabenvorgaben!). Ebenso wird aber auch sehr anschaulich, daß die Rechtecke *keineswegs* alle denselben Flächeninhalt haben: R_2 ist offensichtlich erheblich größer als R_1 oder R_3.
Hier ist allerdings auch vor einigen Kurschlüssen zu warnen:

1. nämlich dem, R_2 sei schon das gesuchte Rechteck mit maximalem Flächeninhalt. Vielleicht ist das exakt maximale Rechteck doch ein Ideechen höher (wo Planskizzen ja sowieso immer ein wenig ungenau sind). Und selbst *wenn* wir mit R_2 durch puren Zufall das maximale Rechteck gefunden haben sollten, wäre diese Eigenschaft noch zu *beweisen*!
2.: in geometrischen Extremwertaufgaben ist in der Tat oft das Quadrat (oder der Würfel, der Kreis oder die Kugel) die optimale Lösung. Aber auch davon gehe man nicht allzu leichtfertig aus: einerseits wäre das bei der konkreten Aufgabenstellung zu *beweisen*, andererseits wird sich noch herausstellen, daß das Quadrat im hier vorliegenden Fall eben *nicht* die optimale Lösung ist. Also nochmals: nichts allzu Suggestives/nur scheinbar Selbstverständliches einbringen.

2. Mathematisierung

Erinnern wir uns an die Aufgabenstellung zurück: der Rechteckflächeninhalt F soll *maximiert* werden. Dazu muß er erstmal allgemein berechnet werden. Ein Rechteckflächeninhalt wird als Produkt der beiden Seiten berechnet, die wir mal allgemein als x bzw. y bezeichnen:



Es gilt also F = x • y

3. rein mathematischer Teil

3a) Verbinden der beiden Variablen:

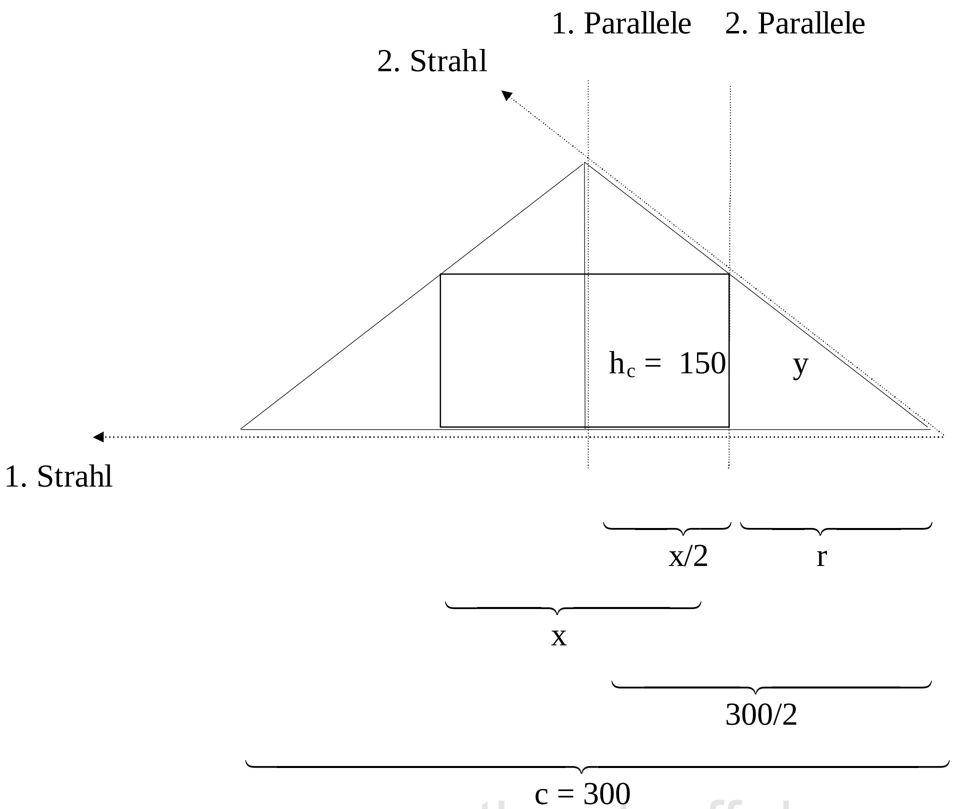
Nun ist das aber wieder eine Gleichung mit *zwei* Variablen, und sowas ist nicht ableitbar. Läßt sich also y in Abhängigkeit von x ausdrücken und somit rauswerfen? Anhand der Beispiele R_1, R_2 und R_3 sieht man schnell, daß x und y zusammenzuhängen scheinen: je größer x gewählt ist, desto kleiner ist y - und umgekehrt. Läßt sich nun aber eine exakte Formel finden, mittels derer x und y zusammenhängen (genauer: *eine* Funktionsgleichung, die für *alle* möglichen x/y-Pärchen gilt)?

Und schon stehen wir vor dem nächsten

Standardproblem bei geometrischen Extremwertaufgaben: es helfen immer dieselben geometrischen Standardsätze: die pythagoräische Satzgruppe, trigonometrische oder Strahlensätze. Man muß sie allesamt samt ihrer Voraussetzungen *kennen* und in einer geometrischen Figur *wieder*erkennen können.

2 Strecken werden durch die *pythagoräischen* Sätze (s,s,s), die *Strahlen*sätze (s,s,s) und *trigonometrische* Funktionen (s,s,w) in Verbindung gebracht (s = Strecke, w = Winkel). Welcher der Sätze mag nun aber im hier *vorliegenden* Fall einsetzbar sein? Anders gefragt: welcher Satz bringt x und y in Verbindung, was ja insbesondere heißt: in welchem kommen also überhaupt x und y vor (und ansonsten nur *bekannte* Details)?

Es bleibt erstmal nichts anderes, als die *Voraussetzungen* der jeweiligen Sätze in der Zeichnung wiederzufinden: Grundvoraussetzung für die Anwendung der *pythagoräischen* sowie der *trigonometrischen* Sätze ist die *Rechtwinkligkeit* eines Dreiecks. In unserem Fall kämen die beiden Dreiecke rechts und links der Höhe in Frage. Man kann in unserer Figur aber auch die Grundvoraussetzungen der Strahlensätze (zwei Strahlen s_1 und s_2, die von *einem* Punkt P ausgehen und von zwei Parallelen p_1 und p_2 geschnitten werden) wiedererkennen:



Kurzer Zwischengedanke: welcher Satz auch anwendbar sein mag: es hat sich in jedem der drei Fälle als höchst sinnvoll erwiesen, in der *Planskizze* frühzeitig die *Höhe* einzuzeichnen. Hätte man das nicht getan, würde man die betreffenden Sätze erst gar nicht wiedererkennen. Also nochmals: alle Aufgabeninformationen *frühzeitig* in die Planskizze einarbeiten.
Nun ergibt sich aber ein weiteres

Standardproblem: wendet man die Sätze in allen möglichen Formen an, so kommen in keinem *ganz* x *und ganz* y vor. Immerhin aber kommen (und zwar nur) im Strahlensatz y und ein *Teilstück* von x (nämlich x/2) vor. Wir werden sehen: oftmals ist es nötig, mit *Teil*strecken (x/2) und *Streckenergänzungen* (x/2 + r = 300/2) zu arbeiten, also erst einen kleinen *Umweg* zu gehen.

Wie man bei Anwendung aller *trigonometrischen* und *pythagoräischen* Sätze schnell feststellt, sind sie im vorliegenden Fall nicht geeignet, x und y in Verbindung zu bringen (x und y tauchen in ihnen nicht auf, bzw. es tauchen unbekannte Winkel auf). Bleibt also nur einer der Strahlensätze.
Einer davon Strahlensätze lautet (auf den 1. Strahl angewandt):

$$\frac{\text{vom Strahlenursprung bis zur 1. Parallele}}{\text{vom Strahlenursprung bis zur 2. Parallele}} = \frac{\text{1. Parallenausschnitt}}{\text{2. Parallenauschnitt}}$$

In unserem vorliegenden Fall also (das mache man sich anhand der letzten oben auftauchenden Zeichnung klar):

$$\frac{r}{\frac{300}{2}} = \frac{y}{150}$$

Wenn wir jetzt noch wissen und einsetzen: $r = \frac{300}{2} - \frac{x}{2}$ (Streckenergänzung), so ergibt sich

$$\frac{\frac{300}{2} - \frac{x}{2}}{\frac{300}{2}} = \frac{y}{150}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{150 - \frac{x}{2}}{150} = \frac{y}{150} \qquad | \bullet 150$$

$$\Leftrightarrow \quad 150 - \frac{x}{2} = y \qquad (\#)$$

Damit, so sollte man sich nach all der abstrakten Mathematik bewußt werden (im Hinterkopf haben), haben wir unser Ziel erreicht, y in direkter Abhängigkeit von x zu erhalten, und das können wir dann in die Flächenformel einsetzen:

$$F = x \bullet \quad y \quad =$$

$$= x \bullet (150 - \frac{x}{2}) = 150\,x - 0{,}5\,x^2$$

Und da F nun endlich nur noch von x abhängig ist, kennzeichnen wir das auch:

$$F\,\underline{(x)} = 150\,x - 0{,}5\,x^2$$

Und wiederum sollte noch klar sein, was wir eigentlich vorhatten, nämlich F(x) zu *maximieren* (was nun, da nur noch *eine* Variable vorhanden ist, auch prinzipiell möglich ist). Zur Maximum-Bestimmung benötigen wir aber die *Ableitungen*:

3b) Minimaxbestimmung mittels Ableitung

$F´(x) = 150 - x \overset{?}{=} 0 \Leftrightarrow x = 150$

Und mittels der Gleichung (#) ergibt sich y = 75.

Überprüfung anhand der 2. Ableitung:

$F´(x) = -1 \Rightarrow F´´(150) = -1 < 0 \Rightarrow$ für x = 150 liegt tatsächlich ein *Maximum* (des Flächeninhalts) vor.

4. Rückübersetzung in die Textaufgabe/Antwort auf die Frage

Das gesuchte Rechteck maximaler Fläche hat die Maße x = 150 und y = 75 (und den Flächeninhalt 11 250).

Dieses Ergebnis ist nach all der umständlichen Rechnung durchaus bemerkenswert: es ist nicht nur sehr *einfach*, sondern scheint auch *System* zu haben: die Grundseite x des Rechtecks maximalen Flächeninhalts ist genau *halb* so groß wie die Grundseite des Dreiecks, die Höhe y des Rechtecks ist *halb* so groß wie die Höhe des Dreiecks. Oder noch deutlicher formuliert: im *Zwei*dimensionalen wird alles ge*zwei*telt (halbiert). Stellt sich die unten zu beantwortende Frage: wird im *Drei*dimensionalen alles ge*drittelt*?

Kurz sei nochmal drauf verwiesen, daß - wie sonst durchaus oft bei geometrischen Extremwertaufgaben (vgl. Aufgabe 1) - *kein* Quadrat rauskommt, diese Anfangsannahme also in die Irre geführt hätte.

4. Aufgabe:

Gegeben sei eine gleichschenklige Pyramide der Höhe h = 150 mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge c = 300. In die Pyramide seien Quader gelegt, deren Grundflächen auf der Pyramidengrundfläche *aufliegen* und deren *obere Eckpunkte* auf den gleichschenkligen *Seitenkanten* der Pyramide liegen. Welcher dieser Quader hat *maximales Volumen*?

Hier sei nicht *nochmals* problematisiert, daß es auf Anhieb ja gar nicht so selbstverständlich ist, daß die verschiedenen möglichen Quader verschiedenes *Volumen* und *einer* ein maximales Volumen hat. Ebensowenig sei *nochmals* problematisiert, daß keineswegs automatisch ein *Würfel* maximales Volumen hat (es wird sich herausstellen, daß das *nicht* der Fall ist). Dafür sei ein anderer denkbarer Irrtum behandelt: man könnte denken, daß der gesuchte Quader aufgrund der Ähnlichkeit der 4. mit der 3. Aufgabe auch dieselben *Maße* hat, also als Grundflächenseiten (nur sowohl als Länge als auch als Breite) x = 150 und als Höhe y = 75 Meter. Wir werden sehen, daß das *nicht* der Fall ist - und zeigen, *warum* es nicht der Fall sein kann.

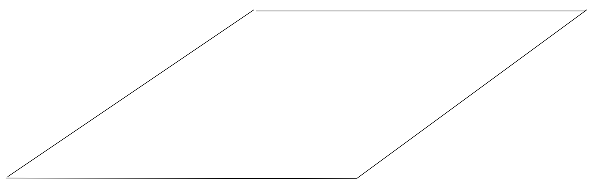
1. Veranschaulichung der *verbalen* Aufgabenstellung durch eine *Planskizze*

Die vorliegende dreidimensionale Aufgabe ist nun endgültig *gar nicht mehr* ohne Planskizze zu lösen. 1., weil man ohne Planskizze *gar keinen* Überblick über die Gegebenheiten bekommt (und wie soll man dann überhaupt losrechnen?); 2. aber, weil einem erst die Planskizze - mehr noch als in der 3. Aufgabe - zentrale *Lösungsideen* an die Hand gibt; 3., weil uns erst die Planskizze zur einer der 3. Aufgabe sehr *ähnlichen* (zweidimensionalen) Lösungsidee zurückführen wird; 4.: viel hilfreicher als eine zweidimensionale Planskizze ist ein dreidimensionales Modell; zu dessen Konstruktionm gibt uns aber die zweidimensionale Planskizze wichtige Hinweise (bzw. dafür, welche Eigenschaft an diesem dreidimensionalen Modell besonders wichtig ist; vgl. unten die diagonale Schnittfläche).

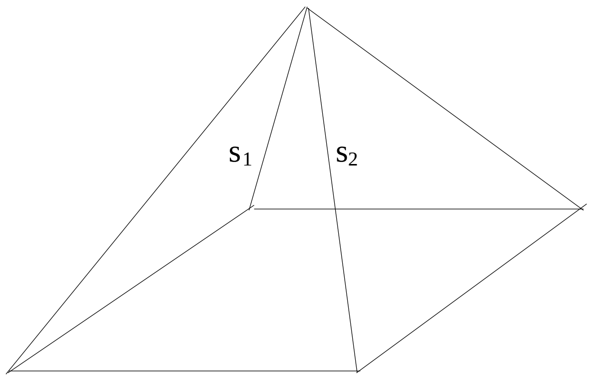
Aus diesem Grunde sei einige Zeit damit verbracht, wie man sich die Planskizze besonders *günstig* zeichnen kann. Dabei verführt das Wort „Planskizze“ oft zu einem Irrtum: weil nur (s.o.) wichtige *Grundeigenschaften*, aber nicht konkrete *Maße* wichtig sind, meint man oft, man brauche sie nur hinzuschmieren. Das, so scheint mir, darf nur jener, der sowieso schon ein Auge für geometrische Zusammenhänge/Beziehungen/Lagen hat (nämlich schon ahnt, daß die diagonale Schnittfläche - s.u. - hilfreich ist). Jeder andere wird sich doch erstmal klarmachen müssen, wie die Pyramide aussieht und wie der Quader in ihr liegt. Da sei gleich ein Standardirrtum bzw. Standardzeichenfehler genannt: daß eine Quadervorderkante auf der Pyramidenvorderkante liege.

Befassen wir uns erst mit einigen Grundproblemen zweidimensionaler Projektionen von dreidimensionalen Körpern:

1.: die zweidimensionale Projektion ist *nicht winkeltreu*, d.h., die Winkel in der Projektion stimmen nicht mit denen des gemeinten Körpers überein. Das wird schon allein klar, wenn wir nur die quadratische Grundfläche der Pyramide zeichnen:



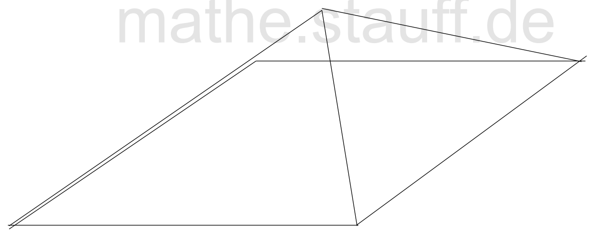
2.: die zweidimensionale Projektion ist *nicht längentreu*. D.h. unter anderem, daß im Dreidimensionalen gleichlange Strecken in der zweidimensionalen Projektion *nicht* gleichlang sind. Man sieht das schnell, wenn man noch die Verbindungsstrecken s Pyramideneckpunkt/Pyramidenspitze einzeichnet:



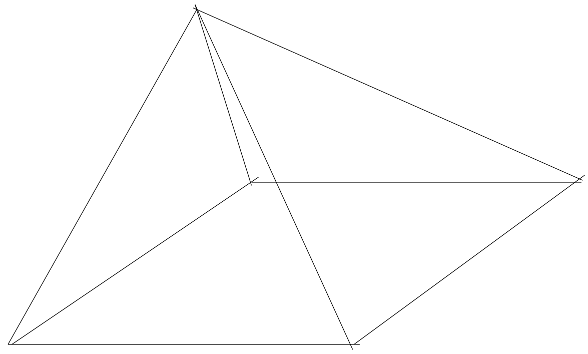
In der zweidimensionalen Projektion fällt s_1 offensichtlich erheblich länger als s_2 aus.

3.: man hat für eine *geeignete Perspektive* zu sorgen, weil man sonst in der zweidimensionalen Zeichnung gar nicht den dreidimensionalen Körper erkennt. Exakt von vorn gesehen erscheint die Pyramide z.B. als pures zweidimensionales Dreieck wie in der 3. Aufgabe - und daran kann man sich gefährlich vertun, nämlich z.B. meinen, h = 150 sei die Höhe dieses Frontdreiecks (und daraus fälschlich schließen, die 4. Aufgabe sei exakt genauso zu lösen wie die 3.).

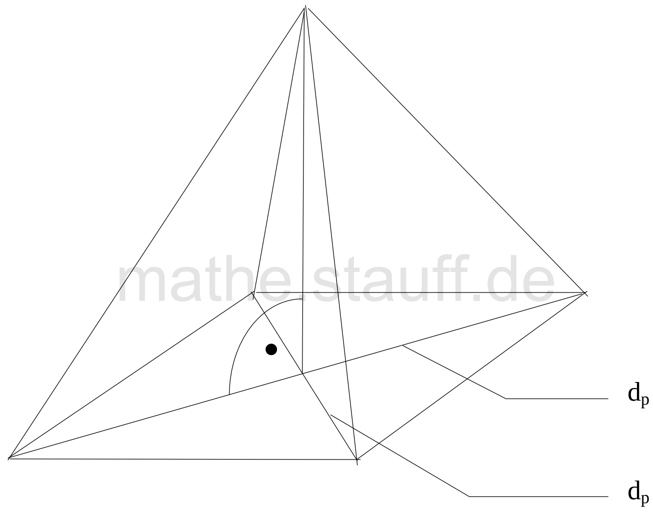
Überlegenswert ist auch, *weshalb* die Pyramide von vorne so aussieht wie ein Dreieck: einfach deshalb, weil aus dieser Perspektive (Mathematiker benutzen die Parallel-, nicht die Zentralsperspektive) verschiedene Kanten der Pyramide *hintereinander verschwinden* bzw. *ineinander fallen*. Das ist, wie auch im folgenden Beispiel, zu vermeiden, weil man sonst verschiedene Strecken optisch nicht auseinanderhalten kann (und dann z.B. gleiche Längen voraussetzt, weil man die fehlende Längentreue nicht beachtet hat).



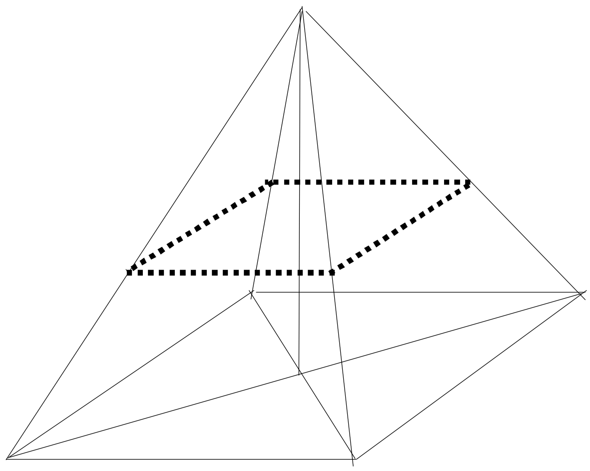
Um den letzten Fehler zu vermeiden, lege man die Pyramidenspitze sehr hoch (es müssen in einer Planskizze ja schließlich nur die *Grundeigenschaften*, nicht die *Maße* stimmen). Wie nun aber bekommt man eigentlich über der oben schon gezeichneten quadratischen Grundfläche eine *gleichschenklige* Pyramide errichtet (was schon für die alten Ägypter ein enormes Problem war, mußten sie doch auf die noch gar nicht vorhandene Spitze zubauen)? Diese Gleichschenkligkeit zu erreichen, ist umso schwerer, als die zweidimensionale Projektion ja nicht längentreu ist (die gleichlangen Schenkel s der Pyramide also in der zweidimensionalen Projektion nicht gleichlang sind und somit auch nicht als gleichlang konstruiert werden müssen). Wo also müssen wir die Spitze hinlegen, so daß die Pyramiden-Projektion nicht schief erscheint wie in:



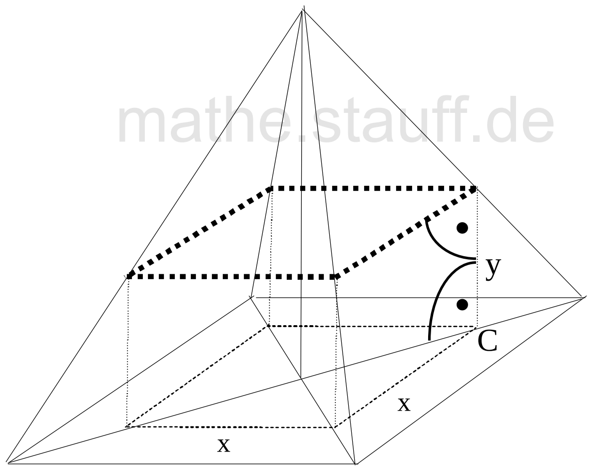
Es hilft nur eins: man muß sich bewußt sein, daß die Pyramidenspitze (sowohl im Drei- als auch im Zweidimensionalen) senkrecht über dem Schnittpunkt der beiden Pyramidengrundflächendiagonalen d_p liegt:



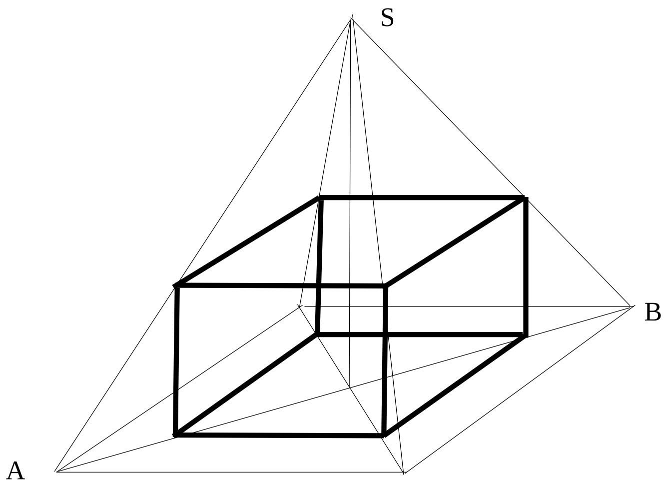
Um also die Planskizze sauber hinzukriegen, muß man die Grundflächendiagonalen der Pyramide *einzeichnen* (und wir werden noch sehen, daß die auch zur Rechnung wichtig sind!). Damit ist uns eine saubere und übersichtlich-einsehbare Pyramidenkonstruktion gelungen. Wie nun aber bekommen wir den Plan-Quader darein? Als erstes mache man sich bewußt, daß seine Oberkanten irgendwo auf den Pyramidenschenkeln s beginnen und *parallel* zu den Pyramidengrundkanten sind. Damit zeichnen wir schonmal das oberste Quadrat des Quaders:



Die Seitenkanten y des Quaders gehen nun von seinen Eckpunkten (auf den Pyramidenschenkeln) *senkrecht* runter. Fragt sich nur, wie *weit*? Dazu werde man sich bewußt, daß die Basiseckpunkte C des Quaders auf den Grundflächendiagonalen d_p der Pyramide liegen (und die sind schon eingezeichnet). Es ergibt sich:



Halten wir schonmal zwei wichtige Erkenntnisse fest: es ist nicht nur so, daß die Pyramidengrundflächendiagonalen wichtig sind, sondern sie scheinen sogar *zweimal* wichtig zu werden. *Das* ist der zentrale Tip für die Rechnung (und wenn man sich die Pyramidengrundflächendiagonalen nicht in die Planskizze einzeichnet, kommt man wahrscheinlich nie darauf).
Vorerst abschließend und im Überblick nochmals unser Gesamtmodell:



2. rein mathematischer Teil

Zur angestrebten Berechnung des Quadervolumens brauchen wir dessen Seitenkanten, die wir mit x (Seitenkanten der quadratischen Quadergrundfläche) und y (Quaderhöhe) bezeichnen.
Als Volumenformel für einen Quader gilt

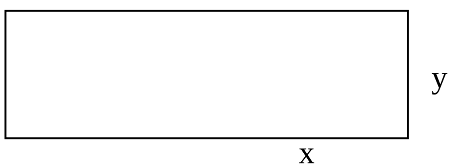
$$V = \text{Länge} \bullet \text{Breite} \bullet \text{Höhe} =$$
$$= \quad x \quad \bullet \quad x \quad \bullet \quad y \quad = x^2 \bullet y \qquad (\#)$$

Das ist zwar eine hübsch einfache Formel, nur leider wieder mit dem Standardnachteil behaftet: um das gesuchte Maximum zu bestimmen, müssen wir die Gleichung ableiten, was aber wieder mal nicht funktioniert, da die Formel noch *zwei* Variable enthält. Womit sich wieder die Standardfrage stellt:

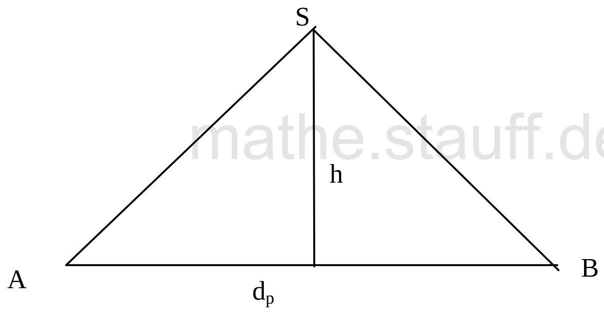
läßt sich y in Abhängigkeit von x berechnen und somit aus der Volumenformel rauswerfen? (##)

2a) Verbinden der beiden Variablen

Da frage man sich erstmal, ob x und y denn überhaupt *anschaulich* in einer Beziehung zueinander stehen. Schnell merkt man: macht man x größer (und damit die Grundfläche des Quaders), so wird y (die Höhe des Quaders) kleiner, nämlich der Quader flacher (und umgekehrt). Wo es aber so anschaulich stimmt, brauchen wir „nur noch“ die entsprechende Formel zu suchen, die x und y in Beziehung zueinander setzt.
Es läßt sich zudem schon ahnen, wie die Verbindungsformel zwischen x und y aussieht: beide verhalten sich antiproportional zueinander, d.h. wird x größer, so wird y kleiner. Denkbar wären da zwei Formelarten, nämlich etwa $y = 1/x$ oder $y = a - x$ (wobei a eine konstante Zahl ist). (###)
Da wir eh nur im *Zwei*dimensionalen denken können und nur *zwei*dimensionale Standardformeln haben, müssen wir nach einer Ebene suchen, in der *sowohl* x *als auch* y vorkommen. Geeignet sind da nur die Seitenflächen des Quaders, also Rechtecke:



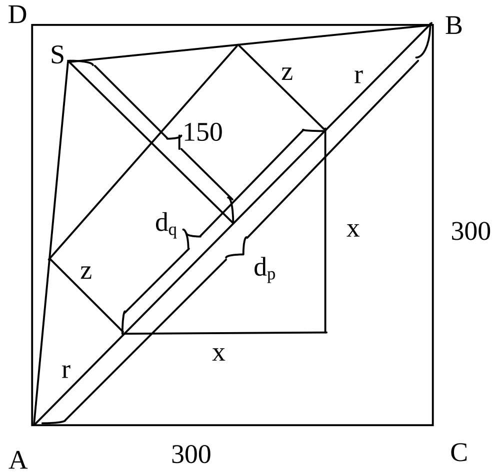
Anhand dieser Rechtecke wird aber keinerlei Zusammenhang zwischen x und y klar, außerdem fehlt gänzlich die Pyramide, die doch ganz offensichtlich den Zusammenhang zwischen x und y regelt.
Halten wir also fest: es gibt *keine* (zweidimensionale) Ebene, aus der wir *direkt* den Zusammenhang x/y berechnen können. Es wird offensichtlich (unvermeidbar) ein bißchen komplizierter.
Und an dieser Stelle muß steckenbleiben, wer nicht entweder a) geometrisch geübt ist oder b) Aufgabe 3 nicht gerechnet hat oder c) nicht den (doppelten) Diagonalentip aus der Planskizze kennt.
Zu b): wer Aufgabe 3 berechnet hat, ist dadurch doch schon auf eine Lösungsfährte gesetzt: er sucht in der Pyramide ein Dreieck, das ähnlich funktioniert wie in Aufgabe 3. Leider gibt´s aber nirgends an der Pyramide ein Dreieck mit der Grundseite c = 300 und der Höhe h = 150. Es bleibt nur die Wahl: entweder nimmt man eine *Seitenfläche der Pyramide*: sie hat zwar die Grundseite c = 300, aber eine größere Höhe als 150. Oder man nimmt die *Diagonalenfläche* ASB, die zwar die Höhe h = 150 hat, aber eine größere Grundseite d_p.
Wir entscheiden uns aus gutem Grund für die Diagonalenfläche ASB:
zu c): im Laufe der Planskizzenerstellung deutete sich schon zweimal die Pyramidengrundflächendiagonale d_p als wichtig an.
Zeichnen wir uns die Diagonalenfläche ASB erstmal raus (und damit sind wir endlich sehr übersichtlich vollends im Zweidimensionalen):



Jetzt plötzlich wird klar: die Aufgabe 4 scheint sehr *ähnlich* zu laufen wie Aufgabe 3 (letztere war also beste Vorbereitung). Aber bleiben wir uns auch der Unterschiede bewußt!: die Fläche ASB hat markant andere *Maße* als das Dreieck in Aufgabe 3: die Höhe ist zwar nach wie vor h = 150, die Grundseite d_p ist aber erheblich größer als 300 (da d_p *Diagonale* einer quadratischen Grundfläche der Seitenlänge 300 ist). Womit sich andeutet, daß trotz ähnlicher *Rechnung* höchstwahrscheinlich nicht dieselben *Ergebnisse* wie in Aufgabe 3 rauskommen werden. (*)
Auf die Fläche ASB können wir nun schon - wie in Aufgabe 3 - den Strahlensatz anwenden. Es gilt:

$$\text{(A)} \qquad \frac{r}{\frac{d_p}{2}} = \frac{y}{150}$$

Diese Formel hat nun aber noch einige Nachteile: 1. enthält sie zwar schon y, aber noch nicht x, mit dem wir ja schließlich (Grobziel [##]) y in Verbindung bringen wollen. 2. aber enthält es neben y noch zwei *weitere* Unbekannte, nämlich r und d_p. Zur Berechnung von d_p haben wir aber schon einen Tip: d_p ist die Diagonale der quadratischen Pyramidengrundfläche mit der Seitenlänge 300. Wir müssen also kurzfristig die Ebene wechseln, also von der Ebene ASB in die Grundflächenebene der Pyramide gehen. Um uns aber die Beziehung dieser beiden Ebenen zueinander deutlicher zu machen, bauen wir uns nun ein dreidimensionales Modell der Pyramide (Fläche ASBD ausschneiden und Dreiecksfläche ABS hochklappen):



Der Grundebene ACBD können wir nun mittels Satz des Pythagoras entnehmen:

$$d_p^2 = 300^2 + 300^2 =$$
$$\Leftrightarrow \quad d_p^2 = 2 \bullet 300^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow \quad d_p = \sqrt{2} \bullet 300^2$$
$$\Leftrightarrow \quad d_p = \sqrt{2} \bullet 300 \qquad \text{(B)}$$

Zwei Zwischenbemerkungen: 1. taucht hier (nach dem Strahlensatz) das *zweite* Standardmittel auf, um in Extremwertaufgaben Strecken in Beziehung zu setzen: der Pythagoras. 2. könnten wir nun (B) schon in Gleichung (A) einsetzen, aber wir lassen es erstmal nur stehen.

Des weiteren taucht in Gleichung (A) das noch unbekannte r auf. Mittels Streckenergänzung (s.o.) erkennen wir:

$$r = \frac{d_p}{2} - \frac{d_q}{2}$$
$$r = \frac{d_p - d_q}{2} \qquad \text{(wobei } \underline{d_q} \text{ die } \underline{Q}\text{uadergrundflächen}\underline{d}\text{iagonale ist)}$$
$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{d_p - d_q}{2} \qquad \text{(C)}$$

Kleine Zwischenerwähnung: was anhand der Planskizzenerstellung zu erwarten war, ist tatsächlich eingetreten: die Diagonale geht *zweimal* in die Rechnung ein: einmal als d_p, das andere Mal als d_q.

Schauen wir uns nun aber die Gleichung (C) genauer an: sie scheint wenig hilfreich, ja, fast ein Irrweg zu sein: wir wollten die Unbekannte r ausrechnen, haben uns aber nur die *neue* Unbekannte d_q eingehandelt. Es bleibt uns nichts anderes, als uns um diese zu kümmern. Und dazu gehen wir wieder in die Grundebene ACBD, der wir wieder mittels Pythagoras entnehmen können:

$$d_q^2 = x^2 + x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad d_q^2 = 2 \bullet x^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow \quad d_q = \sqrt{2} \bullet x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad d_q = \sqrt{2} \bullet x \qquad \text{(D)}$$

Nun mag man sich denken: um Gottes willen, *wieder* eine neue Unbekannte, nämlich x. Machen wir uns aber mal klar, was wir nun *insgesamt* erreicht haben. Dazu *sammeln* wir alle bisher erreichten Gleichungen:

(A) $$\frac{r}{\frac{d_p}{2}} = \frac{y}{150}$$

(B) $$d_p = \sqrt{2} \bullet 300$$

(C) $$r = \frac{d_p - d_q}{2}$$

(D) $$d_q = \sqrt{2} \bullet x$$

Damit aber stehen wir vor einem typischen Problem: Aufgaben wie die hier vorliegende führen oft zu einem auf Anhieb völlig unübersichtlichen Sammelsurium von Gleichungen. Ja, gerade wenn man noch *nicht* weiß, wie zum Ziel zu kommen ist, sammelt man erstmal alle denkbaren Gleichungen. Aber man mache das immerhin mit *System*: 1. sammle man *alle* Gleichungen, die *sämtliche* mathematischen Informationen der Aufgabenstellung verarbeiten (in unserem Fall: c = 300 muß vorkommen [in (B)], h = 150 muß vorkommen [(in (A)], und zur angestrebten Quadervolumen-Berechnung müssen x [in (D)] und y [in (A)] vorkommen); und besser zu viele als zu wenige Gleichungen; 2. erinnere man sich an *Gleichungssysteme*: da waren zwar die *Einzel*gleichungen nicht lösbar, wohl alle im *Verbund* (die eine Gleichung ergänzt, was in der anderen noch fehlt - und umgekehrt); 3. *haben* wir ja nach *System* gesammelt. Denn schauen wir uns doch mal an, was wir insgesamt erreicht haben:

laut A) hängt $\underline{y}$ von r und d_p ab

r hängt laut (C) von d_q und d_p ab

d_p ist mittels (B) eindeutig berechenbar

d_q hängt laut (D) von $\underline{x}$ ab

Insgesamt haben wir also (den Pfeilen entlang) eineAbhängigkeit des y von x erreicht. Und genau das war doch unser Ziel (##)! (Worum´s mir hier geht: wenn man sich auf dem Weg immer des Ziels bewußt bleibt, kann einen kaum ein Zwischenergebnis schockieren und kann man es immer sofort einordnen/in seiner Bedeutung erkennen.)

Die irritierende Anzahl der Gleichungen (jede für sich ist völlig unbrauchbar) wird übersichtlich, wenn wir sie langsam, aber sicher zu *einer* zusammensetzen. Dazu setzen wir erstmal (B) in (A) und (C) ein. Es ergeben sich:

(A ´) $$\frac{r}{\frac{\sqrt{2} \bullet 300}{2}} = \frac{y}{150}$$

(C ´) $$r = \frac{\sqrt{2} \bullet 300 - d_q}{2}$$

un wird (D) in (C´) eingesetzt, und wir erhalten

(C ´´) $r = \frac{\sqrt{2} \bullet 300 - \sqrt{2} \bullet x}{2}$

Und dieses Ergebnis (C´´) setzen wir nun zuguterletzt in (A´) ein und erhalten (A´´):

$$\text{(A ´´)} \quad \frac{\frac{\sqrt{2} \bullet 300 - \sqrt{2} \bullet x}{2}}{\frac{\sqrt{2} \bullet 300}{2}} = \frac{y}{150}$$

Dieses Ergebnis samt Doppelbruch links und Wurzeln mag einem nun schockierend schwierig erscheinen, aber 1. haben wir damit tatsächlich endlich unser Ziel (##) erreicht, y in Abhängigkeit von x auszudrücken (es kommen *nur noch* diese beiden Unbekannten vor), 2. läßt sich (A´´) rasend schnell vereinfachen, wie ja auch schon die gleichen Wurzeln und die gleichen Brüche (1/2) nahelegen:
als erstes schreiben wir um:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \bullet 300 - \sqrt{2} \bullet x\right)}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \bullet 300\right)} = \frac{y}{150}$$

Kürzen durch $\frac{1}{2}$ ergibt:

$$\frac{\sqrt{2} \bullet 300 - \sqrt{2} \bullet x}{\sqrt{2} \bullet 300} = \frac{y}{150}$$

Ausklammern der $\sqrt{2}$ im Bruch links oben mittels Distributivgesetz ergibt:

$$\frac{\sqrt{2}(300 - x)}{\sqrt{2} \bullet 300} = \frac{y}{150}$$

Kürzen durch $\sqrt{2}$ ergibt:

$$\frac{300 - x}{300} = \frac{y}{150} \qquad \text{(E)}$$

Es sei kurz eingefügt: höchst unpraktisch wäre es gewesen, schon in Gleichung (B) und (D) die $\sqrt{2}$ mittels Rechner in eine *Dezimalzahl* umzuwandeln: nicht nur, daß die Dezimalzahl gerundet wäre (und sich somit von Rechnung zu Rechnung immer schlimmere Fehler einschleichen könnten); sondern man würde auch garantiert übersehen, wie leicht die √2 durch Ausklammern und Kürzen wieder *rausfällt* - so daß nur natürliche Zahlen übrigbleiben.
Laut (##) war es unser Ziel, y in Abhängigkeit von x auszudrücken, also als y = Term mit x.
Dazu müssen wir (E) noch nach y auflösen, indem wir auf beiden Seiten mit 150 multiplizieren.
Es ergibt sich:

$$150 \bullet \frac{300 - x}{300} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{300 - x}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad 150 - 0{,}5\,x = y \qquad \text{(F)}$$

Das ist nach all den irrwitzigen Umwegen ein wunderhübsch einfaches Ergebnis - nur: was soll´s? Wieder muß man sich bewußt bleiben, was wir eigentlich vorhatten: laut (##) wollten wir eine Abhängigkeit zwischen y und x erreichen, die ja mit (F) nun endlich erreicht ist (und inetwa in einer der in [###] erwarteten Formen). Aber warum hatten wir diese Abhängigkeit überhaupt *gesucht*? Wir wollten das *Maximum des Quadervolumens* berechnen. Dessen Formel (#) konnten wir aber nicht ableiten, weil sie noch die *beiden* Varibalen x und y enthielt. Das können wir nun mittels (F) ändern, indem wir y ersetzen:

$$\begin{aligned} V &= x^2 \bullet (150 \quad - 0{,}5\,x) = \\ &= \quad 150\,x^2 - 0{,}5\,x^3 = \\ &= \quad - 0{,}5\,x^3 + 150\,x^2 \end{aligned}$$

Da nun endlich V *nur noch* von x abhängig ist, machen wir das wie üblich folgendermaßen deutlich:

$$V(\underline{x}) = \quad - 0{,}5\,x^3 + 150\,x^2$$

Weil darin aber nur noch die *einzige* Variable x vorkommt, ist es nun endlich zwecks Maximumsbestimmung ableitbar:

2b) Minimaxbestimmung mittels Ableitung

$$V'(x) = \quad - 1{,}5\,x^2 + 300\,x$$

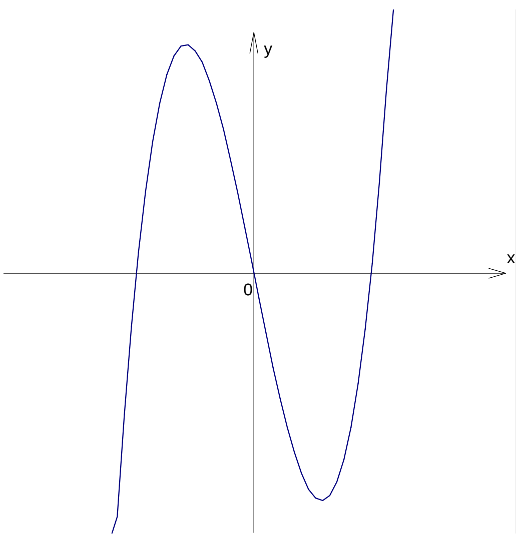
Als hinreichende Bedingung für ein Minimax überprüfen wir nun, wann (für welche x) das Null ist:

$$\begin{aligned} & - 1{,}5\,x^2 + 300\,x \overset{?}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (-1{,}5\,x + 300) \bullet x = 0 \end{aligned}$$

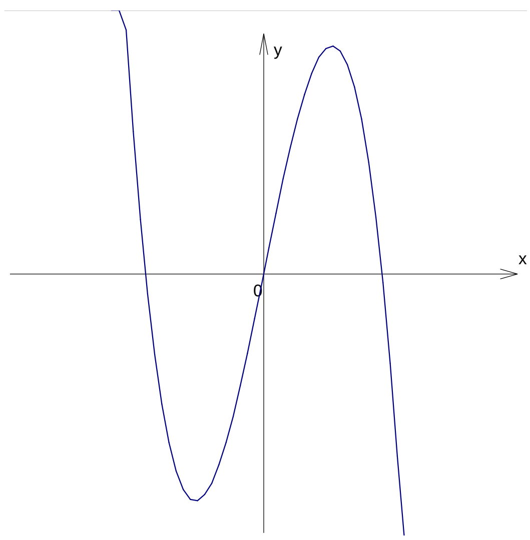
Nun ist ein Produkt gleich Null, wenn der 1. *oder* der 2. Faktor Null ist. Also:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & -1{,}5\,x + 300 = 0 \vee x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -1{,}5\,x = -300 \quad \vee x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \quad 200 \quad \vee x = 0 \end{aligned}$$

Nach Standardverfahren wäre nun mittels der *zweiten* Ableitung V´´(x) zu überprüfen, *ob* und *in welchem der beiden Fälle* (für x = 200 oder x = 0) ein Maximum auftritt. Wir gehen hier aber ausnahmsweise mal einen anderen, anschaulicheren Weg: für x = 0 hat der Quader keine Breite und Länge, ist also sein Volumen minimal (= 0). Was bleibt dann für x = 200 übrig? Da V(x) eine Funktion 3. Grades ist, *muß* für x = 200 ein Maximum vorliegen, denn wenn eine Funktion 3. Grades ein Minimum hat, muß sie auch ein Maximum haben:



bzw.



Bleibt noch y zu berechnen: aus (F) - eben der Gleichung, die x und y in Beziehung zueinander setzt - ergibt es sich schnell als 50.

3. Rückübersetzung in die Textaufgabe/Antwort auf die Frage

Halten wir also erstmal als bei Textaufgaben nötige *Antwort* fest: der gesuchte Quader maximalen Volumens hat die Länge und Breite x = 200 und die Höhe y = 75. Nicht gefragt, aber durchaus mittels (#) zu errechnen ist das Volumen V = 200 • 200 • 50 = 2 000 000.

4. Einige weitere Bemerkungen:

1. wie schon frühzeitig zu erahnen (*), ergeben sich für x und y tatsächlich *andere* Werte als in Aufgabe 3.
2. in der *zwei*dimensionalen Aufgabe 3 ergab sich eine *Halbierung* der Dreiecksseiten, hier im *Drei*dimensionalen ergibt sich eine „Drittelung“ (200 = $\frac{2}{3} \bullet$ 300; 50 = $\frac{1}{3} \bullet$ 150). Dimensionalität und Teilung scheinen direkt zusammenzuhängen. Aber warum? Womit wir beim 3. Problem sind:
3. Die 4. Aufgabe führt - mehr noch als die 3. - nach irrwitzigen Umwegen und Rechnungen zu erstaunlich einfachen, ganzzahligen Ergebnissen. Dabei lassen sich vielleicht alle *Einzel*schritte logisch verstehen und vielleicht auch *systematisch* angehen, aber es ist schlichtweg unmöglich, einen *Gesamt*überblick zu behalten, also z.B. auch „mitzuerleben“, wie sich c = 300 in x = 200 und h = 150 in y = 50 verwandelt (also die Drittelung zustande kommt). Dazu sind schlichtweg viel zu viele Nebenrechnugen und Randsätze (Strahlensatz, Pythagoras, „Zusammenschütten“ eines Gleichungssystems aus mehreren Gleichungen, Wurzelziehen und Eliminieren von Wurzeln, Bruchrechnung, Termumformungen, Ableitungsregel für ganzrationale Funktionen) nötig, als daß man noch anschaulich behalten könnte, *wie* sich die Zahlen dadurch schlängeln und (systematisch) verändern.

   Dieses Problem haben nicht nur Schwachmathiker, sondern selbst die besten Mathematiker können sowas nicht überblicken.

   Und das ist durchaus bezeichnend für die Mathematik: *Einzel*schritte sind überschaubar, das *Gesamt*verfahren aber nicht. Es *bleibt* durch und durch abstrakt. Das Ergebnis fällt dann am Ende einfach nur wie eine „Gottesgabe“ (oder ein Fluch) vom Himmel.

   Sowas hat schon der Philosoph Schopenhauer (und nicht nur „dumme“ Schüler) als geradezu hinterhältig und entwürdigend empfunden. Und hier scheiden sich eben die Geister: die einen (Nichtmathematiker) fühlen sich nurmehr erschlagen und vermissen alle Anschaulichkeit, die anderen (Mathematiker) haben nunmal an sowas ihren Spaß: sie reizt gerade die Abstraktheit, und Anschauung (oder gar Anwendbarkeit) ist ihnen eh herzhaft egal bzw. nur schöne Zugabe. Für sie ist Mathematik reine Ästhetik wie Musik, und sie können über solch ein feines Ergebnis „andächtig“ staunen - und stolz sein, wenn sie *selbst* es entdeckt haben.

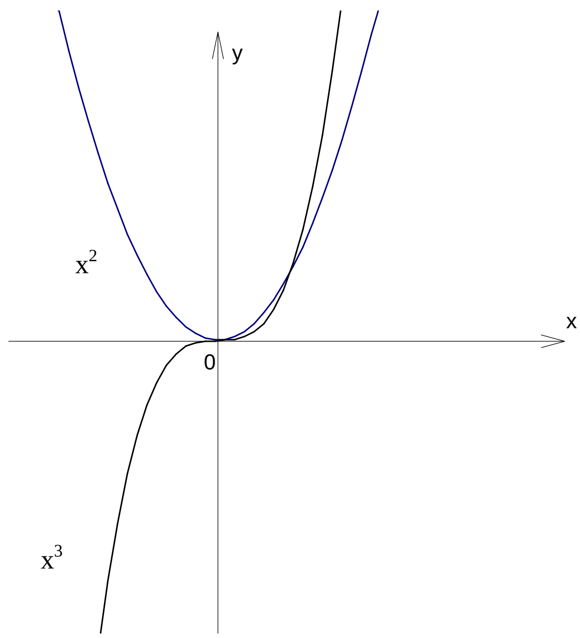
   Hinzu kommt, daß solche Abstraktheit nunmal - ob´s einem gefällt oder nicht - oftmals nicht vermeidbar ist: viele Erklärungen (z.B. in der Physik) *sind* nunmal nicht anschaulich faßbar, sondern ergeben sich nunmal nur mittels höchst abstrakter mathematischer Krücken (und bleiben auch immer nur mehr oder weniger gutes mathematische *Modell*). Ein Beispiel: ausschließlich mittels mathematischer Verfahren hat Einstein herausbekommen, daß sich das Weltall ausdehnen muß. Das konnte selbst Einstein anfangs nicht recht glauben - und nach eigener Aussage hat er´s auch nie anschaulich „verstanden“ (überhaupt hat sich kaum jemand so deutlich gegen mathematische Folgerungen gewehrt wie Einstein). Anfangs war Einstein sehr geneigt, einen Rechenfehler zu vermuten oder sogar an der Rechnung rumzumanipulieren (mittels einer willkürlich eingefügten Konstante dafür zu *sorgen*, daß *keine* Expansion des Weltalls rauskam). Letztlich aber blieb ihm nichts anderes, als das mathematische Ergebnis *anzuerkennen*.

Und mit seiner fast rein mathematischen, erstmal absurd klingenden Theorie konnte er Vorhersagen machen, die bald darauf durch Experimente bestätigt wurden, ja, einige astronomische Beobachtungen überhaupt erst erklären konnten.
Nun mag man denken: was geht uns Einstein an? Wie merkwürdig aber, daß er allüberall und völlig unumstritten als das größte Genie gehandelt wird - ohne daß man mehr als den *Namen* seiner „Relativitätstheorie“ kennt (nach der angeblich alles „schrecklich relativ“ ist).

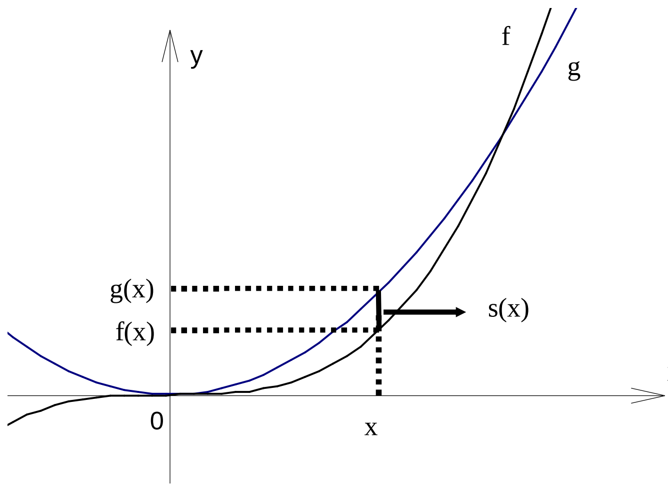
4. Zuguterletzt: daß in Aufgabe 3 und 4 solch einfache Ergebnisse rauskommen, ist eher die staunenswerte Ausnahme als die Regel. Nimmt man z.B. eine viel einfachere Aufgabe, ein Quadrat mit *ganz*zahligen Seitenlängen, so ergibt sich (nach simpler Pythagoras-Anwendung) die Diagonalenlänge unweigerlich als *irrational*. Umgekehrt: will man die Diagonale ganzzahlig haben, so muß man mit irrationalen Quadratseiten *anfangen*. Man hat also nur die Wahl zwischen einfachem Anfang und schwierigem Ende einerseits oder schwierigem Anfang und einfachem Ende andererseits. Anders geht´s nicht! Also nicht verzweifeln und das Ergebnis für garantiert falsch halten, wenn mal Wurzeln rauskommen. Zumal beispielsweise das Ergebnis $\sqrt{3}$ doch eine wunderhübsch einfache Zahl *ist* ($\sqrt{3} \bullet \sqrt{3} = 3$).

5. Aufgabe:

Wie sich überraschende (überraschend einfache) Ergebnisse ganz *übersichtlich* und *anschaulich* ergeben, wird an folgender Aufgabe (scheinbar) besser klar.
Aber einige Vorbemerkungen: wie anfangs schon angedeutet, ist es ein Hauptanwendungsgebiet der Mathematik/Algebra, natürliche Prozesse durch mathematische Funktionen wenn schon nicht vollständig zu erfassen, so doch hilfreich anzunähern (hilfreich, um Entscheidungen bzgl. der natürlichen Prozesse treffen zu können). Sowas mag nie exakt möglich sein, hat sich aber doch (insbesondere in der Physik) als erstaunlich genau erwiesen.
Aber selbst diese Modellierung natürlicher Prozesse ist oftmals schon erstaunlich schwierig, und deshalb versuchen wir´s hier doch wieder nur *inner*mathematisch. Dazu stellen wir uns mal besonders „dumm“ bzw. sagen: wir sind zu faul, mit der Funktion $f(x) = x^3$ zu rechnen, und ziehen es daher vor, mit der viel einfacheren Funktion $g(x) = x^2$ zu rechnen. Des weiteren sei uns immerhin aufgefallen, daß der Graph von f für $0 \le x \le 1$ alles in allem doch sehr ähnlich wie der Graph von g aussieht:



Gerade wegen der Ähnlichkeit auf dem Intervall [0|1] und unserer Faulheit liegt es nahe, g dort als Näherung von f zu benutzen. Und da fragt sich doch, wie groß der maximale Fehler ist, wenn wir f andauernd durch g ersetzen.
Der Fehler, parallel zur y-Achse gemessen, ist bei vorgegebenem x das Stückchen s(x) in folgender Zeichnung:



Wir können der Zeichnung entnehmen: $s(x) = g(x) - f(x) = x^2 - x^3$ bzw.
$s(x) = x^2 - x^3$
Die Frage war, *wann* (für welches x) dieser Fehler maximal ist und wie *groß* der Fehler dann ist. Dazu müssen wir mittels Ableitung das Maximum von s(x) bestimmen:

$$s(x) = x^2 - x^3$$

$$\Rightarrow \quad s'(x) = 2x - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2 - 3x) \bullet x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2 - 3x) = 0 \vee x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3} \vee x = 0$$

Es sei hier aus Platzgründen unbewiesen, daß bei $x = \frac{2}{3}$ tatsächlich das Maximum (und für x = 0 das Minimum) von s(x) vorliegt.

Den Fehler, wenn wir g durch f annähern, erhalten wir nun, wenn wir $x = \frac{2}{3}$ in s(x) einsetzen. Es ergibt sich:

$s(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3 = \frac{4}{27} = 0,\overline{148}$. Ob dieser Fehler von ca. $\frac{1}{7}$ nun hinnehmbar oder gefährlich verfälschend ist, ist einerseits (innermathematisch) Geschmackssache, andererseits von der benötigten Aussagegenauigkeit für ein außermathematisches Problem abhängig.

Viel interessanter ist aber, daß und wie der Exponent 2 von f zum Zähler und der Exponent 3 von g zum Nenner des Bruchs x wurde (und nebenbei: es läßt sich zeigen, daß z.B. bei der Annäherung von x^4 durch x^3 gleiches erfolgt, nämlich bei $x = \frac{3}{4}$ maximale Distanz vorliegt).

Wie die 3 bzw. 2 sich vom Ausgangsproblem zur Lösung durchzieht, ist in obigem Beispiel (vgl. die Pfeile) immer klar - und *doch nicht* so selbstverständlich: es liegt daran, daß beim *Ableiten* der ehemalige *Exponent* (2 bzw. 3) als *Koeffizient* vor das x wandert, und das *bleibt* doch arg erstaunlich, zumindest so lange, wie man nicht (mehr) weiß, *warum* das in der Ableitung geschah.

die andere Seite der Mathematik

Exponentialfunktionen: Defintion von e durch Ableitung und Limes

Gegeben sei also Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^x$. Auf diese Funktion soll zwecks Ableitung die Formel (#) angewandt werden:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^x - a^{x-h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x\left(1 - a^{-h}\right)}{h} =$$

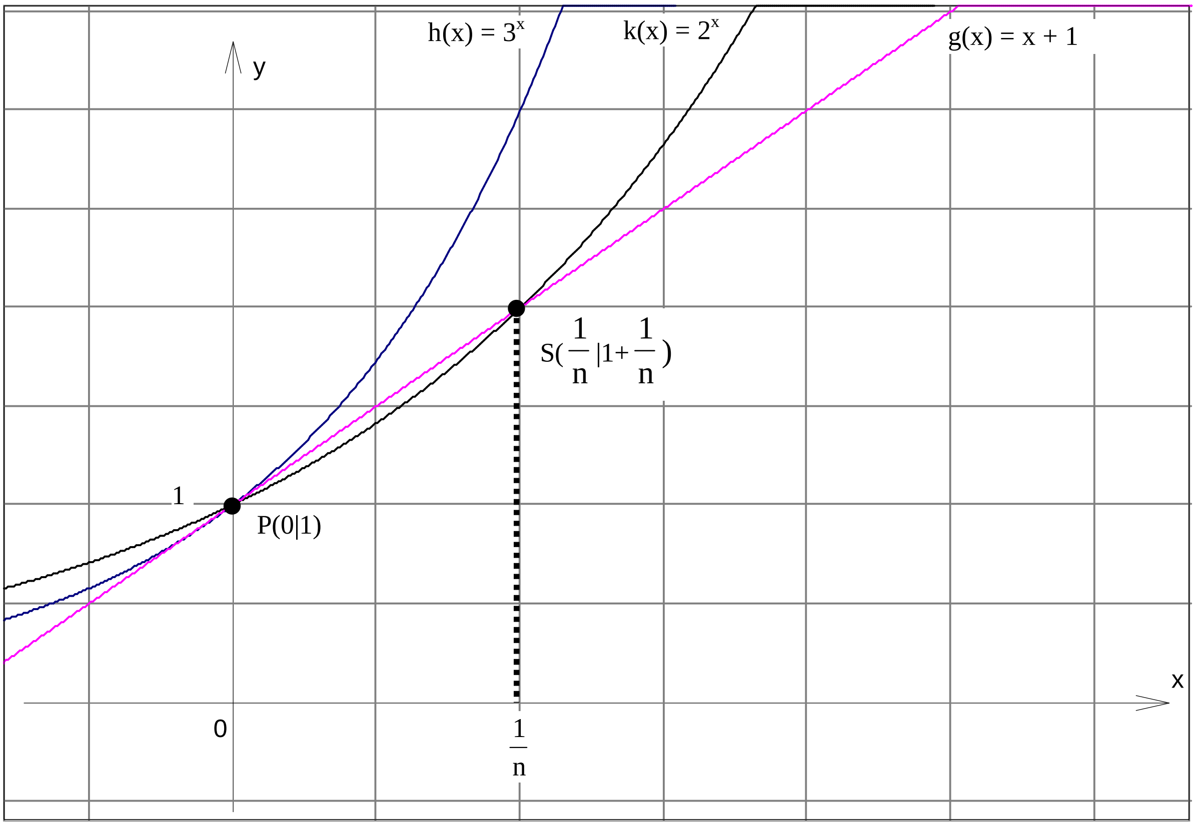
$$= a^x \bullet \lim_{h \to 0} \frac{1 - a^{-h}}{h} = a^x \bullet \lim_{h \to 0} \frac{a^0 - a^{0-h}}{h} = a^x \bullet f'(0)$$

Oder kurz:

$$\boxed{f(x) = a^x \Rightarrow f\,'(x) = a^x \bullet f\,'(0) \qquad (\#\#)}$$

Daran ist immerhin schon bemerkenswert, daß der Funktionsterm a^x in der Ableitung *identisch* wieder auftaucht. Ja, man kann sich sogar fragen, wann in der Ableitung *nur* der Funktionsterm a^x auftaucht, wann also $f\,'(0) = 1$ wird (man bedenke schonmal: wir hätten dann eine Funktion $f(x) = a^x$, für deren Ableitung gälte $f\,'(x) = a^x$, deren Ableitung also *komplett identisch* mit der Ausgangsfunktion wäre; was doch immerhin sehr *praktisch* wäre). Und genau diese Frage bringt uns auf mathematisch interessante Wege.
Es gibt noch einen weiteren Grund, $f\,'(0)$ rauswerfen bzw. gleich 1 setzen zu wollen. Für allgemeines $f(x) = a^x$ können wir zwar - wie oben geschehen - mit $f\,'(0)$ *hantieren*, es aber *nicht berechnen*.
Gesucht ist also eine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $f\,'(0) = 1$. Wir suchen also diejenige Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, die im Standardpunkt P(0|1) die Steigung 1 hat (eine Tangente mit der Steigung 1). Dazu machen wir dreierlei: wir zeichnen

1. die Gerade g: $y = x + 1$, die *durch P* geht und die *gesuchte* Steigung m = 1 hat
   (an diese Gerade müßte sich der Graph der gesuchten Funktion in P annähern!)
2. den Graphen der Funktion k mit der Funktionsgleichung $k(x) = 2^x$
3. den Graphen der Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = 3^x$



Nun sieht man sehr deutlich: $k(x) = 2^x$ ist in P im Vergleich mit g zu *flach*, $g(x) = 3^x$ ist zu *steil*. Einsichtig ist aber auch, daß es im kontinuierlichen Spektrum der Exponentialfunktionen eine Funktion $f(x) = e^x$ mit $2 < e < 3$ geben könnte, die sich in P an g anschmiegt bzw. da die Steigung 1 hat.

Um dieses e zu finden, betrachten wir nochmal exemplarisch den Nachteil des Graphen von $k(x) = 2^x$: der Funktionsgraph schmiegt sich nicht wie gewünscht an g an (mit *einzigem* Berührungspunkt P), sondern verläuft von P bis S *unterhalb* von g (und schneidet g *zweimal*, nämlich in P und S).

Machen wir uns zwischendurch kurz die Eigenschaften von S klar: S hat eine x-Koordinate, die wir aus Gründen, die später noch klar werden, als $\frac{1}{n}$ wählen. Als Schnittpunkt der Graphen von g und k liegt S insbesondere *auf g*. Dann muß für seine y-Koordinate Funktionswert von $\frac{1}{n}$ sein, also gelten: $y = g(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n}$. Für S gilt also: $S(\frac{1}{n} \mid 1 + \frac{1}{n})$.

Um nun diejenige Funktion $f(x) = e^x$ zu finden, die g in P wirklich nur (einmalig) *berührt*, verschieben wir - ähnlich wie bei der Herleitung der Ableitung - S auf g gegen P, indem wir $\frac{1}{n}$ gegen 0 gehen lassen (bzw. $n \to \infty$). Man mache sich klar: es ergibt sich jeweils eine *besondere* Exponentialfunktion $m(x) = a_n^x$, deren Graph durch P *und* S geht (a_n ergibt sich ja in von S bzw. $\frac{1}{n}$ bzw. n; deshalb der Index). $f(x) = e^x$ ist der *Grenzwert* dieser Funktionen.

Welche Exponentialfunktion m mit der Funktionsgleichung $m(x) = a_n^x$ geht denn nun durch den Punkt $S(\frac{1}{n} \mid 1 + \frac{1}{n})$? D.h. doch wohl, daß die *Koordinaten* von S die Funktionsgleichung von m erfüllen müssen, daß also gelten muß $1 + \frac{1}{n} = a_n^{\frac{1}{n}}$. Potenzieren auf beiden Seiten mit n ergibt: $(1 + \frac{1}{n})^n = a_n$.

Also geht die Funktion m mit der Funktionsgleichung $m(x) = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}\right)^x$ durch den Punkt $S(\frac{1}{n} \mid 1 + \frac{1}{n})$.

Nun können wir unser Vorhaben durchführen: wir lassen S gegen P wandern, d.h. $n \to 0$ bzw. $a_n \to e$.

Also gilt $e = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bzw. kurz

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Welchen *Zahlenwert* dieser Grenzwert e haben könnte, läßt sich immerhin erahnen, wenn man mal sehr große Zahlen für n einsetzt. Für n = 1000 ergibt sich $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}7169$, für n = 10000 ergibt sich $\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2{,}71814$, für n = 100000 ergibt sich $\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} \approx$ 2,71826,

Der Wert scheint sich also - wenn auch erst für sehr große n - irgendwo bei 2,718 zu stabilisieren.

Nun läßt sich zeigen (das sie hier nicht nachgewiesen):

1. e existiert tatsächlich eindeutig als Grenzwert
2. e ist eine *ir*rationale Zahl; daraus folgt: ein Zahlenwert kann *immer* nur annähernd, also mit $\approx$ angegeben werden.
3. $e \approx 2{,}718281$; in der Regel sollten 4 Stellen hinter dem Komma reichen, also $e \approx 2{,}7182$.

Der Zahlenwert für e findet sich auf dem Taschenrechner ein wenig kompliziert mit der Tastenfolge 1 ; INV; ln x.

Exponentialfunktionen: Ableitung der e-Funktion

Die gesuchte Exponentialfunktion mit der Steigung 1 in P(0|1) - also $f\,'(0) = 1$ - ist also $f(x) = e^x$. Diese Funktion wird auch einfach „e-Funktion“ genannt. Mit der oben hergeleiteten Formel folgt daraus:

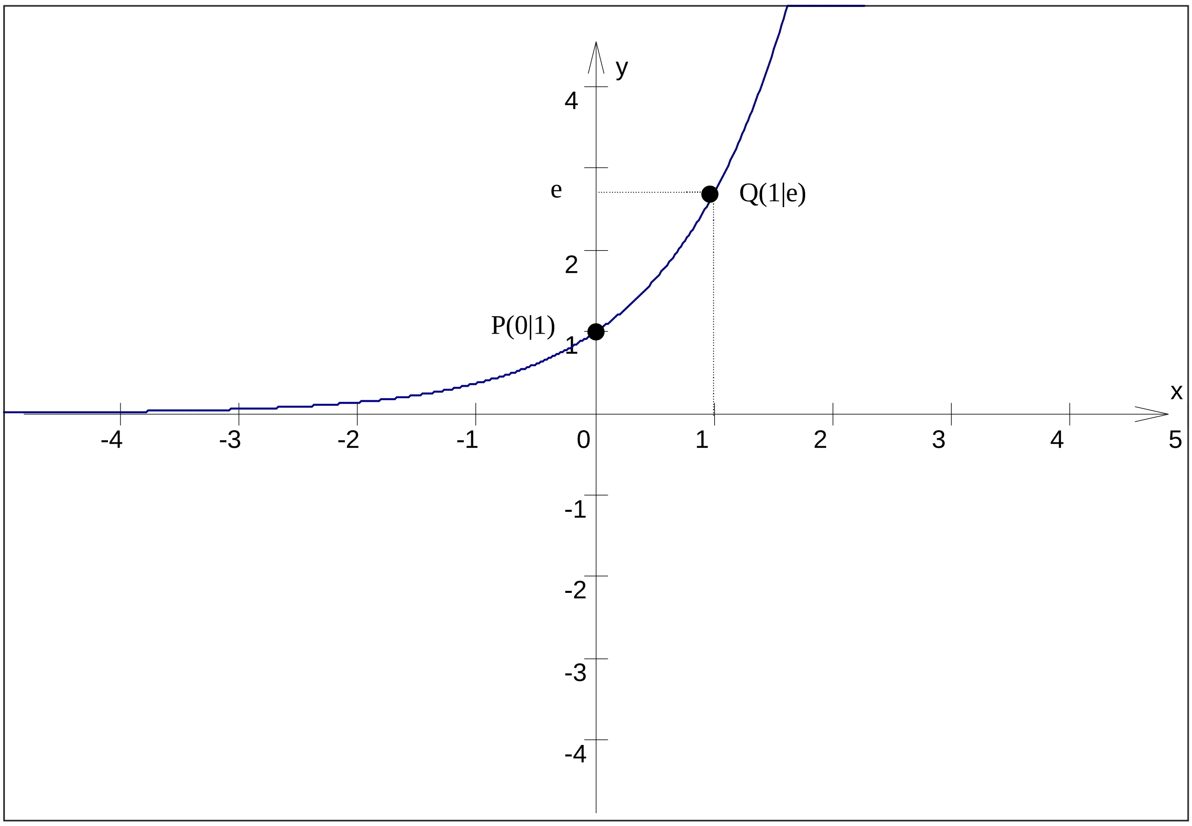
$f(x) = e^x \Rightarrow f\,'(x) = e^x$
Wir haben also mit der e-Funktion tatsächlich eine Exponentialfunktion gefunden, deren Ableitungsfunktion *identisch* mit der Ausgangsfunktion und somit besonders einfach zu finden ist.

Es läßt sich sogar beweisen (das sei hier nicht durchgeführt), daß die e-Funktion die *einzige* Funktion ist, die diese simple Eigenschaft hat.

Sofort mache man sich aber klar: mit dieser Ableitungseigenschaft unterscheidet sich die e-Funktion *fundamental* von den Potenzfunktionen. Also
1. niemals Potenzfunktionen wie die e-Funktion ableiten: ~~$f(x) = x^n \Rightarrow f\,'(x) = x^n$~~
2. niemals die e-Funktion wie Potenzfunktionen ableiten: ~~$f(x) = e^x \Rightarrow f\,'(x) = x \bullet e^{x-1}$~~
Gleiches gilt für das Finden der Stammfunktionen, also bei der *Integration*!

!

Der Graph der e-Funktion sieht folgendermaßen aus:



Man beachte dabei insbesondere
- die Standardpunkte P und Q,
- die asymptotische Annäherung an die x-Achse für $x \to -\infty$
- die Funktion ist streng monoton steigend

- beschreibt eine Linkskurve

Exponentialunktionen: Produkt- und Kettenregel

Im folgenden sei nun überlegt, wie kompliziertere Exponentialfunktionen abgeleitet werden, die durch Abwandlung der e-Funktion entstehen.

1. Möglichkeit: $f(x) = a \bullet e^x$. Konstanten vor einer Funktion werden aber in der Ableitung einfach übernommen. Also gilt $f´(x) = a \bullet$ (Ableitung von e^x) $= a \bullet e^x$
2. Möglichkeit: $f(x) = (3x + 2) \bullet e^x$
   Hier wird also der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion mit dem funktionsterm der e-Funktion multipliziert. Wir können auch definieren $g(x) = 3x + 2$ und $k(x) = e^x$. Dann gilt
   $$f(x) = g(x) \bullet k(x)$$
   Wie aber solch ein Produkt zweier Funktionen abgeleitet wird, dazu müssen wir uns einige besondere Gedanken machen.

$$f(x) = g(x) \bullet k(x) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{g(x) \bullet k(x)}^{f(x)} - \overbrace{g(x-h) \bullet k(x-h)}^{f(x-h)}}{h} \quad \text{(B)}$$

Dieser Bruchterm sei der Einfachheit halber erstmal ohne Limes betrachtet.
In diesem letzten Term kommen nun aber mehrere Teil-Terme vor, die wir entweder aus der Ableitung
$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x-h)}{h}$ von g oder aus der Ableitung $k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k(x) - k(x-h)}{h}$ von k kennen. Da liegt es nahe, den Term (B) gezielt so umzuformen, daß er auf die Terme aus $g´(x)$ und $k´(x)$ zurückführbar ist (denn man bedenke: wir können bereits g und k ableiten, nicht aber schon h). Das erreicht man durch eine gewisse tricky Umformung von (B) mittels zweier zusätzlicher, anfangs überflüssig scheinender Terme (im folgenden umrahmt), die so ergänzt werden, daß sie sich gegenseitig zu Null aufheben, also den Wert des Bruchs nicht verändern. Der Term (B) erhält dann die Form:

$$\frac{g(x) \bullet k(x) \boxed{- g(x-h) \bullet k(x) + g(x-h) \bullet k(x)} - g(x-h) \bullet k(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{g(x) \bullet k(x) - g(x-h) \bullet k(x)}{h} + \frac{g(x-h) \bullet k(x) - g(x-h) \bullet k(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{g(x) - g(x-h)}{h} \bullet k(x) \quad + \quad g(x-h) \bullet \frac{k(x) \bullet k(x-h)}{h}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \text{für } h \to 0$$

$$g´(x) \bullet k(x) + g(x) \bullet k´(x)$$

Daraus folgt: sind g und k ableitbare Funktionen, so ist auch die Produktfunktion f ableitbar, und es gilt:

Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot k(x)$ $\Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot k(x) + g(x) \cdot k'(x)$ (beachte: g(x) und k(x) sind die *unveränderten* Ausgangsfunktionen)

Damit können wir nun obige Funktion $f(x) = g(x) \bullet k(x)$ mit $g(x) = 3x + 2$ und $k(x) = e^x$,
also $g'(x) = 3$ und $k'(x) = e^x$
ableiten:

$$f(x) = (3x + 2) \bullet e^x = g(x) \bullet k(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = g'(x) \bullet k(x) + g(x) \bullet k'(x) =$$
$$= 3 \bullet e^x + (3x + 2) \bullet e^x = (3 + (3x + 2)) \bullet e^x = (3x + 5) \bullet e^x$$

3. Möglichkeit: $m(x) = e^{3x+2}$

Nun besteht der *Exponent* aus dem Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion, und die können wir bereits ableiten. Es liegt daher nahe, den Exponenten als *eigene* Funktion zu betrachten, und zwar als g mit $g(x) = 3x+2$. Die Basisfunktion bleibt die e-Funktion, die wir uns nur ausnahmsweise mit einer anderen Variable definieren: $f(z) = e^z$. Dann gilt

$$m(x) = f(z) = e^z \text{ mit } z = g(x) = 3x + 2$$
$$\Rightarrow m(x) = f(g(x)) \qquad \text{(A)}$$

Man spricht in solch einem Fall auch von einer „Verkettung von Funktionen“.
Anders gesagt: rechts wird auf x erst g angewandt (immer erst die innere Funktion!), und auf das Ergebnis z wird nochmals f angewandt.
Man kann sich das auch so vorstellen: ein Fleischstück x wird *erst gegrillt*, und das *Ergebnis* davon (z) wird *dann* flambiert. Merke: es kommt auf die *Reihenfolge* an: *erst* flambieren - also das Flambieren von rohem Fleisch - wäre doch eine arge Schweinerei! Und *gleichzeitiges* Flambieren und Braten wäre wohl auch ein bißchen kompliziert.
Entsprechend: angenommen, h ist definiert durch $m(x) = g(f(x))$ mit $f(x) = e^x$ und $g(z) = 3z + 2$. Dann ist

$$m(x) = g(z) = 3z + 2 \text{ mit } z = f(x) = e^x$$
$$\Rightarrow m(x) = 3 \bullet e^x + 2$$

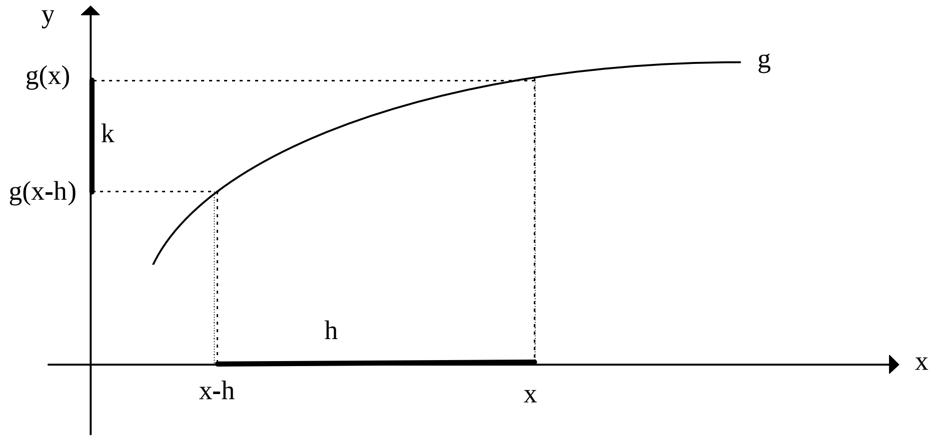
Und das ist offensichtlich eine ganz andere Funktion als die in (A).

Zur Ableitung einer verketteten Funktion wie $m(x) = f(g(x))$ - vgl. (A) - müssen wir uns nun aber erstmal einige grundsätzliche Gedanken machen. Es gilt:

$$m(x) = f(g(x)) \Rightarrow m'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(x) - m(x-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(g(x))}^{m(x)} - \overbrace{f(g(x-h))}^{m(x-h)}}{h} \qquad \text{(C)}$$

Wieder betrachten wir erstmal den Bruchterm *ohne* den Limes.
Schauen wir uns nun den Graphen der „inneren“ Funktion g mal genauer an:



Es sei also h = x - (x-h) und k = g(x) - g(x-h) $\Rightarrow$ g(x-h) = g(x) - k
Wie schon beim Beweis der Produktregel ergänzen wir nun (C) um zwei Terme, die sich auf den ersten Blick nur gegenseitig aufheben bzw. wegkürzen (umrahmt), also den Wert des Bruchs nicht verändern:

$$\frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(x-h)\big)}{h} = \frac{f\big(g(x)\big)-f\big(\overbrace{g(x-h)}^{g(x)\,-\,k}\big)}{\underbrace{\boxed{g(x)-g(x-h)}}_{k}} \bullet \frac{\boxed{g(x)-g(x-h)}}{h} =$$

$$= \frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(x)-k\big)}{k} \bullet \frac{g(x)-g(x-h)}{h}$$

Nun steht im ersten Bruch ungewohnterweise ein k statt eines h. Man mache sich aber an der Zeichnung oben klar: wenn h gegen 0 geht, geht auch k gegen 0. Es folgt

$$\frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(x)-k\big)}{k} \bullet \frac{g(x)-g(x-h)}{h}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \text{für } h \to 0 \;\Rightarrow k \to 0$$

$$f\,'(g(x)) \quad \bullet \quad g\,'(x)$$

Kettenregel: m(x) = f[g(x)] $\Rightarrow$ m'(x) = f '[g(x)] • g'(x) "äußere Ableitung" · "innere Ableitung [nur von g]"

Damit können wir nun auch obige Funktion m aus (A) mit f (z) = e^z und g (x) = 3x + 2,
also f ´(z) = e^z und g ´(x) = 3
ableiten:

$$m(x) = e^{3x+2} = f(g(x)) \Rightarrow m'(x) = f'[g(x)] \bullet g'(x) =$$
$$= \underbrace{e^{z}}_{z = g(x)} \bullet 3 = e^{3x+2} \bullet 3 = 3 \bullet e^{3x+2}$$

Oder einfacher ausgedrückt: die Funktion $m(x) = e^{3x + 2}$ ist aufgebaut wie zwei Pakete ineinander:

$m(x) = \boxed{e^{3x+2}}$ Und das wird nun folgendermaßen abgeleitet:

1. Ableitung der äußeren Funktion, also einer e-Funktion, wobei uns noch gar nicht interessiert, was *im* Exponenten, also im *inneren/gestrichelten* Kästchen steht. Die Ableitung einer e-Funktion ist aber wieder diese unveränderte Funktion. Halten wir also schonmal als „äußere“ Ableitung fest:

$$\boxed{e^{3x+2}}$$

2. Kommen wir damit zum inneren/gestrichelten Kästchen. Darin steht ein ganzrationaler Term, dessen „innere“ Ableitung

$$\boxed{3}$$

ist.

Die Kettenregel besagt nun schlichtweg, daß wir die äußere und innere Ableitung miteinander multiplizieren müssen:

$$m'(x) = e^{3x+2} \bullet 3$$

Ein weiteres Beispiel: $m(x) = \boxed{e^{-17x^3-5x^2+9}}$

Äußere Ableitung ist $\boxed{e^{-17x^3-5x^2+9}}$

Innere Ableitung ist $\boxed{(-3 \bullet 17x^2 - 2 \bullet 5x)}$

$= (-51x^2 - 10x)$

$\Rightarrow$ $m'(x) = e^{-17x^3-5x^2+9} \bullet (-51x^2 - 10x)$

> Merke: *Kompliziertere* Exponentialfunktionen haben - im Gegensatz zu e^x - also *nicht* sich selbst als Ableitung!

!

Exponentialfunktionen: die Integration der e-Funktion

$f(x) = e^x$ ist auch *Stammfunktion* zu sich selbst:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$$

denn $F'(x) = e^x = f(x)$.

$$f(x) = a \cdot e^{bx} \Rightarrow F(x) = \frac{a}{b} \cdot e^{bx}$$

denn $F'(x) = \frac{a}{b} \cdot b \cdot e^{bx} = a \cdot e^{bx} = f(x)$

Für kompliziertere Exponentialfunktionen gibt es zwar auch systematische Integrationsverfahren, die hier aber nicht entwickelt werden sollen. Üblicherweise wird dann (in Klausuren) die Stammfunktion *angegeben*, und man muß dann nur noch mittels der Ableitung *überprüfen*, ob gilt: $F\,'(x) = f(x)$

Auch für kompliziertere, aus ganzrationalen und e-Funktionen zusammengesetzte Funktionen gibt es glücklicherweise eine relativ einfache Integrationsregel:

ist $f(x) = g(x) \bullet e^{ax + b}$, wobei $g(x)$ eine ganzrationale Funktion *beliebigen* Grades und $ax + b$ im Exponenten der e-Funktion linear/*ersten* Grades ist, so hat die Stammfunktion F die Form $F(x) = k(x) \bullet e^{ax + b}$, also mit *demselben* Exponenten $ax + b$. $k(x)$ ist dabei eine ganzrationale Funktion *desselben Grades* wie $g(x)$.
Ist also z.B. $g(x)$ *linear*, so ist auch $k(x)$ *linear*, ist $g(x)$ *quadratisch*, so ist auch $k(x)$ *quadratisch* usw.

Vorsicht: die Regel gilt nur für *lineare* Exponenten der Form $ax + b$. **!**

Diese Regel macht es auf einem kleinen Umweg möglich, die Stammfunktion zu finden.

Beispiel:

gesucht sei die Stammfunktion F zu $f(x) = (x + 1)\, e^{1-x}$.

linear

Dann muß gelten: $F(x) = (a\,x + b)\, e^{1-x}$ mit $F\,'(x) = f(x)$.

$F\,'(x) = a \bullet e^{1-x} + (a\,x + b) \bullet (-1) \bullet e^{1-x} = [a - (a\,x + b)] \bullet e^{1-x} = (x + 1)\, e^{1-x}$ $|: e^{1-x} \neq 0$ (#)

$\Leftrightarrow\ a - (a\,x + b) = x + 1$

$\Leftrightarrow\ -a\,x + (a - b) = x + 1$

Koeffizientenvergleich

$\Leftrightarrow\ -a = 1 \wedge a - b = 1$

$\Leftrightarrow\ a = -1 \wedge b = -2$

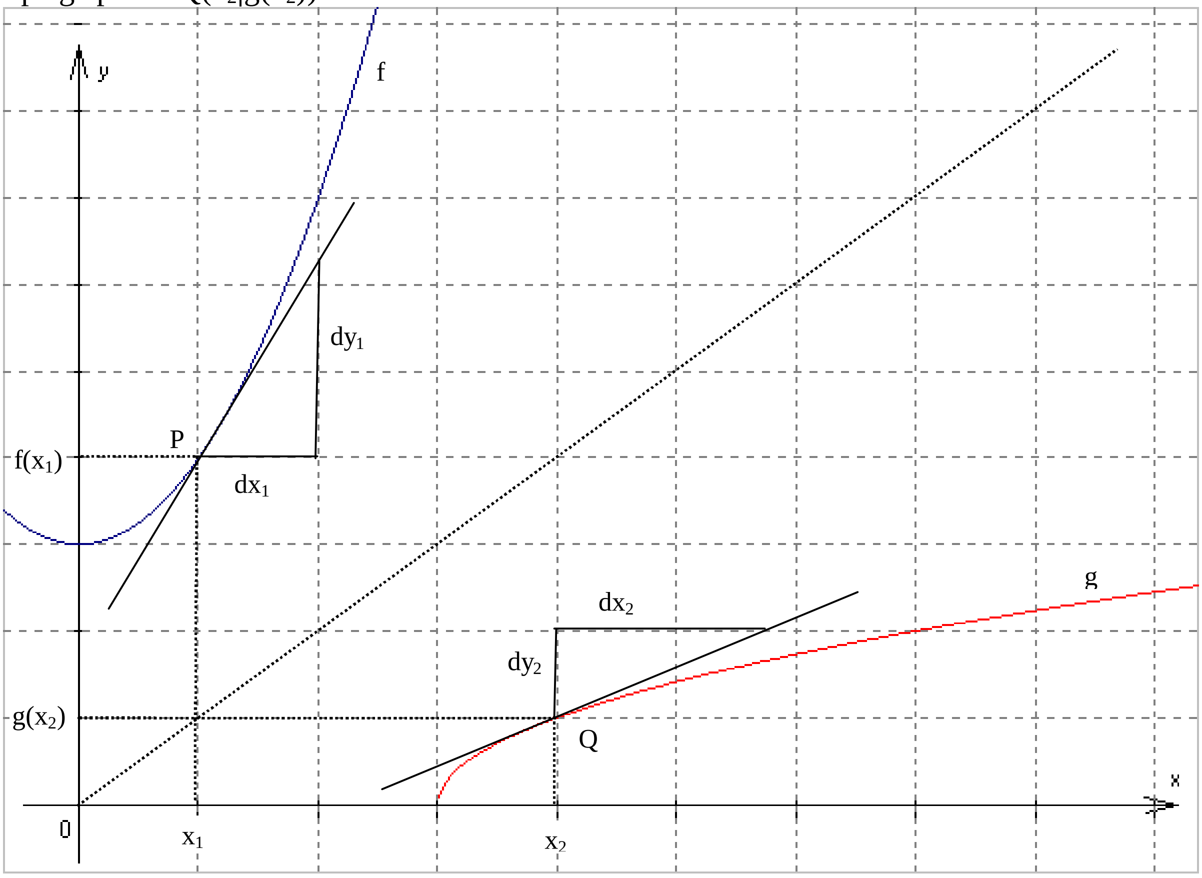
$\Rightarrow F(x) = (-x - 2) \bullet e^{1-x}$

Man beachte, worauf die einfache Findbarkeit und „Gleichartigkeit“ der Stammfunktion beruht: nämlich darauf, daß der Term $e^{h(x)}$ sich unverändert durch die Ableitung F ´(x) zieht und da komplett auszuklammern ist - und dann an der Stelle (#) rausfällt, weil er *genauso* in f(x) vorkommt.

Logarithmusfunktion: Ableitung der Umkehrfunktion

erster (allgemeinerer) Weg zur Umkehrfunktionsableitung:

Wir wissen, daß man den Graphen der Umkehrfunktion g(x) aus dem Graphen der Ausgangsfunktion f (x) erhalten kann, indem man letzteren an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten *spiegelt.*
Damit können wir aus f '(x) die Ableitung g'(x) berechnen: wir zeichnen beide Funktionen f und g in ein Koordinatensystem sowie die Tangenten an f in $P(x_1|f(x_1))$ und im Spiegelpunkt $Q(x_2|g(x_2))$:



Aufgrund der Spiegelung gilt offensichtlich:

$$x_1 = g(x_2) \qquad (A)$$

Durch das Steigungsdreieck der Tangente in P ergibt sich

$$f'(x_1) = \frac{dy_1}{dx_1} \qquad (B)$$

Analog folgt mit dem Steigungsdreieck der Tangente in Q, daß

$$g'(x_2) = \frac{dy_2}{dx_2} \qquad (C)$$

Aufgrund der Spiegelung ist auch

$$dy_2 = dx_1 \qquad (D)$$

$$dx_2 = dy_1 \qquad (E)$$

Damit aber ergibt sich:

$$g'(x) \underset{(C)}{=} \frac{dy_2}{dx_2} \underset{(D,E)}{=} \frac{dx_1}{dy_1} = \frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}} \underset{(B)}{=} \frac{1}{f'(x_1)} \underset{(A)}{=} \frac{1}{f'(g[x_2])}$$

Indem wir jetzt statt x_2 nur noch x schreiben, erhalten wir für die

> Ableitung der Umkehrfunktion g zur Ausgangsfunktion f:
> $$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]} \qquad (\#)$$

Beispiel: sei $f(x) = x^2$. Dann ist $g(x) = \sqrt{x}$ die zugehörige Umkehrfunktion. Wir wissen, daß $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$ ist, also ist $f'(g(x)) = 2 \bullet [g(x)] = 2\sqrt{x}$. Nach unserer neuen Formel (#) ist also $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Probe: $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Das konnten wir aber schon früher ableiten:

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Insbesondere folgt für den natürlichen Logarithmus:

> $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

(das wäre mittels des Satzes über Umkehrfunktionenableitung aus (A) erhältlich, denn ln x ist die Umkehrfunktion zu e^x)

zweiter Weg/einfachere Alternative zur Umkehrfunktionsableitung:

Zur Erinnerung: die Umkehrfunktion zu einer *Exponential*funktion ist immer eine *Logarithmus*funktion. In unserem Fall gilt: Umkehrfunktion zu $h(x) = e^x$ ist $f(x) = \log_e x = \ln x$. Das heißt insbesondere:

$$\ln(e^x) = x \quad (\#),$$

da der Logarithmus die e-Funktion rückgängig macht.
Nun wollen wir auch die Umkehrfunktion $f(x) = \ln x$ ableiten können. Es liegt nahe, dies aus der Ableitung der e-Funktion herzuleiten. Dazu benutzen wir folgenden Trick:
Gesucht ist die Ableitung von $f(x) = \ln x$. Wir ersetzen x für eine gewisse Zeit durch e^z und erhalten damit:

$$f(x) = \ln x = \ln(e^z) \underset{(\#)}{=} z.$$

Wenn wir dabei $j(u) = \ln u$ und $g(z) = e^z$ definieren, so können wir die *Ketten*regel anwenden:

$$f(x) = \ln(e^z) = j\,[g(z)] \qquad = z$$
$$\Rightarrow f'(x) = \qquad j'[g(z)] \bullet g'(z) = 1$$

$$\begin{array}{llll} & \text{KR} & \text{Abl. der Pot-Fkt. z} & \\ \Rightarrow f'(x) = & \ln'[\,e^z\,] \cdot & e^z & = 1 \quad |: e^z \\ \Rightarrow & \ln'[\,e^z\,] & & = \frac{1}{e^z} \end{array}$$

Wenn wir jetzt wieder x statt e^z schreiben, so erhalten wir

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

und somit insgesamt:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Logarithmusfunktion: Integration

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x$$

denn $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$
(B)

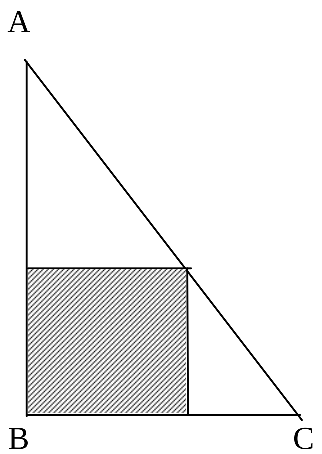
Das ist bemerkenswert, denn mit dem Integrationsverfahren für ganzrationale Funktionen ergäbe sich der Blödsinn

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{(-1+1)} x^{-1+1} = \frac{1}{0} x^0$$

(durch Null aber darf man bekanntlich nicht teilen).

Flächenmaximierung

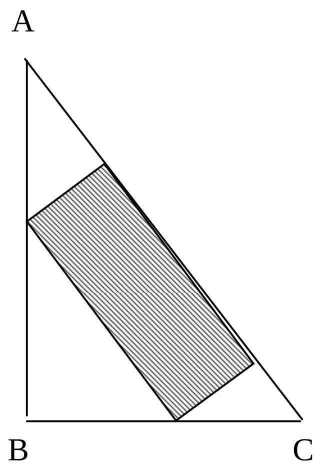
Welches der in folgender Art in das rechtwinklige Dreieck ABC eingezeichneten Rechtecke hat die maximale Fläche?



(*)

Wie so oft, auch hier eine *Anwendungmöglichkeit* eher an den Haaren herbeigezogen – aber doch *vorstellbar*: von einer großen Glasscheibe ist das Dreieck ABC übrig geblieben, aus dem nun ein möglichst großes Rechteck ausgeschnitten werden soll.
Nur sieht man hier, wie doppelt blödsinnig solch eine “Anwendungsmöglichkeit” ist: erstens bleiben beim Glaser aus gutem Grund kaum je *dreieckige* Scheiben über, zweitens würde ein Glaser dann nicht zur Maximumsberechnung schreiten (wenn er es überhaupt könnte; und man *muß* es nicht können), sondern nach *Augenmaß* die annähernd *maximale* Rechtecksfläche ausschneiden: ein intuitives Verständnis dafür hat er nämlich allemal.

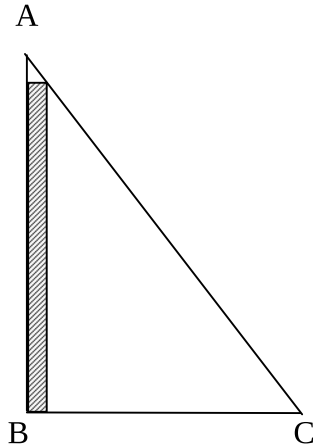
Den Fall, daß wie folgt ganz *anders* ausgeschnitten wird



und sich eventuell *dabei* das Rechteck mit maximaler Fläche ergibt, möchte ich hier allerdings nicht näher behandeln.

Nun könnte man ja fragen, ob nicht *alle* derart eingezeichneten Rechtecke *gleich groß* sind und es deshalb kein *größtes* gäbe.
Machen wir uns daher neben dem oben gewählten Rechteck noch andere Möglichkeiten klar:

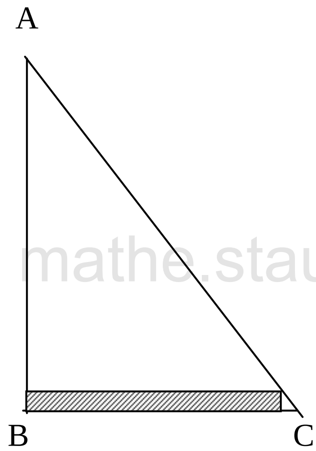
1. Möglichkeit: wir wählen die Grundseite des Rechtecks sehr *schmal*. Dann wird das Rechteck zwar besonders *hoch*, seine Fläche wird aber offensichtlich dennoch (im Vergleich mit dem Fall *) sehr *klein*:



(**)

Noch deutlicher: wenn wir ein *besonders schmales* Rechteck der Grundseite x = 0 wählen, wird auch dessen Fläche gleich 0, also so *minimal*, wie überhaupt nur möglich (genau genommen entsteht nichtmal mehr ein Rechteck, sondern nur noch ein Strich).

2. Möglichkeit: wir wählen die Grundseite des Rechtecks sehr *breit*. Dann wird das Rechteck besonders *flach*, und seine Fläche wird offensichtlich (im Vergleich mit dem Fall *) sehr *klein*:



(***)

Und wenn wir ein *besonders breites* Rechteck mit der Grundseite $x = \overline{BC}$ wählen, wird die Rechtecksfläche wieder gleich 0also so *minimal*, wie überhaupt nur möglich (genau genommen entsteht auch hier kein Rechteck mehr, sondern nur noch ein Strich).

Wenn aber die Rechtecke in (**) und (***) *kleiner* als das in (*) sind, ist das in (*) zwar noch nicht eindeutig das *größte*, aber offensichtlich gibt es *verschieden große* Rechtecke. Nun können die Rechtecke aber nicht *beliebig groß* werden (Obergrenze ist allemal die Fläche des *Dreieecks*), und deshalb muß es *ein* oder *mehrere größte* Rechtecke geben.

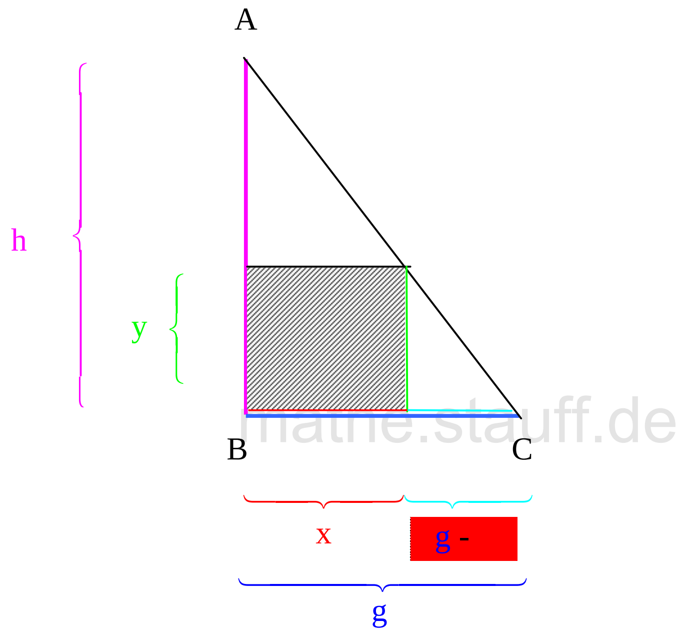
Das Flächenmaximum wird vermutlich „irgendwo” zwischen den Randextremen (Rechtecksgrundseite = 0 $\Rightarrow$ Rechtecksfläche = 0; Rechtecksgrundseite = $\overline{BC} \Rightarrow$ Rechtecksfläche = 0) liegen. Aber wo *genau*?

Wir werden da rechnerisch eine erstaunlich *einfache* Lösung finden. So erstaunlich, daß wir uns nach der Rechnung fragen werden, ob man diese Lösung nicht auch ganz *ohne* Rechnung und nur elementargeometrisch, d.h. anschaulich hätte voraussehen können.

Um diese(s) flächenmäßig größte(n) Rechteck(e) zu finden, benutzen wir als Planskizze wieder die aus (*).

Planskizze heißt, daß wir das bereits eingezeichnete Rechteck nur benutzen, um eine *Vorstellung* zu gewinnen, *nicht* aber seine *konkreten Maße*. Die konkreten Maße dürfen wir nämlich noch nicht benutzen, weil wir ja noch gar nicht wissen, ob das Rechteck in (*) *tatsächlich* das flächenmäßig größte ist. Bzw. wenn wir die (eventuell falsche) Tatsache *voraussetzen* würden, daß wir in (*) durch puren Zufall bereits das flächenmäßig größte Rechteck gefunden hätten, so würden wir daraus eventuell auch falsche *Folgerungen* ziehen bzw. nur die von Anfang an falsche Tatsache immer wieder fälschlich bestätigen.
Man achte also im folgenden mal darauf, ob wir tatsächlich nie die *konkreten Maße* des Rechtecks aus (*) benutzen. Nur wenn wir sie *nie* benutzen, gelten alle Folgerungen auch für alle *anderen* möglichen Rechtecke.

Anhand der Zeichnung (*) sollen nun auch eindeutige Bezeichnungen (und Farben) definiert werden, damit wir eindeutig *rechnen* und uns besser *verständigen* können.



(*)

Wegen der Parallelität von h und y und der beiden Strahlen $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ läßt sich nun aber der *Strahlensatz* anwenden:

$$\frac{g - x}{y} = \frac{g}{h}$$

Nun, da die Gleichung steht, brauchen wir ihre Elemente nicht mehr am Dreieck wiederzuerkennen, und deshalb lasse ich ab jetzt der Einfachheit halber die Farben weg:

$$\frac{g - x}{y} = \frac{g}{h} \qquad \text{(C)}$$

Wie immer bei Gleichungen mit x und y hätten wir gerne y in *Abhängigkeit* von x, also y = ...
Dazu multiplizieren wir erst auf beiden Seiten mit y und erhalten:

$$g - x = y \bullet \frac{g}{h} \quad | : \frac{g}{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad (g-x) : \frac{g}{h} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad (g-x) \bullet \frac{h}{g} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad g \bullet \frac{h}{g} - x \bullet \frac{h}{g} = y \qquad \text{(D)}$$

$$\Leftrightarrow \quad h \quad - \frac{h}{g} \bullet x = y \qquad \text{(A)}$$

Unser Ziel, bei vorgegebener Grundseite g und Höhe h des Dreiecks das y (die Höhe des Rechtecks) in *Abhängigkeit* von x (der Breite des Rechtsecks) zu erhalten, ist damit erreicht.
Daß solche Abhängigkeit überhaupt *möglich* ist, sollte einen nicht erstaunen. Wir hatten schon oben in den Fällen (*), (**) und (***) gesehen, daß x und y voneinander *abhängig* sind, nämlich y immer *größer* (kleiner) wird, je *kleiner* (größer) y ist.

Wir wollten herausfinden, wann die Rechteckfläche F_R maximal ist. Dazu müssen wir sie aber erstmal berechnen:

$$F_R = x \bullet \underbrace{y}_{\text{(A)}} =$$

$$= x \bullet \left(h - \frac{h}{g} \bullet x \right) =$$

$$= h\,x \quad - \frac{h}{g} \bullet x^2$$

Die Rechtecksfläche ist jetzt nicht mehr von *y*, sondern nur noch (bei fest vorgegebenen g und h) von *x* abhängig, und daher können wir sie als *Funktion von x* schreiben:

$$F_R(x) = h\,x \quad - \frac{h}{g} \bullet x^2$$

Um herauszubekommen, wann die Rechtecksfläche maximal wird, müssen wir die Funktion *ableiten* und die Ableitung dann gleich *Null* setzen:

$$F_R{}'(x) = h - 2\frac{h}{g}x = 0 \qquad \Big| + 2\frac{h}{g}x \qquad \text{(F)}$$

$$\Leftrightarrow h = 2\frac{h}{g}x \qquad | : h \qquad \text{(E)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{g}\,x \qquad \Big| : \frac{2}{g}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{g}{2} = x}$$

Das Ergebnis ist erstaunlich einfach: das Rechteck wird genau dann maximal, wenn die Grundseite x des Rechtecks exakt *halb so lang* wie die Grundseite g des Dreiecks ist.

(Die standardmäßige 2. Ableitung zur Überprüfung, ob für dieses x nun ein *Maximum* oder *Minimum* vorliegt, sparen wir uns aus gutem Grund: „in der Mitte" *kann* überhaupt kein *Minimum* vorliegen, da – wie oben gesehen – Minima nur an den *Seiten*, also für x = 0 oder $x = \overline{BC}$, vorliegen.)

Da Ergebnis $x = \frac{g}{2}$ zeigt, daß es nicht (wie anfangs immerhin doch denkbar) *mehrere*, sondern nur *ein* Maximum gibt.

An $x = \frac{g}{2}$ ist noch etwas anderes bemerkenswert: daß da nämlich auch die *Höhe h des Dreiecks* gar nicht mehr vorkommt: egal, wie hoch das Dreieck ist, maximale Fläche hat immer das Rechteck mit $x = \frac{g}{2}$. D.h. aber natürlich schon allein anschaulich *nicht*, daß bei *verschiedener* Dreieckshöhe das maximale Rechteck *unverändert* hoch, also y immer *gleich* ist.

Wie groß ist denn nun y, wenn $x = \frac{g}{2}$ ist?

Wir setzen $x = \frac{g}{2}$ in die Gleichung (A) ein:

$$h - \frac{h}{g} \bullet x = y$$

$$h - \frac{h}{g} \bullet \frac{g}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad h - \frac{h}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h}{2} = y$$

(das ließe sich unter der Voraussetzung $x = \frac{g}{2}$ nebenbei über Kongruenzsätze auch *geometrisch* beweisen)

Im Fall des maximalen Rechtecks ist also *nicht nur* $x = \frac{g}{2}$, sondern automatisch *auch* gleichzeitig $y = \frac{h}{2}$.

Eingefügt sei „typische Mathematik": wir wissen jetzt, *wann* die Rechtecksfläche maximal wird (eben für $x = \frac{g}{2}$), aber es interessiert laut Aufgabenstellung überhaupt nicht, wie *groß* sie dann ist. Das ließe sich durch Einsetzen von $x = \frac{g}{2}$ und $y = \frac{h}{2}$ in $F_R = x \bullet y$ aber leicht berechnen: $F_R = \frac{g}{2} \bullet \frac{h}{2} = \frac{g \bullet h}{4} = \frac{\boxed{\frac{g \bullet h}{2}}}{2}$. Nun ist aber $\boxed{\frac{g \bullet h}{2}}$ die Dreiecksfläche, so daß sich ergibt: F_R ist maximal, wenn das Rechteck genau die *halbe* Fläche des Dreiecks hat, was sich nebenbei aus $x = \frac{g}{2}$ auch elementargeometrisch mittels Kongruenz zeigen ließe.

Es hatte sich (wie oft in Mathematikaufgaben) nach ellenlanger und gar nicht so einfacher *Rechnung* ganz am Ende doch das erstaunlich einfache *Ergebnis* $x = \frac{g}{2}$ ergeben. Wie konnte das passieren, warum verschwand alles Komplizierte?
Nun kann kein Mensch die *gesamte* Rechnung überblicken (das ist ja gerade das „Hinterhältige" und gleichzeitig so Erstaunliche an Mathematik), aber man kann doch die Einfachheit *zurück*verfolgen. Es lag daran, daß h in (E) „rausflog". Verfolgen wir also das h mal zurück (oben rot umrandet). Es lag also ursprünglich an der Gleichung

$$\frac{g - x}{y} = \frac{g}{h} \qquad \text{(C)},$$

in der h im Gegensatz zu g nur auf *einer* (der rechten) Seite vorkam. Daraus aber folgt, daß h ab (D) in *allen* Termen auf der linken Gleichungsseite vorkam und sich daher in (E) *wegdividieren* ließ.

Und woher stammt die so hübsch einfache 2 in $x = \frac{g}{2}$? Offensichtlich aus der *Ableitung* in (F). Und daß diese Ableitung so simpel funktioniert [$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$], *ist* und *bleibt* für mich ebenso abstrakt *theoretisch* wie *bewundernswert*! Die Ableitung von Potenzfunktionen der Form $y = x^n$ – und daß sie so simpel funktioniert - *ist* und *bleibt* für mich trotz aller „Beweise" doch eine phantastische und letztlich unzugängliche Sache, also ein *Wunder*!

Die Wege, wie sich das *Einfache* ergibt, sind also *rechnerisch* ausgesprochen *kompliziert*. Um so mehr erstaunt es, daß die Rechtecksfläche genau dann maximal ist, wenn x so simpel $\frac{g}{2}$ ist.

Hätte man das nicht eben *doch* vorausahnen können?

Erinnern wir uns: wir hatten oben gesagt:

> „das Flächenmaximum wird vermutlich »irgendwo« zwischen den Randextremen (Rechtecksgrundseite = 0 $\Rightarrow$ Fläche = 0; Rechtecksgrundseite = $\overline{BC} \Rightarrow$ Fläche = 0) liegen."

War es da nicht eben doch *von Anfang an* naheliegend, unter „irgendwo" „*genau in der Mitte*, also bei $x = \frac{g}{2}$" zu verstehen?
Mag sein, daß es Leute gibt, deren Veranschaulichungsvermögen so groß ist, daß sie das auf Anhieb sehen (und auch *begründen* können). *Ich* habe es beim ersten Lösungsversuch der Aufgabe *nicht* auf Anhieb gesehen – vielleicht gerade *weil* ich Mathematiker bin:

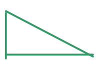
1. sind Mathematiker ja oft betriebsblind: wenn sie „maximal” hören, fangen sie sofort mit der (rechnerischen) *Ableitung* an, ohne überhaupt noch zu überlegen, ob das auch *einfacher* geht;
2. wäre für einen Mathematiker $\frac{2}{3}$ oder $\frac{4}{5}$ (also ein einfaches *ganzzahliges* Verhältnis) ein fast *ebenso* staunenswertes Ergebnis wie $\frac{1}{2}$; denn Mathematiker sind es umgekehrt (wie z.B. bei der Diagonalen im Quadrat) gewohnt, daß aus einer ganz *einfachen* Aufgabenstellung ein sehr *kompliziertes* Ergebnis folgt;
3. war ja nicht vorausgesetzt worden, daß das gegebene Dreieck *gleichseitig*, also g = h ist (im *gleichseitigen* Fall wäre die Antwort $x = \frac{g}{2}$ *sowieso* gleich klar gewesen). Als Mathematiker würde man fast vermuten, daß sich das Verhältnis von g zu h „irgendwie” auf das Rechteck überträgt: angenommen mal, g ist *drei*mal so lang wie h. Dann wäre es doch immerhin *denkbar*, daß diese 3 auch in das x eingeht, sich also beispielsweise für $x = \frac{g}{3}$ das maximale Rechteck ergäbe. Und wenn g *vier*mal so lang wie h wäre, könnte man vermuten, daß sich für $x = \frac{g}{4}$ das maximale Rechteck ergäbe. Das wäre doch immerhin eine schöne *andere* (wen auch – wie gezeigt – falsche) Regel: $g = n \bullet h \Rightarrow x = \frac{g}{n}$.

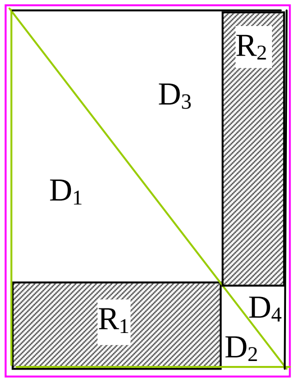
Ich muß gestehen, daß es mich doch schwer fuchsen würde, wenn ich nur auf ellenlangem *Umweg* zum einfachen Ergebnis $x = \frac{g}{2}$ kommen konnte, es aber eine viel *simplere* Erklärung gäbe – und gar eine ohne *alle* oder zumindest ohne *viel* Mathematik (s.o. Strahlensatz, Ableitung, Gleichungs- und Termumformungen, Bruchrechenregeln; und es sei doch anerkannt, wie viel Schüler *gleichzeitig* beherrschen müssen, die obige Aufgabe rechnerisch lösen sollen).

Man sollte es bei den doch so „um die Ecke gedachten” Aufgaben der Mathematiker kaum glauben, aber sie suchen aufgrund des „Faulheitsprinzips” immer nicht nur nach „irgendeinem”, sondern – wenn sie überhaupt erstmal „irgendeinen” haben – nach dem *kürzesten*, *anschaulichsten*, *ästhetischsten* (was oft heißt: einfachsten) Beweis, so daß es für einige Sachverhalte wie z.B. den Satz des Pythagoras *hunderte* von Beweisen gibt, die letztlich nur *neu* beweisen, was *sowieso schon* längst bewiesen ist.
Die Suche nach den *einfachsten*, *anschaulichsten* Beweisen liegt auch darin begründet, daß viele *kompliziertere* Beweise zwar Schritt für Schritt *logisch*, also *richtig*, aber selbst für einen Mathematiker nicht mehr vollends *überschaubar*, also wirklich *überzeugend* sind.

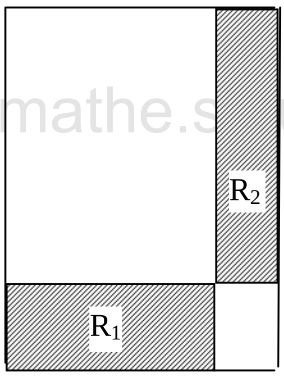
Nun habe ich lange nach elementargeometrischen Erklärungen *gesucht* und auch eine *gefunden*, die mir aber letztlich noch nicht einfach genug ist (was mich an ihr stört, werde ich am Ende erklären). Ich wäre also allemal dankbar, wenn mir jemand eine noch *einfachere*, *suggestiver-elementargeometrische* Lösung aufweisen könnte.
Manchmal vermute ich halt, daß ein unverdorbener Nicht-Mathematiker das ganze Problem viel *einfacher* erkären könnte und sich über die mathematischen Bemühungen totlachen würde.

Hier mein Lösungsversuch:

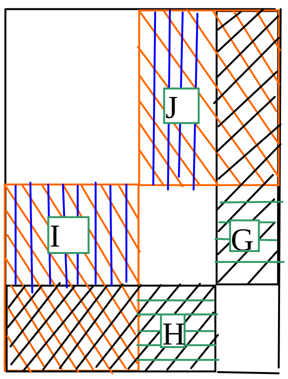
wir verdoppeln das Dreieck  zum Rechteck  :



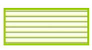
Wegen der Kongruenz von D_1 und D_3 gilt: $D_1 = D_3$ (der Einfachheit halber verzichte ich ab hier mal auf die Unterscheidung zwischen geometrischer *Figur* und ihrer *Fläche*).
Wegen der Kongruenz von D_2 und D_4 gilt: $D_2 = D_4$
Also gilt $D_1 + D_2 = D_3 + D_4$
Daraus folgt: R_1 (Dreieck links unten – D_1 – D_2) = R_2 (Dreieck rechts oben – D_3 – D_4)
Daraus folgt: R_1 wird maximal, wenn auch $R_1 + R_2$ maximal wird:

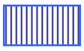


Vergleichen wir nun mal *beliebige* Rechtecke R_1 *und* R_2  mit den laut obiger Rechnung *maximalen* Rechtecken  (also für $x = \frac{g}{2}$):



Nun lassen sich Zuwachs und Verlust vergleichen:

 ist um  größer als 

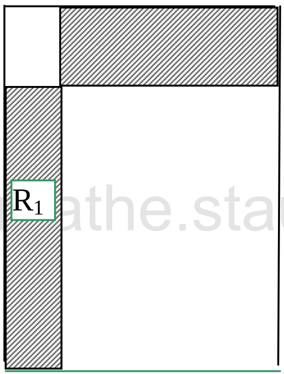
 ist um  kleiner als 

Weil nun aber

1. J größer als H ist (denn beide haben dieselbe Breite, J hat aber eine größere Höhe als H; denn die Höhe von J ist $\frac{h}{2}$, und damit bleibt für die Höhe von H nur noch ein Wert, der *kleiner* als $\frac{h}{2}$ ist)
2. I größer als G ist (denn beide haben dieselbe Höhe, I hat aber eine größere Breite als G; denn die Breite von I ist $\frac{g}{2}$, und damit bleibt für die Breite von G nur noch ein Wert, der *kleiner* als $\frac{g}{2}$ ist) ,

ist  größer als , insgesamt also  größer als .

Dasselbe „Gedankenexperiment" ließe sich genauso für den Fall

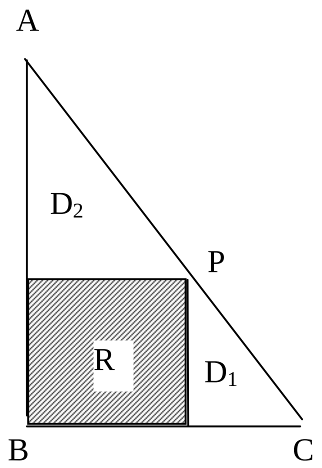


(daß also die Breite x des Rechtecks R_1 zu *klein* statt wie eben noch zu groß ist) wiederholen.

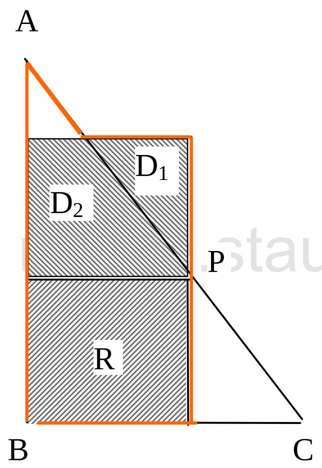
All diese Überlegungen haben aber drei Nachteile, die mir die Lösung noch allzu weit von einer *anschaulich-elementar*geometrischen entfernen:

1. habe ich offensichtlich ellenlange und viele Umwege gebraucht, um zu einer Erklärung zu kommen;
2. ist in meiner „Lösung" der Umweg über die *Verdopplung* auf ein (letztlich einfacheres) *Rechteck* nötig, der (wie viele „Hilfslinien") für einen *Mathematiker* zwar aus verschiedensten Gründen naheliegend ist, auf den ein *Laie* aber vermutlich kaum kommen würde (wieso etwas ergänzen, was noch gar nicht da ist?);
3. wird die Erkenntnis, daß das Flächenmaximum bei $x = \frac{g}{2}$ vorliegt, doch schon *vorausgesetzt* (woher soll man diese Erkenntnis denn – *ohne* Rechnung – haben?) und nur nochmals *bestätigt*, statt daß (*ohne* Rechnung, sondern allein durch anschaulich-elementargeometrische Überlegungen) zu ihr *hingeführt* wird.

Eine andere geometrische Veranschaulichung, die immerhin ohne Verdopplung des Dreiecks auskommt, hat einer meiner Kollegen gefunden:
am Ausgangsproblem

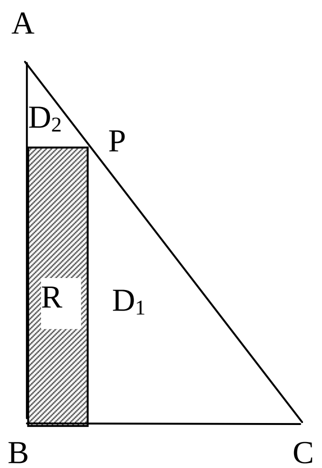


mag einen insbesondere stören, daß die beiden Restdreiecke D_1 und D_2 nicht *zusammenhängen* und daher der Rest $D_1 + D_2$ so schlecht mit dem Rechteck R vergleichbar ist. Ein Weg, D_1 und D_2 *nebeneinander* zu bekommen, ist eine Halbdrehung von D_1 um P, so daß sich ergibt:

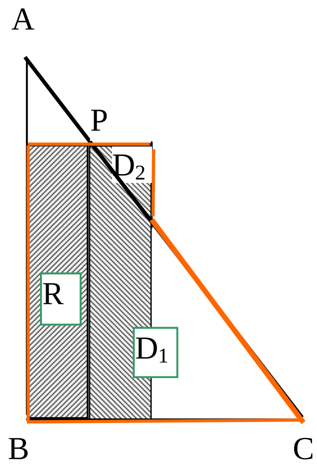


Das so entstehende rote Fünfeck ist offensichtlich *flächengleich zum Dreieck ABC* und enthält R *mehr* als *zwei Mal* (es ergibt sich als Rest das kleine Dreieck oben).
Oder anders gesagt: das Dreieck ABC ist *mehr* als doppelt so groß wie R.

Nehmen wir einen Fall, in dem R sehr *schmal* ist:

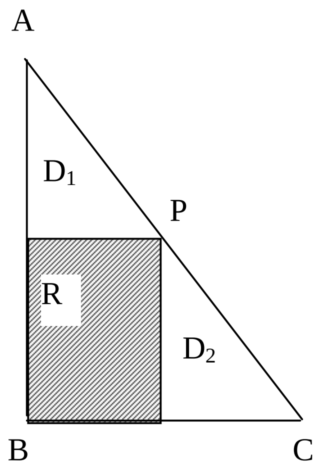


In diesem Fall drehen wir D_2 halb um P und erhalten:

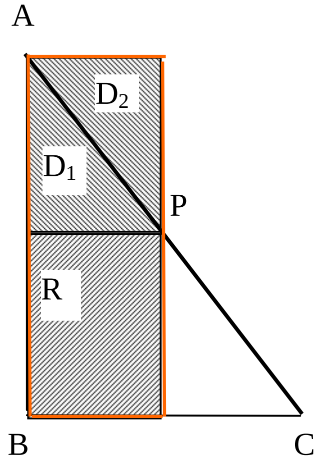


Wieder entsteht ein rotes Fünfeck, das *flächengleich zum Dreieck ABC* ist und R *mehr* als *zwei Mal* enthält (es ergibt sich als Rest das kleine Dreieck rechts).
Oder anders gesagt: das Dreieck ABC ist *mehr* als doppelt so groß wie R.

In beiden Fällen ist also das Fünfeck *mehr* als zwei mal so groß wie das Rechteck. Da könnte man sich fragen, ob es auch *genau* zweimal so groß sein kann wie das Rechteck.
Der Fall muß *irgendwo zwischen* dem ersten, breiten, und dem zweiten, schmalen Rechteck eintreten, und zwar vermutlich genau in der *Mitte*, also bei $x = \frac{g}{2}$, denn dann ist es schnuppe, ob ich, wie im 1. Fall, D_1 *hoch*- oder, wie im zweiten Fall, D_2 halb *runter*drehe:



Halbdrehung von D_1 um P ergibt:



Es bestätigt sich die Vermutung: in diesem Fall entsteht zwar kein *Fünf*eck mehr, dafür aber das rote *Recht*eck, das *flächengleich mit dem Dreieck ABC* und *genau* doppelt so groß ist wie das Rechteck.
Oder anders gesagt: das Dreieck ABC ist *mehr* als doppelt so groß wie R.
Zusammenfassend:
- bei allen anderen Rechtecken (wie im 1. und 2. Fall) ist das Dreieck ABC *mehr* als doppelt so groß wie das Rechteck,
- nur im letzten Fall ist es *genau* doppelt so groß wie das Rechteck.

Das aber heißt, daß das Rechteck im *letzten* Fall (für $x = \frac{g}{2}$) *maximal* ist.

Ich muß allerdings gestehen, daß mir diese Lösung des Kollegen noch immer nicht "elementar" genug ist, und zwar aus zwei Gründen:
1.: wer (welcher Nichtmathematiker) kommt schon auf die *Halbdrehung* der Dreiecke?
2.: *ergibt* sich der 3. Fall auch nicht einsichtig, sondern setzt das Wissen um die Lösung wieder fast *voraus*.

Vielleicht ist das ganze Problem schlichtweg *ungeeignet*, um was ganz Simples zu zeigen: daß viele mathematische Sachverhalte schlichtweg *intuitiv* zugänglich sind, daß Mathematik also gar nicht so schwierig, sondern „gesunder Menschenverstand" ist und ihn nur besonders gut *systematisieren* kann.
Genau *das* beizubringen, ist aber oftmals *Aufgabe* des Mathematikunterrichts, und daß es zu *wenig* geschieht, sein *Manko*: Schüler erhalten oftmals blödsinnige Ergebnisse und *bemerken* das nichtmal, weil sie sich nie *vorweg* anschaulich nach Lösungsmöglichkeiten gefragt haben (eine Funktion dritten Grades *kann* z.B. nur höchstens drei Nullstellen haben). Das aber liegt doch eben auch daran, daß die Aufgabenstellungen (wie auch die, um der es in diesem ganzen Text geht?) meilenweit von allem Interesse entfernt sind.

Und es gibt für die Aufgabe eben anscheinend *doch* eine ganz noch erheblich elementargeometrischere Lösung, als ich sie (mathematisch betriebsblind) bisher gesehen habe, ja, eine Lösung, die überhaupt erst die Bezeichnung "elementar" verdient: ich habe die Aufgabe mal absoluten mathematischen Laien mit der Bitte vorgelegt, das ihrer Meinung nach größte Rechteck einzuzeichnen (die meisten haben allerdings gemault: "was soll so ein Quatsch, was habe ich davon?!" Und viele fühlten sich – in alter Erinnerung an Mathematik aus Schulzeiten – sofort wieder geprüft und prophylaktisch gedemütigt, meinten also, es überhaupt nur falsch machen zu können und reingelegt zu werden).

Das Merkwürdige ist, daß die meisten auf Anhieb und fast millimetergenau den maximalen Fall ($x = \frac{g}{2}$) trafen, ohne das natürlich anschaulich *begründen* oder gar *beweisen* zu können. Der anfangs genannte Glaser *braucht* gar keine Mathematik, er kann´s auch *ohne* (und es schadet auch nicht sonderlich, wenn er sich um ein paar Millimeter vertut; zumal es zwar *theoretisch* das maximale Rechteck gibt, es aber niemals in der *Praxis* haargenau ausgeschnitten werden kann).
D.h., der Fall scheint *vor* aller Mathematik klar.

Nun ist allerdings durch diesen Einzelfall natürlich *nicht* – arg “populistisch” – bewiesen, daß man sich *allein* auf Intuition und “gesunden Menschenverstand” verlassen kann und die Mathematik letztlich überflüssig (ein überflüssiger Umweg und Luxus) ist.
Gerade Mathematiker wissen ganz genau (und sollten sich dessen immer bewußt *bleiben*), daß einen die Intuition oftmals gehörig *irreleiten* kann und die Mathematik (wie exemplarisch in der Relativitäts- und Quantentheorie) manchmal die einzig mögliche, unersetzliche „Krücke” bzw. eine „Sonde” ins anschaulich nunmal *nicht* Erklärbare bzw. Zugängliche und doch „Wahre”, Voraussagbare und oftmals später Überprüfbare ist (es gibt natürlich noch ganz *andere* “Krücken” und “Sonden” in dieselbe Gesamt-“Wahrheit”: z.B. die Poesie).

Funktionenscharen

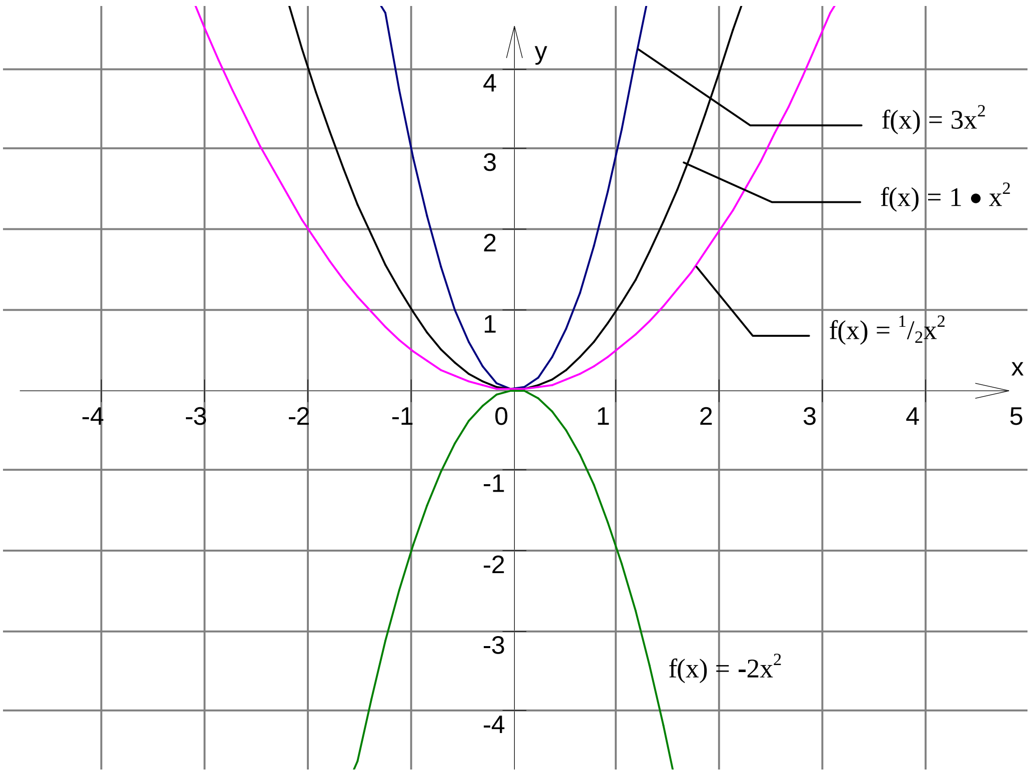
Von (Funktions-)*Variablen* zu unterscheiden sind die sogenannten Parameter (*Form*variablen): z.B. in $f_a(x) = ax^2$ kann ich für den Parameter a eine beliebige Zahl aus $\mathbb{R}$ wählen, *wenn* a aber erstmal ausgewählt ist, bleibt es *fest*, und ich erhalte *eine* zugehörige Funktion. Zu jedem a ergibt sich also eine jeweils eigene Funktion, z.B.

1) $a = 1 \Rightarrow f_1(x) = 1 \cdot x^2$ (Normalparabel)
2) $a = 3 \Rightarrow f_3(x) = 3 \cdot x^2$ (gestreckte Parabel)
3) $a = 1/2 \Rightarrow f_{1/2}(x) = (1/2) \cdot x^2$ (gestauchte Parabel)
4) $a = -2 \Rightarrow f_{-2}(x) = (-2) \cdot x^2$ (gestreckte und nach unten gespiegelte Parabel)

Ist a noch nicht festgelegt, so ist f: $f_a(x) = ax^2$ eine "Funktionenschar" bzw. *Menge von Funktionen*:

$$f_a\colon f_a(x) = ax^2 = \{f_a\colon f_a(x) = ax^2 \,;\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

Die Einschränkung $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ wurde vorgenommen, weil sich für a = 0 $f_0(x) = 0 \bullet x^2 = 0$ ergibt, also keine Parabel mehr.
Jedes *Element* dieser Menge f_a ist eine *vollständige Funktion* (und keineswegs, wie bisher gewohnt, nur eine *Zahl*), denn pro möglichem a ergibt sich eine ganz eigene Funktion.
Die Graphen sind in unserem Fall (für alle denkbaren $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) unendlich viele über- und untereinander liegende gestreckte/gestauchte/gespiegelte Parabeln.



Schauen wir uns die Funktionenschar $f_a(x) = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ nochmal genauer an. Offensichtlich enthält sie <u>alle gestreckten/gestauchten und nach oben/unten geöffneten Parabeln, die ihr Maximum/Minimum im Ursprung haben</u>. Das sind *unendlich viele* Parabeln, aber natürlich noch lange nicht *alle* Parabeln (z.B. ist sind alle horizontal und vertikal *verschobenen* Parabeln *nicht* enthalten) und schon gar nicht alle *Funktionen* (z.B. nicht Funktionen 3. Grades). Bemerkenswert auch: die Graphen *aller* Funktionen aus der Funktionenschar $f_a(x) = ax^2$ gehen - für geeignete Wahl von a (sehr eng beieinander, z.B.

0,01; 0,02; 0,03 ...) - durch ausnahmslos *alle* Punkte des Koordinatensystems außer der x- und y-Achse. Anders gesagt: würde man tatsächlich *alle* Parabeln der Funktionenschar schwarz einzeichnen, so würde - abgesehen von der x- und y-Achse - das *gesamte* Koordinatensystem schwarz, die Graphen lägen *unendlich dicht*. Und dennoch umfaßt die Funktionenschar $f_a(x) = ax^2$, wie schon gesehen, zwar *unendlich viele* Funktionen, aber bei weitem noch *nicht* alle.

Egal ob wir a schon kennen oder noch nicht: bzgl. des laufenden x ist a eine *Konstante* (das ist die Grundeigenschaft, die uns den Umgang mit Funktionenscharen erheblich erleichtern wird, s.u.):

Es ist immer sehr wichtig - und deshalb schreibt man es grundsätzlich in Klammern hinter die Funktion -, von *welcher* Variablen eine Funktion abhängt und was somit nur Parameter (Index) ist (vgl. das dx bei der Integration, das immer klarmacht, nach *welcher* Variablen integriert wird): so ist in $f_a(x) = ax^2$ das x die Variable und a der Parameter, während $f_x(a) = ax^2$ eine ganz andere (nämlich nicht mehr quadratische, sondern lineare) Funktionenschar ist, da jetzt a die Variable und x der Parameter ist:

$$x = 1 \Rightarrow f_1(a) = a \bullet 1^2 = a$$
$$x = 2 \Rightarrow f_2(a) = a \bullet 2^2 = 4a$$

In jede der beiden letztgenannten Funktionen kann ich nun für a beliebige Zahlen aus $\mathbb{R}$ einsetzen und erhalte jeweils als Funktionswert $y = f_x(a)$. In diesem Fall ist x Konstante bzgl. der laufenden a.
Es gibt tausende Funktionenscharen. So ist z.B. natürlich auch $f_a(x) = a \bullet \sin x$ eine Funktionenschar, denn sie besteht aus unendlich vielen (je nach Wahl von a) gestreckten oder gestauchten Sinusfunktionen, etwa für a = 1 der Funktion $f_1(x) = 1 \bullet \sin x$ oder für a = 2 der Funktion $f_2(x) = 2 \bullet \sin x$.

Mit solchen Funktionenscharen kann man hübschhäßliche Abi-Aufgaben stellen, an denen der Studiosus zeigen kann, daß er die mathematische Abstraktion (nicht) beherrscht. An folgendem Beispiel kann man allerdings auch halbwegs den *Sinn* von Funktionenscharaufgaben erahnen: manchmal weiß man nur zwei Sachen:

1. man sucht zur Beschreibung eines vorgegebenen Problems eine quadratische Funktion: da hat man eine ganze Funktionen*schar* zur Auswahl
2. eine *einzige* Bedingung grenzt nun aber die Auswahl aus der Funktionenschar ein: unter all diesen quadratischen Funktionen aus der Funktionenschar sucht man diejenige, die in einem bestimmten Punkt eine bestimmte Eigenschaft hat:

Beispiel:

Gefragt ist, welche Funktion
1. aus der Funktionenschar f_a: $f_a(x) = ax^2$
2. für x = 3 die Steigung 17 hat, wann also $f_a'(3) = 17$ ist.

Da a für die (wenn auch noch unbekannte gesuchte) Funktion eine *Konstante* ist, können wir blind (und ohne das a bisher zu kennen!) ableiten, denn Konstanten bleiben bei der Ableitung *erhalten*, und die Ableitung von x^2 ist 2x:

$$f_a'(x) = a \bullet 2\,x$$

Nach Aufgabenstellung soll $f_a'(3) = 17$ sein, also muß insgesamt gelten:

$$f_a'(3) = a \cdot 2 \cdot 3 = 17 \Leftrightarrow a \cdot 6 = 17 \Leftrightarrow a = \frac{17}{6}$$

Die gesuchte Funktion aus der Funktionenschar f_a: $f_a(x) = ax^2$ ist also die Funktion $f_{\frac{17}{6}}$ mit der Funktionsgleichung $f_{\frac{17}{6}}(x) = \frac{17}{6} \cdot x^2$.

Lösungen von Parametern bzw. Funktionenscharaufgaben sind also viel einfacher, als man denkt:

Der Parameter wird in allen Rechnungen (Ableitung und Integration) einfach unbekanntermaßen *wie eine* (noch unbekannte) *Zahl* mitgeschleppt (also nicht mit der Variablen verwechseln!), bis man ihn irgendwann berechnen kann.

Z.B: $f(x) = x^2 + 7 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7x$

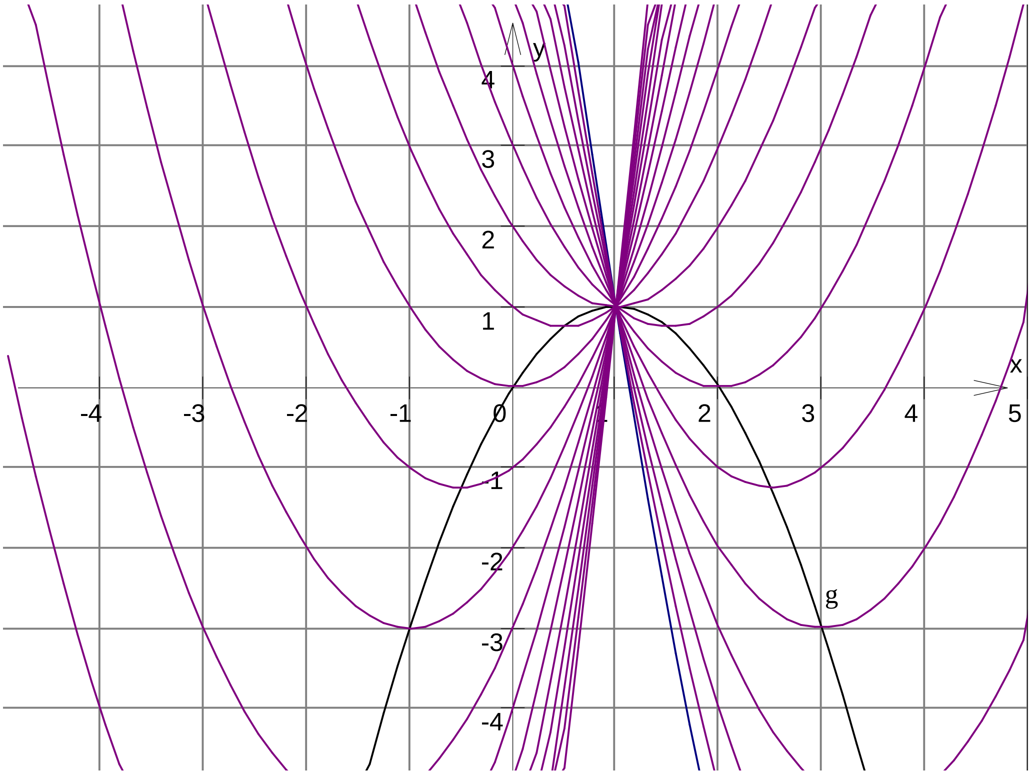
$f_a(x) = x^2 + a \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$

Ortslinien:

Funktionenscharen werden betrachtet, um die Gemeinsamkeiten *aller* Funktionen einer besonderen *Sorte* herauszufinden (statt jeweils jedes Einzelbeispiel durchrechnen zu müssen). Unter diesen Gemeinsamkeiten gibt es nun eine besonders auffällige, nämlich die Lage bestimmter Punkte.

Dazu ein Beispiel: gegeben sei die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + ax - a$. Bevor man damit überhaupt rechnet, mache man sich doch mal klar, um welche speziellen Funktionen es sich dabei überhaupt handelt und welche Graphen überhaupt rauskommen können. Der höchste Exponent ist eine 2, es können also nur Parabeln vorliegen. Da zudem vor dem x^2 kein Koeffizient (schon gar nicht negativ) steht, können nur *nach oben geöffnete Normalparabeln* vorliegen.

Nun sind in der Funktionenschar allerdings nicht *alle* nach oben geöffneten Normalparabeln, sondern nur *bestimmte*. Um weitere Informationen zu bekommen, könnte man einige Funktionen herausgreifen (z.B. $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$), für sie Wertetabellen aufstellen und dann die Graphen zeichnen. Für $f_{-10}(x)$, $f_{-9}(x)$ ... $f_9(x)$, $f_{10}(x)$ lassen wir das mal vom Computer tun. Es ergeben sich folgende Graphen:



Daran ist nun nicht nur bemerkenswert (was sich leicht beweisen ließe), daß alle Graphen (die nach *oben* geöffneten Parabeln) durch den Punkt S (1|1) gehen, sondern es sieht auch - auf den zweiten Blick - so aus, als lägen alle Funktionsminima auf einer Art Normalparabel (nach *unten* geöffnet schon mal eingezeichnet). Solch eine Linie nennt man „Ortslinie (der Minima)“ (genauso für andere Punkte, z.B. Wendepunkte, möglich).

Zu beweisen wäre noch, daß es tatsächlich solch eine eindeutige Linie *gibt* - und welche Funktions*gleichung* g sie hat. Und genau das sei an diesem Beispiel mal vorgeführt:

1. Schritt: allgemeine Berechnung der Minima:

Zentralbedingung: $f\,'(x) = 0$

$f_a(x) = x^2 + ax - a \Rightarrow f_a\,'(x) = 2x + a = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2}$

Damit haben wir den x-Wert des jeweiligen Tiefpunkts (natürlich noch in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter a). Den zugehörigen y-Wert erhalten wir, indem wir dieses x in die Ausgangsgleichung $f_a(x) = x^2 + a x - a$ einsetzen:

$f_a(-\frac{a}{2}) = (-\frac{a}{2})^2 + a(-\frac{a}{2}) - a = \ldots = -\frac{1}{4}a^2 - a$

Somit ergeben sich die Tiefpunkte (in Abhängigkeit vom jeweiligen a) als

$T_a = (-\frac{a}{2} \mid -\frac{1}{4}a^2 - a)$

Um nun die Ortslinie (genauer: ihre Funktionsgleichung) zu finden, schauen wir uns (wie bei Punkten üblich, deren y-Wert ja immer Funktionswert des x-Wertes ist) den *Zusammenhang* zwischen dem x-Wert (also $x = -\frac{a}{2}$) und den y-Werten (also $y = -\frac{1}{4}a^2 - a$) an. Da ist auf Anhieb kein *direkter* Zusammenhang sichtbar, sondern beide Variablen x und y hängen von einer *dritten* ab, nämlich dem a.

Oder anders gesagt und für uns wichtig: y hängt von a ab und a wiederum von x. Dann muß es möglich sein, y wie in Funktionsgleichungen üblich als von x abhängig darzustellen, indem wir a in Abhängigkeit von x ausdrücken und das wiederum in die Gleichung von y einsetzen.
Dazu lösen wir $x = -\frac{a}{2}$ nach dem Parameter a auf, womit sich a = - 2x ergibt. Wenn wir dieses a = - 2x nun wiederum für a in $y = -\frac{1}{4}a^2 - a$ einsetzen, ergibt sich $y = -\frac{(-2x)^2}{4} - (-2x)$ = $-x^2 + 2x$. D.h., nun haben wir den y-Wert von T_a endlich in *direkter* Abhängigkeit vom x-Wert.
Der Punkt T_a läßt sich also auch kürzer als noch oben darstellen als $T_a\,(x \mid -x^2 + 2x)$, und die den Zusammenhang beschreibende Funktionsgleichung ist $g(x) = -x^2 + 2x$.
D.h., wir haben nicht nur die *Existenz* dieser Ortslinie bewiesen, sondern auch ihre *Funktionsgleichung* erstellt.
Es zeigt sich: wie vermutet liegen alle Tiefpunkte auf einer nach unten geöffneten Normalparabel, nämlich der Parabel zu $g(x) = -x^2 + 2x$.

Scharen sind nun in vielerlei Gebieten anwendbar. So könnte man sich etwa bei der Integration fragen, welche Funktion aus der Funktionenschar $f_a(x) = x^2 - a$ ($a > 0$) mit der x-Achse eine Fläche z.B. der Größe 8 einschließt:
1. Bestimmung der Nullstellen:

$$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad \vee x = -\sqrt{a}$$

2. Allgemeine Integration:

$$\left|\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (x^2 - a)dx\right| = \left|\frac{1}{3}x^3 - ax\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\right| = \left|\left(\frac{1}{3}\sqrt{a}^3 - a\sqrt{a}\right) - \left(\frac{1}{3}\left(-\sqrt{a}\right)^3 - a\left(-\sqrt{a}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{3}\sqrt{a}^3 - a\sqrt{a} + \frac{1}{3}\sqrt{a}^3 - a\sqrt{a}\right| = \left|\frac{2}{3}\sqrt{a}^3 - 2a\sqrt{a}\right| = \left|\frac{2}{3}\sqrt{a}^3 - 2\sqrt{a}^3\right| = \left|-\frac{4}{3}\sqrt{a}^3\right| = \frac{4}{3}\sqrt{a}^3 \overset{?}{=} 8$$

Und das betrachten wir näher:

$$\frac{4}{3}\sqrt{a}^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{a}^3 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt[3]{6} \Leftrightarrow a = \left(\sqrt[3]{6}\right)^2 = 6^{\frac{2}{3}} \quad \approx 3{,}3019$$

Die gesuchte Funktion aus der Funktionenschar $f_a(x) = x^2 - a$, die mit der x-Achse die Fläche 8 einschließt, ist also $f_{6^{\frac{2}{3}}}(x) = x^2 - 6^{\frac{2}{3}}$

Merke: auch hier wird mit dem Parameter a unbekanntermaßen die ganze Zeit *wie mit einer* (noch unbekannten) *Zahl* gerechnet, und erst *ganz am Ende* ergibt sich a.

Zusatz

Bei vielen Aufgaben zu Funktionenscharen wird eine besondere Eigenschaft ganzrationaler Funktionen bedeutsam, nämlich die schlichte *Reihenfolge der Exponenten* beim Ableiten bzw. Integrieren: beim Ableiten *verringert* sich der Exponent immer um 1, beim Integrieren (und „Hochleiten“ = Rückgängigmachen einer Ableitung) *erhöht* er sich immer um 1.
Damit kann man dann oftmals wichtige Rückschlüsse ziehen:
Ist z.B. f ´´ 2. Grades, so muß f ´ 3. Grades und f 4. Grades (also von der Form $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$) gewesen sein.

Brauchbar wird sowas in Aufgaben, wo etwa von der zweiten Ableitung f ´´ auf die Ausgangsfunktion f *rück*geschlossen werden soll.

Ein Beispiel: $f''(x) = 3x^2 - 5x$

$$\Rightarrow f'(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + cx + d$$

(Und schon sind die Parameter bzw. Formvariablen c und d aufgetaucht, liegt also eine Funktionen*schar* vor. Um c und d nun genauer bestimmen zu können, müßten noch *andere* Eigenschaften der Funktion als nur f ´´ vorgegeben sein.)

Vorsicht: beim „Hochleiten“ (Umkehren der Ableitung) vergißt man allzu gerne die jeweilige Hinzufügung der Konstante (oben c und d), weil man das bei der Integration (die genauso läuft wie das „Hochleiten“) nicht braucht.

Oder ist f 2. Grades, so ist die Stammfunktion F garantiert 3. Grades (hat also die Form $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$)

Scharen in der Vektorgeometrie

Analog kann ich natürlich auch in der Vektorgeometrie Scharen verwenden, z.B. die Schar paralleler Geraden

$$ga: \vec{x} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

Für a = 1 ergibt sich dann der *Stütz*vektor $1 \bullet \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, für a = 2 hingegen der *Stütz*vektor

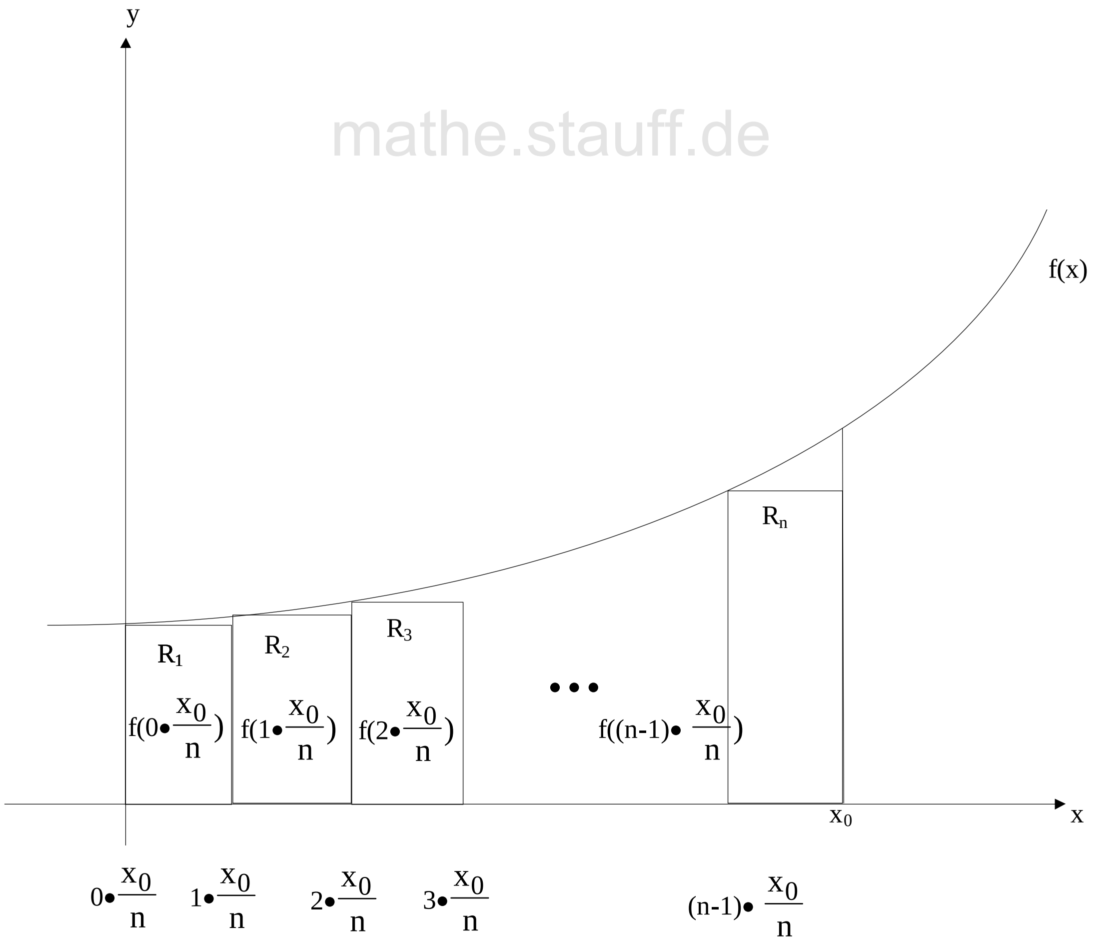
$2 \bullet \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ usw., während der *Richtungs*vektor für *jede* dieser Geraden $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ ist (weshalb sie alle *parallel* sind).

Scharen in der Vektorgeometrie dienen oft dazu, Gegenstände *beweglich* zu machen, also z.B. - wie eben - eine Gerade kontinuierlich parallelzuverschieben (Verlängerung des Stützvektors) oder eine Kugel aufzublähen (zu schrumpfen; Radius als Parameter) bzw. zu rollen (indem sich z.B. der Mittelpunkt auf einer Kurve [Geraden] bewegt).

Hier zeigt sich schon: immer genau betrachten, *welches* Element Parameter ist und *was* sich damit geometrisch verändert.

Die Integration: Definition, Stammfunktion, Hauptsatz

Mit der Integration berechnet man die *Fläche* zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse. Das hat auf den ersten Blick nichts mit der Ableitung zu tun. Beim sogenannten "Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung" werden wir allerdings sehen, daß es da dennoch direkte Zusammenhänge gibt: die Integration ist die *Umkehrung* der Ableitung (und umgekehrt), womit wir alle Erkenntnisse aus dem Ableitungskapitel weiterverwenden können, statt alles neu zu erarbeiten.
Die Bestimmung der Fläche unter einem *krummen* Graph ergibt wieder das typische Mathematikerproblem, daß sie kaum mit *krummen* Figuren umgehen können. Aber von der Kreisflächenberechnung her kennen wir schon den hilfreichen Ansatz, die krumme Figur von außen und innen durch Vielecke, also *gerade* Figuren, anzunähern. Im hiesigen Fall wählen wir dazu *Rechtecke*.
Wenn die Fläche der krummen Figur überhaupt eindeutig definiert sein soll, so muß unser Rechteckverfahren für *alle* Rechteckannäherungen von oben/außen und unten/innen funktionieren und das
gleiche Ergebnis liefern. Zur Vereinfachung wollen wir hier allerdings gleich *eine systematische* Annäherung durch *gleichbreite* Rechtecke von unten benutzen. Gegeben sei der Graph einer Funktion f(x). Wir benutzen hier x_0 als rechte bzw. Obergrenze des Intervalls, um sie von der *Variablen* x der Funktion f zu unterscheiden. Als erstes unterteilen wir die Strecke von 0 bis x_0 in n Teile der jeweiligen Breite x/n:



Definition des Integrals

Das Rechteck R_1 hat also die Breite $b = \frac{x_0}{n}$ und als Höhe h (linke Kante) den Funktionswert an der Stelle $0 = 0 \cdot \frac{x_0}{n}$, also $h = f(0 \cdot \frac{x_0}{n})$

$\Rightarrow$ die Fläche F_1 von R_1 ist $F_1 = h \cdot b = f(0 \cdot \frac{x_0}{n}) \cdot \frac{x_0}{n}$

Das Rechteck R_2 hat wieder die Breite $b = \frac{x_0}{n}$ und als Höhe h (linke Kante) den Funktionswert an der Stelle $1 \cdot \frac{x_0}{n}$, also $h = f(1 \cdot \frac{x_0}{n})$

$\Rightarrow$ die Fläche F_2 von R_2 ist $F_2 = h \cdot b = f(1 \cdot \frac{x_0}{n}) \cdot \frac{x_0}{n}$.

So geht das weiter bis zum letzten Rechteck R_n: es hat wieder die Breite $b = \frac{x_0}{n}$ und als Höhe h (linke Kante) den Funktionswert an der Stelle $(n-1) \cdot \frac{x_0}{n}$, also $h = f([n-1] \cdot \frac{x_0}{n})$

$\Rightarrow$ die Fläche F_n von R_n ist $F_n = h \cdot b = f([n-] \cdot \frac{x_0}{n}) \cdot \frac{x_0}{n}$.

Für die Fläche I_n aller Rechtecke R_1 bis R_n *zusammen* ergibt sich also:

$$I_n = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n =$$

$$= f(0 \cdot \frac{x_0}{n}) \cdot \frac{x_0}{n} + f(1 \cdot \frac{x_0}{n}) \cdot \frac{x_0}{n} + f(2 \cdot \frac{x_0}{n}) \cdot \frac{x_0}{n} + \ldots + f([n-1] \cdot \frac{x_0}{n}) \cdot \frac{x_0}{n} =$$

$$= [f(0 \cdot \frac{x_0}{n}) + f(1 \cdot \frac{x_0}{n}) + f(2 \cdot \frac{x_0}{n}) + \ldots + f([n-1] \cdot \frac{x_0}{n})] \cdot \frac{x_0}{n} \quad [\#]$$

Macht man nun n immer *größer*, unterteilt man also die Strecke von 0 bis x_0 in immer *kleinere* Teile, so ergeben sich immer *mehr*, aber *schmalere* Rechtecke, die zusammen die Fläche F (x_0) unter der Funktion f immer *besser* annähern (der Fehler wird immer kleiner). Also erhalten wir vorerst (für Fläche über der x-Achse!; für solche unter der x-Achse werden wir noch Sonderüberlegungen anstellen!!!):

<u>Fläche</u> <u>F(x_0)</u> <u>unter</u> <u>f(x)</u>
[zwischen x-Achse/Graph von f , y-Achse (x = 0)/Parallelen durch x_0]

$$F(x_0) = \lim_{n \to \infty} I_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} [f(0 \cdot \frac{x_0}{n}) + f(1 \cdot \frac{x_0}{n}) + f(2 \cdot \frac{x_0}{n}) + \ldots + f([n-1] \cdot \frac{x_0}{n})] \cdot \frac{x_0}{n}$$

Statt $F(x_0)$ schreibt man auch

$$F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx$$

Die $\int$-Schreibweise ist besonders günstig: einerseits wird mit dem x in dx deutlich, nach *welcher* Variablen integriert wird (z.B. wird in $\int$ (2x+3z)dx die Funktion f(x) = 2x + 3z integriert [z ist nur Formvariable], in $\int(2x + 3z)dz$ hingegen die Funktion $f(z) = 2x + 3z$ [hier ist t die Formvariable]).

Anderseits bleiben bei $\int_0^{x_0}$ immer die linke Grenze (0) und die rechte (x_0) deutlich.

$\int_0^{x_0} f(x)\,dx$ nennt man auch das *Integral* von f nach x in den Grenzen 0 (links) und x_0 (rechts)

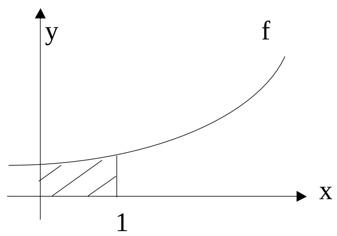
Insgesamt erhalten wir also:

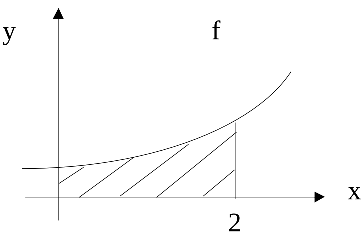
$$F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[f(0\cdot\frac{x_0}{n}) + f(1\cdot\frac{x_0}{n}) + f(2\cdot\frac{x_0}{n}) + ... + f([n-1]\cdot\frac{x_0}{n})\right]\cdot\frac{x_0}{n}$$

Nun ist der Limesausdruck aber in mehrerlei Hinsicht ungünstig: 1. ist er viel zu kompliziert, und 2. benötigt man offensichtlich massenhaft Rechenschritte, um auch nur ansatzweise eine Vorstellung zu bekommen, wie - und mit welchem Endergebnis - da die Fläche unter einem Graphen angenähert wird.
Deshalb im folgenden eine andere, erstmal theoretischere Vorgehensweise, die aber zu einem erstaunlich einfachen Rechenverfahren für Flächen führt.

Die Stammfunktion

Nun läßt sich zeigen, daß $F(x_0)$, also die Fläche *in Abhängigkeit* von der rechten Grenze x_0,





$$F(1) = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad\qquad F(2) = \int_0^2 f(x)\,dx$$

wieder eine *Funktion* ist, wenn bereits f eine Funktion ist (das soll hier nicht bewiesen werden).

Die Funktion F (Integral in Abhängigkeit von der Grenze x_0) nennt man dann auch *Stammfunktion von f*.

Oben war allerdings unvorsichtig argumentiert worden: F kann - wie wir noch sehen werden - auch *negative* Werte annehmen, und deshalb dürfen wir eigentlich nicht von "Fläche" sprechen, denn Flächen sind ja immer *positiv*.

Der lebenswichtige "Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung"

Vorweg eine kleine Umbenennung: bisher hieß die Variable von f x, jetzt heißt sie kurzfristig mal t (vgl. entsprechende Bezeichnung der horizontalen Achse des Koordinatensystems); und bisher hieß die Intervallobergrenze x_0, jetzt nennen wir sie einfach x. Sinn dieser Umbenennung ist, daß wir die einfache unterstrichene Formel in Abhängigkeit vom gewohnten x und nicht von x_0 bekommen:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
Die Ableitung der Stammfunktion

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ist f(x), d.h. $\underline{F'(x) = f(x)}$

Das bedeutet: die Stammfunktion F von f ist diejenige Funktion, deren Ableitung wieder f ist:
F Stammfunktion von f $\Leftrightarrow$ $F'(x) = f(x)$

Merke: so, wie $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ die *einzige* Ableitungsformel ist, die für *alle* Funktionenarten gilt, ist die Formel der „Hauptsatzes" die *einzige* Integrationsformel, die für *alle* Funktionenarten gilt.

Oder noch einfacher:

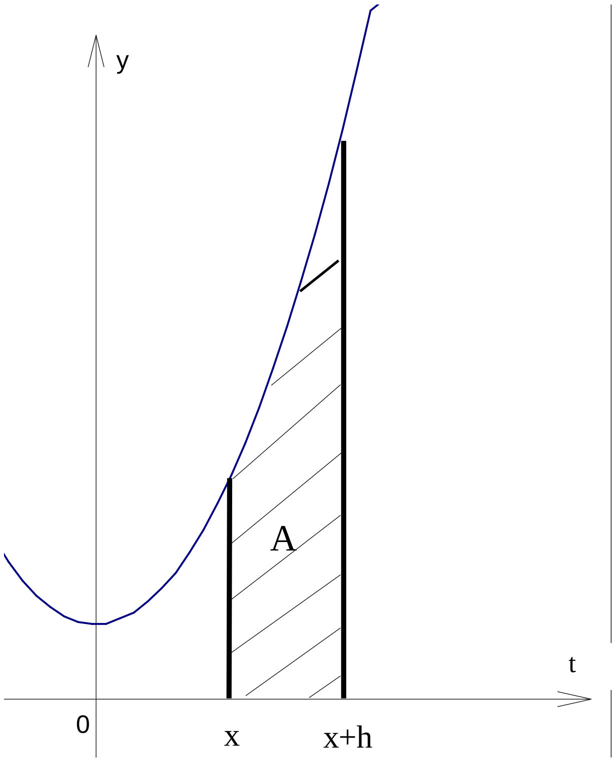
Integrieren und Ableiten sind das *Gegenteil* voneinander: wenn ich f erst zu F integriere und dann F ableite, so erhalte ich wieder f. Oder umgekehrt: wenn ich F zu f ableite und dann f integriere, so erhalte ich wieder F.

Man mache sich die enorme Bedeutung des „Hauptsatzes" mal klar: laut ihm hängen Integration und Ableitung direkt *zusammen*, und weil wir schon ableiten *können*, wird uns (wie wir sehen werden) auch die Integration nicht mehr schwerfallen, und wir müssen nicht völlig von vorne beginnen.

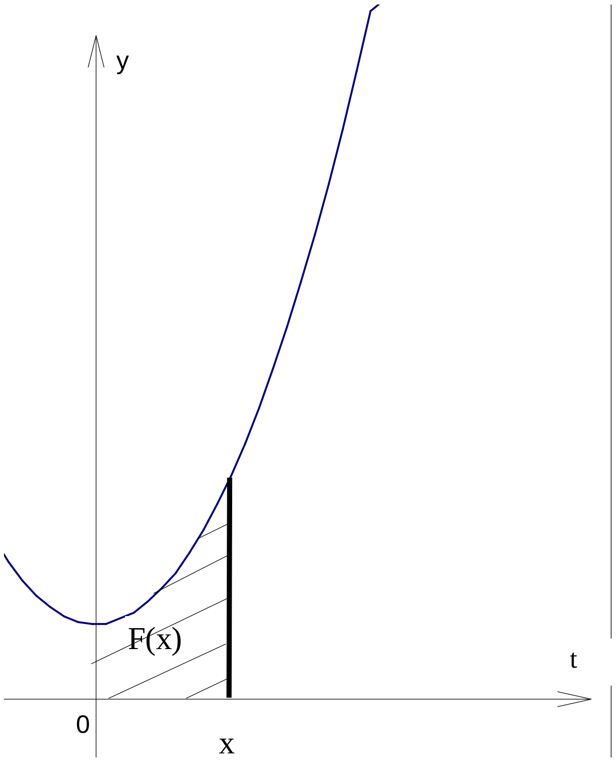
Fast möchte ich sagen: dieser Hauptsatz mit der *Verbindung* von Ableitung und Integration (daß eins das Gegenteil vom andern ist) ist doch eins der staunenswertesten Wunder der Mathematik, denn es ist doch letztlich nicht einzusehen, wieso Ableitung (<u>*punktuelle*</u> *Steigung* einer Funktion) und Integration (*Fläche* unter der Funktion *über einem* <u>*Intervall*</u>) zusammenhängen sollen.

Beweis des „Hauptsatzes":

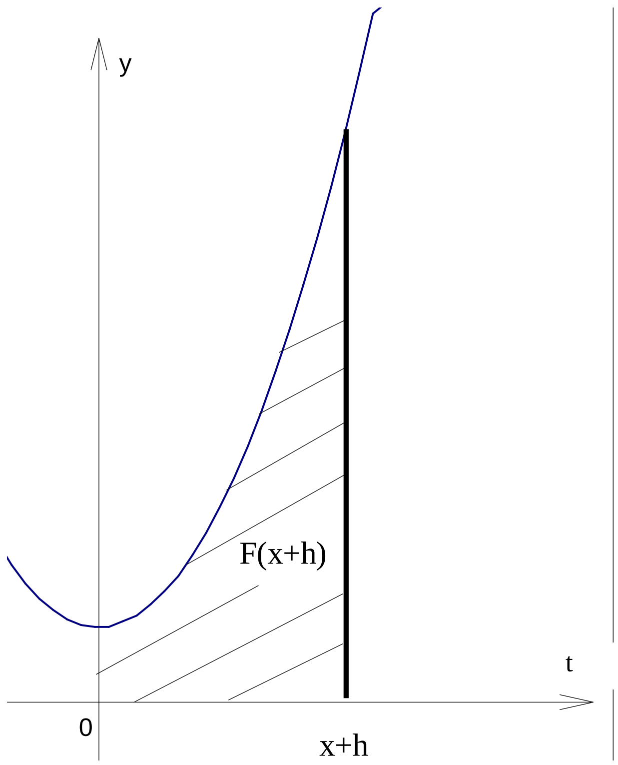
angenommen, wir betrachten folgende schraffierte Fläche, genannt A:



Vergleicht man sie mit F(x)

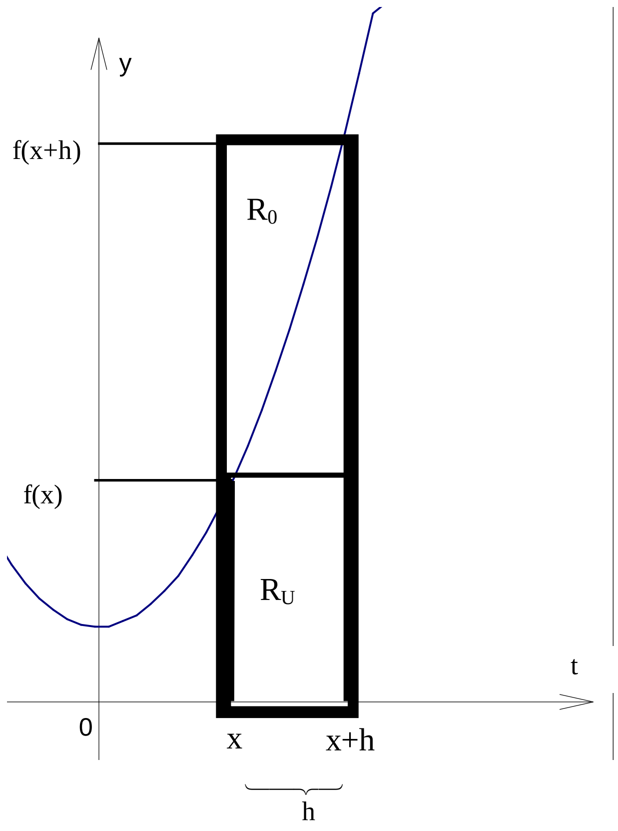


und F(x+h)



so ergibt sich A = F(x+h) - F(x). (*)

Ein weiterer Ansatz für A funktioniert so, daß wir ein Oberrechteck R_0 und ein Unterrechteck R_U wählen:



Nun gilt 1: $R_U = h \bullet f(x)$

2. $R_0 = \quad h \quad \bullet f(x+h)$
Breite • Höhe

3., weil R_U ganz in A liegt: $R_U \leq A$ (das =, falls die Randfunktion ausnahmsweise konstant, d.h. parallel zur t-Achse ist)

4., weil A ganz in R_0 liegt: $A \leq R_0$ (das =, falls die Randfunktion ausnahmsweise konstant, d.h. parallel zur t-Achse ist)

Aus 3. und 4. folgt:

$$R_U \quad \leq \quad A \quad \leq R_0$$

Einsetzen von 1. und 2. ergibt:

$$h \bullet f(x) \quad \leq \quad A \quad \leq h \bullet f(x+h)$$

Für A nun nach (*) eingesetzt, ergibt sich:

$$h \bullet f(x) \leq \underline{F(x+h) - F(x)} \leq h \bullet f(x+h) \qquad (**)$$

Diese Formel nun aber könnte einem im unterstrichenen Mittelteil an die Definition der Ableitung

$f\,'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ erinnern, oder in unserem Fall, wo die Funktion Groß-F heißt:

$$F\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \qquad (***)$$

Damit deutet sich immerhin schon der Zusammenhang von Integration und Ableitung an, auf den der „Hauptsatz" ja hinausläuft. Und diesem sich andeutenden Ziel wollen wir uns nun zielvoll annähern. Als erstes fehlt im unterstrichenen Mittelteil der Formel (**) noch der Nenner h. Wir erreichen ihn, indem wir die *gesamte* Formel (**) durch h dividieren. Es ergibt sich:

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Jetzt fehlt im Mittelteil im Vergleich mit (***) nur noch die Anwendung des Limes. Wir erreichen ihn, indem wir ihn auf *alle* drei Teile der Formel anwenden:

$$\lim_{h \to 0} f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \lim_{h \to 0} f(x+h)$$

Links ist aber f(x) von h unabhängig, es bleibt also während des Limesprozesses bei f(x). Ganz rechts hingegen gilt: wenn f stetig ist, geht mit $h \to 0$ das f(x+h) gegen f(x). Somit ergibt sich:

$$f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x)$$

Nun kann der Mittelteil aber nur dann sowohl ≤ als auch ≥ f(x) sein, wenn er = f(x) ist.

Es folgt: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

Nun ist der linke Ausdruck aber laut (***) gerade gleich $F\,'(x)$.

Insgesamt erhalten wir als $F'(x) = f(x)$. Womit der Beweis des „Hauptsatzes" (s.o.) abgeschlossen ist.

Der größte Vorteil des "Hauptsatzes" ist: da es *kein Standardverfahren* gibt, um Stammfunktionen zu finden (während Ableiten fast immer funktioniert), geht man folgendermaßen vor:

Oftmals läßt sich eine Stammfunktion F zu einer Funktion f dadurch finden, daß man eine Funktion F sucht, deren *Ableitung* f ist (und ableiten können wir ja bereits!).

Genau so findet man im folgenden die Stammfunktionen zu Potenzfunktionen:

Stammfunktionen von Potenzfunktionen

Im Regelfall ist es leider nicht so einfach, zu einer Funktion f die Stammfunktion F zu finden, also eine Funktion F, für die $F'(x) = f(x)$.
Sehr einfach ist das jedoch bei *Potenzfunktionen*, weil wir deren Ableitung schon kennen.

Ist $f(x) = x^n$, so gilt für die Stammfunktion F:

$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ (d.h. der Exponent wird um 1 *erhöht*, und gleichzeitig wird durch diesen *neuen* Exponenten geteilt)

Vorsicht!: diese einfache Regel gilt leider *nur* für Potenzfunktionen (und in Folge davon ganzrationale Funktionen). Leider kommen allzu viele Leute auf die Idee, sie auch auf *andere* Funktionenarten (z.B. Exponentialfunktionen) anzuwenden - und das ist falsch!

Beweis: ist $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, so ist nach den Ableitungsregeln für Potenzfunktionen

$$F'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^{(n+1)-1} = x^n = f(x)$$

Also ist z.B. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ die Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ und somit $\int_0^5 x^2\,dx = F(5) = \frac{1}{3}5^3 = \frac{125}{3}$.

Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen

Analog zur Ableitung gilt:
Funktionen werden *summandenweise* und unter *Beibehaltung* der *Koeffizienten* integriert,

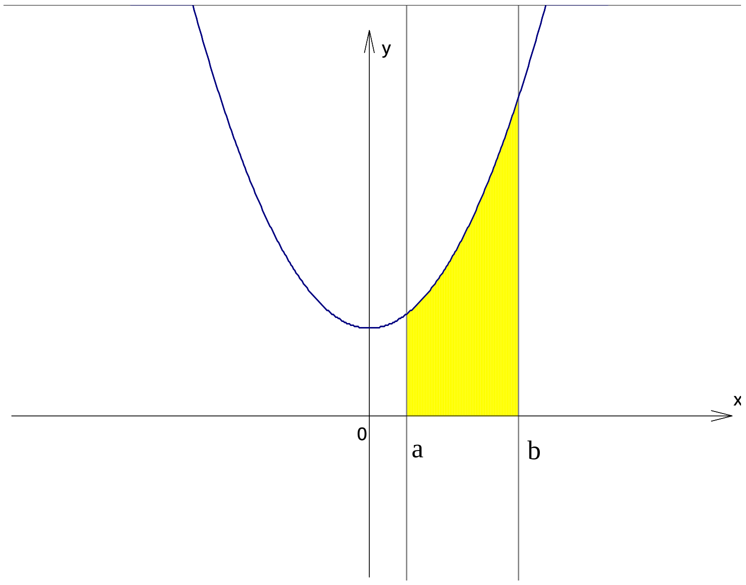
also z.B.

$$\int_0^5 (\underline{9}x^3 \underline{-7}\,x^2)dx = \underline{9}\int_0^5 x^3\,dx \underline{-7}\int_0^5 x^2\,dx = 9 \cdot \frac{1}{4} \bullet 5^4 - 7 \cdot \frac{1}{3} \bullet 5^3$$

Die Integration: zwischen Grenzen und Graphen, Fläche, Integral

Integration zwischen Grenzen

Bisher hatten wir nur für die *rechte* Grenze x eine beliebige Zahl eingesetzt. Oftmals will man aber auch für die *linke* Grenze eine beliebige Zahl a - und nicht nur wie bisher 0 - einsetzen können:



Dann ist die von a und b eingegrenzte Fläche offensichtlich gerade gleich der Fläche zwischen den Grenzen 0 und b *minus* der Fläche zwischen den Grenzen 0 und a, also

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Schreibt man nun noch $F(x)\Big|_a^b$ als neue Schreibweise für F(b) - F(a), so erhält man:

rechte Grenze des Integrationsintervalls

Randfunktion, die das Integral nach oben/unten abschließt

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Stammfunktion   Stammfunktion für rechte/ für linke Grenze

linke Grenze des Integrationsintervalls

Ein Rechenbeispiel: ist $f(x) = x^2+x$, so ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ die Stammfunktion, und es ergibt sich

$$\int_5^6 (x^2+x)dx = F(x)\Big|_5^6 = F(6) - F(5) = (\frac{1}{3} \cdot 6^3 + \frac{1}{2} \cdot 6^2) - (\frac{1}{3} \cdot 5^3 + \frac{1}{2} \cdot 5^2) = ...$$

Unendlich viele Stammfunktionen:

Anhand der Potenzfunktionen läßt sich schnell zeigen, daß es zu einer (Potenz-)Funktion unendlich viele Stammfunktionen gibt.

1. Sei $f(x) = x^2$.
2. Behauptung: dann ist *jede* Funktion F_a mit der Funktionsgleichung $F_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f (also: $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ und $F_{239}(x) = \frac{1}{3}x^3 + 239$ und und und sind alles Stammfunktionen zu f). Die Stammfunktionen $F_a(x)$ - das sei nur nebenbei erwähnt - sind durch das a nur gegeneinander *nach oben oder unten verschoben*.
   (Kleine Nachbemerkung: so wie die Stammfunktion oben sehr vereinfacht eingeführt wurde, muß leider unklar bleiben, wie es zu diesen unendlich vielen, verschiedenen Stammfunktionen *kommt*.)
3. Beweis:
   $F_a'(x) = x^2$, denn die Konstante a fällt bei der Ableitung weg. Weil aber $F_a'(x) = f(x)$, ist F_a laut „Hauptsatz" Stammfunktion von f.

Nun könnte man einen Schrecken bekommen: muß man dann zwecks Integration mit *unendlich vielen* Stammfunktionen rechnen (was prinzipiell gar nicht möglich ist: wir würden ja nie fertig) - und ergibt sich dann immer ein anderes *Ergebnis*? Und die Rechnung mit *welcher* der unendlich vielen Stammfunktionen ergibt dann das *richtige* Ergebnis der Integration?

Führen wir die Integration mal mittels der allgemeinen Stammfunktion $F_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + a$ durch:

$$\int_c^d f(x)dx = F_a(x)\Big|_c^d = F_a(d) - F_a(c) =$$

$$= \left[\frac{1}{3}d^3 + a\right] - \left[\frac{1}{3}c^3 + a\right] = \frac{1}{3}d^3 + a - \frac{1}{3}c^3 - a = \frac{1}{3}d^3 - \frac{1}{3}c^3$$

Im Laufe dieser Rechnung (vom vorletzten zum letzten Schritt) passiert nun etwas Bemerkenswertes und Wichtiges: das a fällt aus der Rechnung heraus, d.h. wir erhalten *unabhängig* von der Wahl des a in der Stammfunktion F_a immer *dasselbe* Integral von f.

Und das hat die schöne Folge: es ist *egal*, mit welcher Stammfunktion F_a wir rechnen, es kommt für das Integral von f immer *dasselbe* raus.

Also kann man es sich einfach machen: unter allen Stammfunktionen F_a mit der Funktionsgleichung $F_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + a$ wählen wir die *einfachste*, nämlich $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + 0 = \frac{1}{3}x^3$.

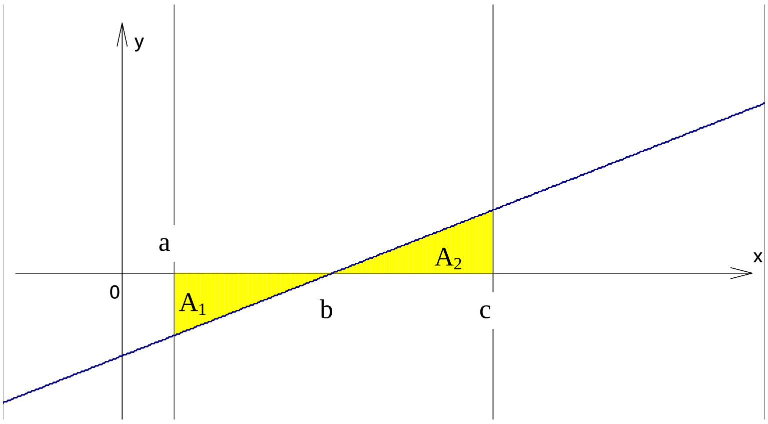
Anders gesagt: ab jetzt reicht es, die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ zu wählen, also eine *ohne* zusätzliche Konstante a.

Flächen *unter* der x-Achse/Unterscheidung Integral/Fläche

Unsere bisherige Flächenbestimmungsmethode ist allerdings nur richtig, wenn die Funktion f *oberhalb* der x-Achse liegt. Denn liegt die Funktion *unterhalb* der x-Achse, so erhalten wir ein *negatives* Ergebnis (weil in der Gleichung [#] für die *Rechteckhöhen* immer *negative* Funktionswerte benutzt wurden, sich also negative Flächen ergäben, was geometrisch unmöglich ist). Flächen sind aber nunmal *grundsätzlich positiv* definiert, d.h., im eben genannten Fall erhalten wir die Fläche erst als *Betrag* (= positive Gegenzahl) des Integrals. Das heißt insbesondere:

Fläche und Integral sind *nicht notwendig* identisch, sondern können sich im *Vorzeichen* unterscheiden (Integrale können negativ werden, Flächen hingegen sind grundsätzlich positiv definiert).

Aus diesem Grunde führen wir für die immer positive Fläche einen neuen Buchstaben ein, und zwar das A (von engl. area = Fläche; wir wählen nicht den Buchstaben F wie Fläche, weil dieses F schon für Stammfunktionen vergeben ist).
Denkbar ist etwa folgender Fall:



Die Kurve verläuft also auf dem Integrationsintervall [a|c] von a bis b *unter*, ab b *über* der x-Achse. Die beiden sich ergebenden Flächen A_1 und A_2 seien in diesem Fall *gleichgroß*. Die Integrale unterscheiden sich allerdings im Vorzeichen:

$\int_a^b$ ist negativ, $\int_b^c$ ist positiv.

Integriert man nun blind über das *ganze* Intervall [a|c], so ergibt sich

$$\int_a^b + \int_b^c = 0.$$

Die Integrale heben sich bei gleichem Betrag, aber entgegengesetztem Vorzeichen gerade weg, und wir würden bei dem Ergebnis 0 als Gesamtfläche 0, also *gar keine* Fläche vermuten. Das widerspricht aber offensichtlich der Zeichnung.
Uns bleibt also nur, als Gesamtfläche A zu definieren:

$$A = \left|\int_a^b \quad\right| + \left|\int_b^c \quad\right|$$ (Dabei sind "|" Betragsstriche)

D.h., wir müssen zur Gesamtflächenberechnung
a) von der *linken Intervallgrenze* a bis zur 1. *Nullstelle*

b) jeweils *zwischen den Nullstellen* (es kann ja *mehrere* Nullstellen von f auf dem Intervall [a|c] geben, die Funktion kann *mehrfach* von oberhalb der x-Achse nach unterhalb wechseln)
c) von der *letzten Nullstelle* bis zur bis zur *rechten Intervallgrenze* c integrieren und
d) die *Beträge all dieser Integrale aufaddieren*.

Wenn man sich angewöhnt, bei Flächenberechnungen *immer* mit Beträgen von Integralen statt einfach nur den Integralen zu rechnen, so braucht man überhaupt nicht zu wissen, *wo* f auf dem Integrationsintervall oberhalb/unterhalb der x-Achse verläuft.
Die Vorweg-Berechnung *aller Nullstellen* und die Berechnung der sich daraus ergebenden *Teilintegrale* bleibt einem aber in keinem Fall erspart (immerhin braucht man immer nur die *gleiche Stammfunktion*, in die man nur *verschiedene Grenzen* einsetzt).

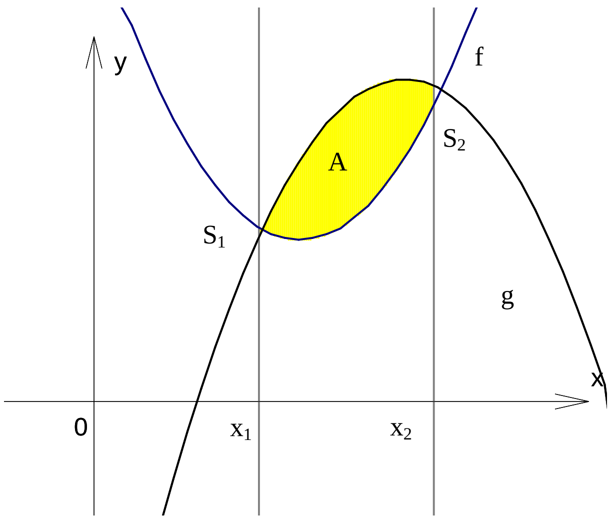
Beispiel: $f(x) = x^3$ hat auf dem Integrationsintervall [-1|1] für x = 0 eine Nullstelle und verläuft auf [-10] *unterhalb*, auf [0|1] *oberhalb* der x-Achse. Wir müssen die Gesamtfläche A zwischen 1 und 1 also folgendermaßen berechnen:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} x^3 dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x^3 dx\right| = \left|\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\frac{1}{4}x^4\Big|_{0}^{1}\right| =$$

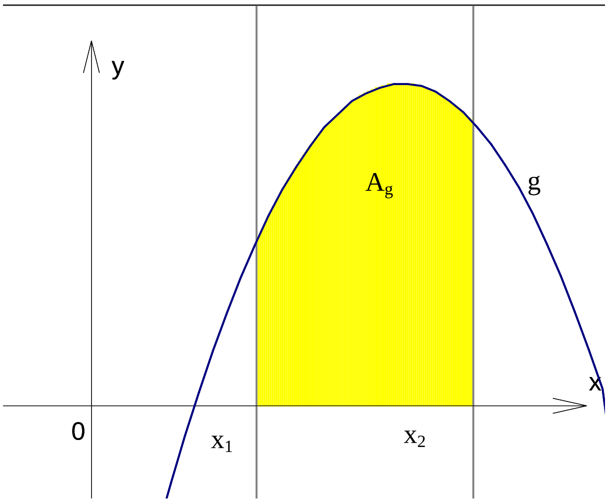
$$= \left|\frac{1}{4}\bullet 0^4 - \frac{1}{4}\bullet(-1)^4\right| + \left|\frac{1}{4}\bullet 1^4 - \frac{1}{4}\bullet 0^4\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Fläche zwischen den Graphen *zweier* Funktionen

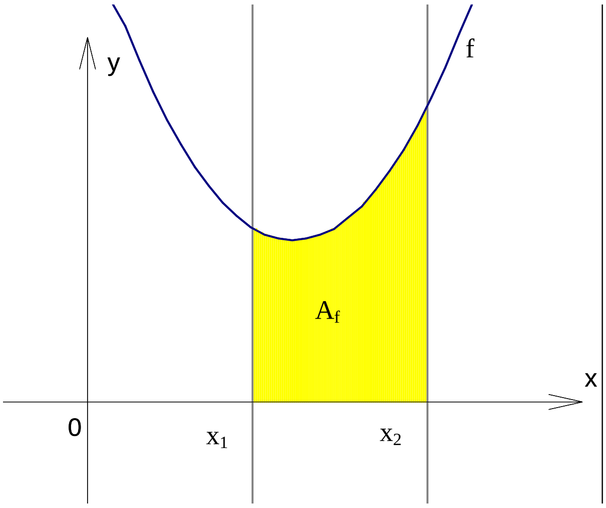
Ein weiterer Spezialfall ist, daß man nicht - wie bisher - immer die Fläche zwischen *einer* Funktion f und der *x-Achse*, sondern die zwischen *zwei* Funktionen f und g *eingeschlossene* Fläche berechnen will.
Wie man da vorgeht, sei an einer Graphik klargemacht. Gegeben seien zwei Funktionen f und g, die zwischen zwei Schnittpunkten $S_1(x_1|y_1)$ und $S_2(x_2|y_2)$ eine Fläche A einschließen:



Die Fläche F ist gleich der Differenz der Fläche $A_g = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$ unter g

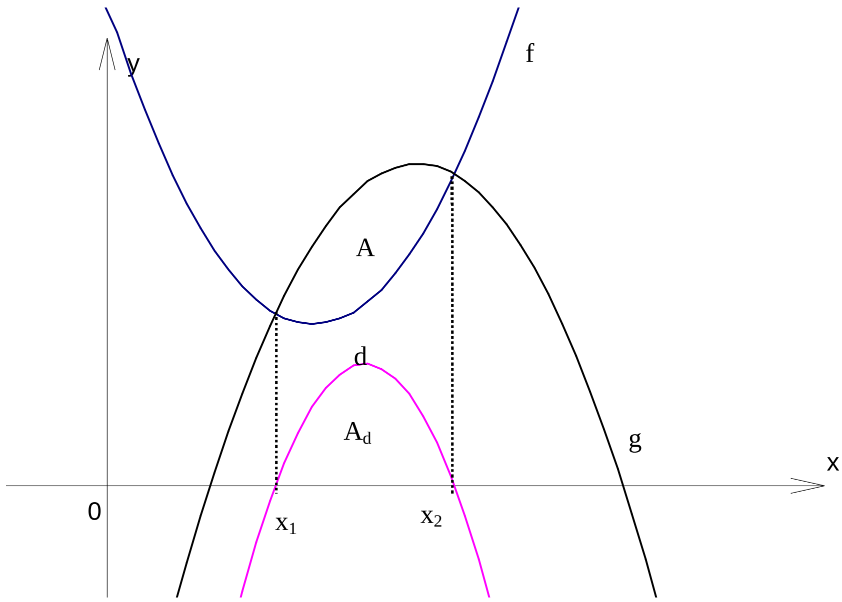


und der Fläche $A_f = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ unter f:



Also $A = A_g - A_f = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ (*)

Gleichzeitig kann man aber auch die *Differenz*funktion d(x) = g(x)-f(x) anschauen. Zusammen mit f und g in eine Zeichnung gezeichnet, sieht sie so aus:



Bemerkenswert daran ist erstmal (und das ließe sich leicht nachweisen), daß die x-Werte x_1 und x_2 der *Schnittpunkte* von f und g identisch mit den *Nullstellen* von d sind.
Des weiteren läßt sich zeigen, daß die gesuchte Fläche A zwischen f und g genauso groß ist wie die Fläche A_d, die d mit der x-Achse einschließt, also wie $A_d = \int_{x_1}^{x_2} d(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \big(g(x) - f(x)\big)dx$

Dazu benutzen wir die Gleichung (*), wobei F die Stammfunktion zu f, G die Stammfunktion zu g sei.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \quad - \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \\
&= \left(G(x)\Big|_{x_1}^{x_2}\right) \quad - \quad \left(F(x)\Big|_{x_1}^{x_2}\right) = \\
&= \big(G(x_2) - G(x_1))\big) - (F(x_2) - F(x_1)) = \\
&= G(x_2) - G(x_1) - F(x_2) + F(x_1) = \\
&= G(x_2) - F(x_2) - G(x_1) + F(x_1) = \\
&= \big(G(x_2) - F(x_2))\big) - (G(x_1) - F(x_1)) = \\
&= \left(\big(G(x) - F(x)\big)\Big|_{x_1}^{x_2}\right) = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\big(g(x) - f(x)\big)} dx = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} d(x) \quad dx = A_d
\end{aligned}
$$

Also gilt: $A = \int_{x_1}^{x_2} d(x)dx$ (**)

Aus (*) und (**) zusammen folgt also

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\big(g(x) - f(x)\big)}_{d(x)}dx$$

Man kann also die Fläche zwischen *zwei* Funktionen f und g bestimmen, indem man einfach die Fläche unter der *Differenz*funktion d = g - f oder auch d = f - g bestimmt (und das geht wie jede Flächenberechnung unter einer Funktion, also incl. Nullstellenbestimmung, Integration zwischen den Nullstellen, Aufsummieren der Beträge).

Spezialfall: Fläche zwischen Frunktionsgraph und *Tangente* der Funktion (s. Ableitungskapitel)

Hier nun sei beispielhaft gezeigt, wie man eine passende Aufgabe überhaupt *herstellen* kann (eine Aufgabe, die leicht [bzw. überhaupt] zu lösen ist und zu halbwegs schönen Ergebnissen führt).
Gesucht seien zwei Funktionen f und g vierten Grades,. die drei geschlossene Flächen miteinander einschließen. Die beiden Funktionen müssen also vier *Schnitt*puntke haben - bzw. die Differenzfunktion d muß vier *Null*stellen haben.

Von dieser Differenzfunktion d gehen wir nun erstmal aus. Sie soll also vier Nullstellen haben, und zwar so, daß man sie nachträglich auch wieder aus der Funktionsgleichung von d rekonstruieren kann. Das aber ist besonders einfach (und sonst kaum möglich), wenn die Funktion biquadratisch ist. Biquadratische Funktionen sind nun aber symmetrisch zur y-Achse, also liegen auch die *Nullstellen* symmetrisch zur y-Achse. Wir wählen beispielsweise

$$\begin{aligned}
& x = -2 \;\vee\; x = -1 \;\vee\; x = 1 \;\vee\; x = 2 \\
\Leftrightarrow\;& x + 2 = 0 \;\vee\; x + 1 = 0 \;\vee\; x - 1 = 0 \;\vee\; x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\;& (x + 2) \bullet (x + 1) \bullet (x - 1) \bullet (x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\;& (x + 2) \bullet (x - 2) \bullet (x + 1) \bullet (x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\;& (x^2 - 4) \bullet (x^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\;& x^4 - 5x^2 + 4 = 0
\end{aligned}$$

Unsere Differenzfunktion sei nun also $d(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
Nun wählen wir uns eine beliebige Funktion f 4. Grades, z.B. $f(x) = 2x^4$. Wegen $d(x) = f(x) - g(x)$ gilt auch $d(x) - f(x) = - g(x)$, und daraus folgt $f(x) - d(x) = g(x)$

$$\begin{aligned}
& 2x^4 - (x^4 - 5x^2 + 4) = g(x) \\
\Leftrightarrow\;& 2x^4 - x^4 + 5x^2 - 4 = g(x) \\
\Leftrightarrow\;& x^4 + 5x^2 - 4 = g(x)
\end{aligned}$$

Und nun können wir die Aufgabe stellen, als wüßten wir von nichts:

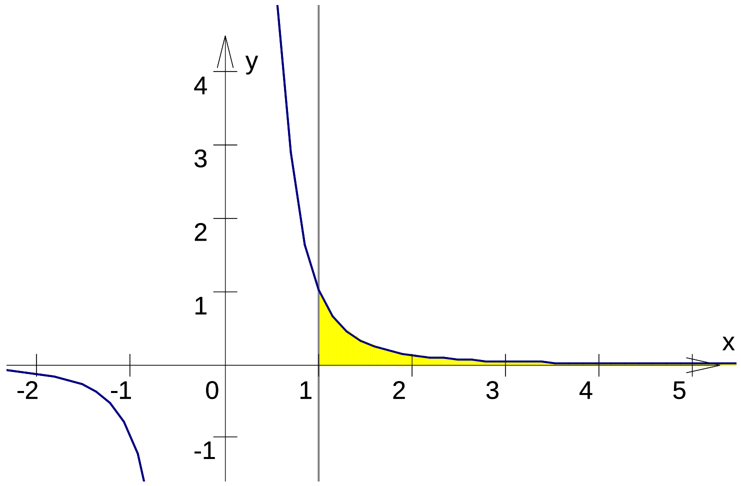
Berechne die Fläche, die $f(x) = 2x^4$ und $g(x) = x^4 + 5x^2 - 4$ einschließen!

Der Lösungsweg sei nur angedeutet:
1. Bestimmung der Differenzfunktion d(x)
2. Suche nach deren Nullstellen (wir haben oben schon dafür gesorgt, daß sie einfach zu finden sind und in -2;-1;1;2 liegen).
3. Integration von d über den Intervallen [-2;-1], [-1;1] und [1;2]

4. Aufsummieren der Beträge der sich ergebenden Integrale ergibt die Fläche zwischen d und der x-Achse.
5. Diese ist gleich der Fläche zwischen f und g.

Unendlich breite/hohe Flächen

Zu bestimmen ist die Fläche zwischen f: $y = \frac{1}{x^3}$, der x-Achse und der Parallelen zur y-Achse durch x = 1:



Die (hervorgehobene) Fläche hat nun einerseits eine unendliche *große* Breite (von x = 1 bis + ∞), andererseits aber eine *geringe* Höhe, die sogar für $x \to +\infty$ unendlich klein wird.
Läßt sich diese Fläche nun überhaupt *berechnen*, und wenn ja, ist sie unendlich groß oder nimmt sie einen *bestimmten Zahlenwert* an?
Wir benutzen dazu einen Trick, integrieren nämlich erstmal nicht bis + ∞ (wie sollte man auch damit rechnen?), sondern nur bis zu n:

$$\underline{\int_1^n \frac{1}{x^3}dx} = -\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{x^2}\Big|_1^n = -\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{n^2} - \left(-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1^2}\right) = -\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{n^2}}$$

oder kurz $$\int_1^n \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{n^2}$$

Und daraus folgt $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx = \lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^3}dx = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2^n}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}$$

Obwohl die (gestrichelte) Fläche also *unendlich breit* ist, ist sie (wider Erwarten) genau $\frac{1}{2}$ groß (und keineswegs *un*endlich).
Das erscheint einem anschaulich fast unmöglich (und hier zeigt sich mal wieder: die Mathematik kann weiter reichen als die Anschauung - und ist deshalb nicht weniger richtig).

Und doch kann man sich das Problem halbwegs veranschaulichen: angenommen, wir bilden Rechtecke der Länge x und der Breite $\frac{1}{x}$. Ihre Fläche ist dann $F = x \bullet \frac{1}{x} = 1$, also *unabhängig* von der Wahl des x konstant 1. Das gilt also insbesondere auch für *riesig lange* (sehr großes x), dafür aber sehr *schmale* Rechtecke.

Und Rechtecke der Länge x und der Breite $\frac{1}{x^2}$ haben die Fläche $F = x \bullet \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$. Für sehr große Breite (x) konvergiert ihre Fläche also sogar gegen Null.

Abi-Aufgaben: Analysis

Aufgabe:

Zu untersuchen ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = (mx + n) \bullet e^{(m + n)x}$

1) Bestimme m und n so, daß der Graph G_f der Funktion die y-Achse bei y = 1 schneidet und dort die Steigung - 3 hat.
2) Diskutiere die Funktion f mit $f(x) = (1 - 2x) \bullet e^{-x}$ (Nullstellen, relative Extrempunkte, Wendepunkte, Verhalten für $x \to \pm \infty$), und zeichne G_f.
3) Bestimme a und b so, daß F mit $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$ Stammfunktion zu f ist. [Ergebnis: a = 2, b = 1]
4) Berechne jeweils den Inhalt der Fläche, die
   a) G_f im 1. Quadranten mit den beiden positiven Koordinatenachsen einschließt;
   b) zwischen G_f und x-Achse im 4. Quadranten liegt.

5a) In die in 4a) beschriebene Fläche soll ein Rechteck OABC mit möglichst großem Flächeninhalt so gelegt werden, daß O der Ursprung ist und B auf G_f liegt.
Bestimme die Koordinaten von B sowie den zugehörigen Flächeninhalt.

b) In die in 4b) genannte Fläche soll ein rechtwinkliges Dreieck NAB so gelegt werden, daß N der x-Achsenabschnitt von G_f ist und A auf der x-Achse, B auf G_f und der rechte Winkel bei A liegt.
Welche Koordinaten hat A, wenn der Dreiecksinhalt maximal sein soll, und wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?
[Zwischenergebnis: Zielfunktion ist $A(x) = (x^2 - x + 0{,}25) \bullet e^{-x}$.]

Lösung:

zu 1): α) f schneidet die y-Achse in y = 1 genau dann, wenn f(0) = 1

$f(x) = (mx + n) \bullet e^{(m + n)x} \Rightarrow f(0) = (m \bullet 0 + n) \bullet e^{(m + n) \bullet 0} = 1$

$\Leftrightarrow \quad n \bullet 1 = 1 \Leftrightarrow n = 1$

$\Rightarrow f(x) = (mx + 1) \bullet e^{(m + 1)x}$

ß) Die Steigung da ist -3 genau dann, wenn $f\,'(0) = -3$

$f(x) = (mx + 1) \bullet e^{(m + 1)x} \Rightarrow f\,'(x) = m \bullet e^{(m + 1)x} + (mx + 1) \bullet (m + 1)\, e^{(m + 1)x} =$

$\Rightarrow f\,'(0) = m \bullet e^{(m + 1) \bullet 0} + (m \bullet 0 + 1) \bullet (m + 1)\, e^{(m + 1) \bullet 0} =$

$= m \bullet 1 + 1 \bullet (m + 1) \bullet 1 =$

$= 2m + 1$

$2m + 1 = -3 \Leftrightarrow m = -2$

$\Rightarrow f(x) = (-2x + 1) \bullet e^{-x}$ bzw. $f(x) = f(x) = (1 - 2x) \bullet e^{-x}$

Anmerkung: hier sieht man deutlich, wie Abi-Aufgaben zusammengestellt sind: in Aufgabe 1) ergibt sich das Ergebnis, mit dem in Aufgabe 2) weiter gerechnet werden soll. Diesen Zusammenhang sieht man aber erst, wenn man Aufgabe 1) korrekt ausgerechnet hat. Allerdings: wenn man zu Aufgabe 1) keine Lösung gefunden hat, kann man Aufgabe 2) *dennoch* behandeln, weil da die Funktion f mit $f(x) = (1 - 2x) \bullet e^{-x}$ doch nochmal angegeben wurde.

zu 2): α) f hat Nullstellen genau dann, wenn f(x) = 0

$f(x) = (1 - 2x) \bullet e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5 \Rightarrow N(0{,}5|0)$

ß) I) Überprüfung, wann $f\,'(x) = 0$

$$f(x) = (1 - 2x) \bullet e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -2 \bullet e^{-x} + (1 - 2x) \bullet (-1) \bullet e^{-x} =$$
$$= [-2 + (1 - 2x) \bullet (-1)] \bullet e^{-x} =$$
$$= [-2 - 1 + 2x] \bullet e^{-x} =$$
$$= [-3 + 2x] \bullet e^{-x} = 0$$
$$\Leftrightarrow -3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$$

II) Bestimmung des y-Wertes/zugehörigen Punktes

$$f(1{,}5) = (1 - 2 \bullet 1{,}5) \bullet e^{-1{,}5} = -2 \bullet e^{-1{,}5} \approx -0{,}4462$$
$$\Rightarrow M \approx (1{,}5| -0{,}4462)$$

III) Überprüfung, ob $f''(1{,}5)$ größer oder kleiner als 0

$$f'(x) = [-3 + 2x] \bullet e^{-x} \Rightarrow f''(x) = 2 \bullet e^{-x} + (-3 + 2x) \bullet (-1) \bullet e^{-x} =$$
$$= [2 + (-3 + 2x) \bullet (-1)] \bullet e^{-x} =$$
$$= [2 + 3 - 2x] \bullet e^{-x} =$$
$$= [5 - 2x] \bullet e^{-x}$$
$$\Rightarrow f''(1{,}5) = [5 - 2 \bullet 1{,}5] \bullet e^{-1{,}5} = 2 \bullet e^{-1{,}5} > 0 \Rightarrow \text{in M liegt ein Minimum vor.}$$

γ) I) Überprüfung, wann $f''(x) = 0$

$$f''(x) = = [5 - 2x] \bullet e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}5$$

II) Bestimmung des y-Wertes/zugehörigen Punktes

$$f(2{,}5) = (1 - 2 \bullet 2{,}5) \bullet e^{-2{,}5} = -4 \bullet e^{-2{,}5} \approx -0{,}3283$$
$$\Rightarrow W \approx (2{,}5| -0{,}3283)$$

III) Überprüfung, ob $f'''(2{,}5) \neq 0$

$$f''(x) = = [5 - 2x] \bullet e^{-x} \Rightarrow f'''(x) = -2 \bullet e^{-x} + (5 - 2x) \bullet (-1) \bullet e^{-x} =$$
$$= [-2 + (5 - 2x) \bullet (-1)] \bullet e^{-x} =$$
$$= [-2 - 5 + 2x] \bullet e^{-x} =$$
$$= [-7 + 2x] \bullet e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'''(2{,}5) = [-7 + 2 \bullet 2{,}5] \bullet e^{-x} = -2 \bullet e^{-x} \neq 0$$

δ) Für $x \to \pm\infty$ setzt sich immer die e-Funktion e^{-x} durch. Der Term $(1 - 2x)$ kann nur eine Spiegelung an der x-Achse bewirken, falls $1 - 2x < 0$

I) $x \to +\infty$

$\Rightarrow e^{-x} \to 0$

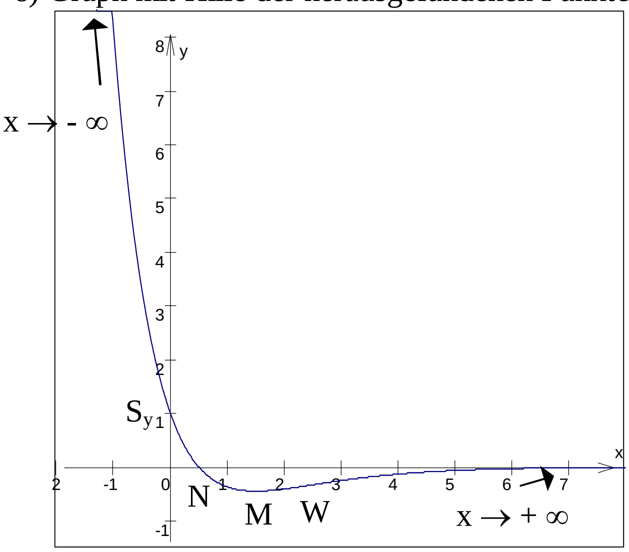
Weil aber $1 - 2x < 0$ für $x > 0{,}5$, geht $(1 - 2x) \bullet e^{-x}$ von unten gegen die x-Achse

II) $x \to -\infty$

$\Rightarrow e^{-x} \to +\infty$

Weil aber $1 - 2x > 0$ für alle negativen x, geht auch $(1 - 2x) \bullet e^{-x}$ gegen $+\infty$

ε) Graph mit Hilfe der herausgefundenen Punkte/Eigenschaften (S_y aus 1):



zu 3): F mit $F(x) = (ax + b) \bullet e^{-x}$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung genau dann Stammfunktion von f mit $f(x) = (1 - 2x) \bullet e^{-x}$, wenn $F'(x) = f(x) = (1-2x) \bullet e^{-x}$

$$F(x) = (ax + b) \bullet e^{-x} \Rightarrow F'(x) = a \bullet e^{-x} + (ax + b) \bullet (-1) \bullet e^{-x} =$$
$$= [a + (ax + b) \bullet (-1)] \bullet e^{-x} =$$
$$= [a - ax - b] \bullet e^{-x} =$$
$$= [a - b - ax] \bullet e^{-x} =$$
$$= (1 - 2x) \bullet e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow a - b = 1 \wedge - a = -2$$
$$\Leftrightarrow a - b = 1 \wedge a = 2$$
$$\Leftrightarrow 2 - b = 1 \wedge a = 2$$
$$\Leftrightarrow b = 1 \wedge a = 2$$

Also ist F mit $F(x) = (2x +1) \bullet e^{-x}$ die gesuchte Stammfunktion zu f mit $f(x) = (1 - 2x) \bullet e^{-x}$

zu 4a): $$\int_0^{0,5} (1 - 2x) \bullet e^{-x}\,dx = (2x +1) \bullet e^{-x}\Big|_0^{0,5} = [(2 \bullet 0,5 + 1) \bullet e^{-0,5}]-[(2 \bullet 0 + 1) \bullet e^{0}] =$$
$$= 2 \bullet e^{-0,5} - 1 \approx$$
$$\approx 0,2130$$

$\Rightarrow$ die gesuchte Fläche hat die Maßzahl + 0,2130

zu 4b): $$\int_{0,5}^{\infty} (1 - 2x) \bullet e^{-x}\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{0,5}^{n} (1 - 2x) \bullet e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \Big[(2x +1) \bullet e^{-x}\Big|_{0,5}^{n}\Big] =$$

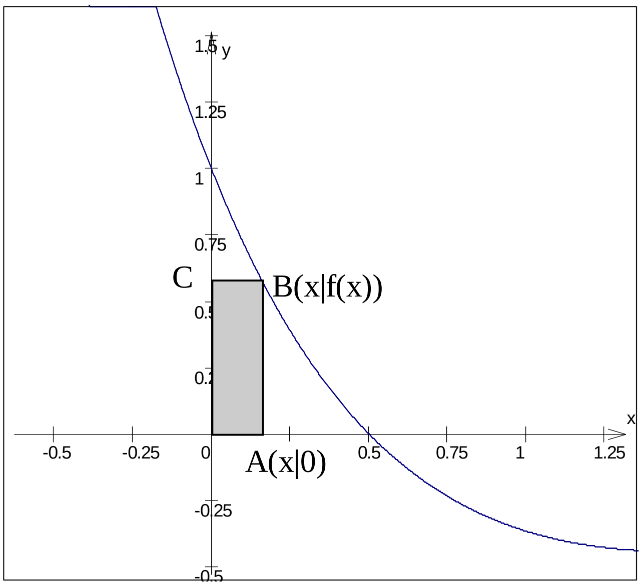
$$= \lim_{n \to +\infty} \Big[[(2 \bullet n + 1) \bullet e^{-n}]-[(2 \bullet 0,5 + 1) \bullet e^{-0,5}]\Big] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \Big[\underbrace{(2 \bullet n + 1) \bullet e^{-n}}_{\to 0} - 2 \bullet e^{-0,5} \Big] =$$

$$= - 2 \bullet e^{-0,5} \approx -1,2130 \text{ (negatives Integral)}$$

$\Rightarrow$ die gesuchte Fläche hat als Maßzahl $\approx$ + 1,2130

zu 5a): Zeichnen wir uns vorerst die gegebene Fläche unter f sowie das gesuchte Rechteck vergrößert raus:



Die Fläche A_R (x) des Rechtecks berechnet sich zu

$A_R (x) = \quad x \quad \bullet \quad f(x) \quad = x \bullet (1 - 2x) \bullet e^{-x} = (x - 2x^2) \bullet e^{-x}$

Breite • Höhe

Zielfunktion ist also $A_R (x) = (x - 2x^2) \bullet e^{-x}$

Minimaxrechnung:

I) Wann wird $A_R{}'(x) = 0$?

$A_R (x) = (x - 2x^2) \bullet e^{-x}$

$\Rightarrow A_R{}'(x) = (1 - 4x) \bullet e^{-x} + (x - 2x^2) \bullet (-1) \bullet e^{-x} =$

$= [1 - 4x \quad - \quad x + 2x^2 \quad] \bullet e^{-x} =$

$= [2x^2 - 5x + 1 \quad] \bullet e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 1 \qquad = 0 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \qquad = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \qquad = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - \frac{5}{4})^2 \quad - \quad \frac{17}{16} \qquad = 0 \qquad |+ \frac{17}{16}$

$\Leftrightarrow \quad (x - \frac{5}{4})^2 \qquad = \frac{17}{16} \qquad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow x - \frac{5}{4} = + \frac{\sqrt{17}}{4} \quad \vee x - \frac{5}{4} = - \frac{\sqrt{17}}{4} \qquad | - \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \quad \vee x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \vee x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$

$\Rightarrow x \approx 2,2807 \quad \vee \quad x \approx 0,2192$

In unserem Fall ist nur $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \approx 0,2192$ von Interesse, da nur dieses im Intervall [0;0,5] liegt.

II) Überlegung, ob für $x = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ ein Minimum oder ein Maximum des Flächeninhalts $A_R(x)$ vorliegt; Randwertevergleich:

$A_R(x) = (x - 2x^2) \bullet e^{-x}$

$A_R(0) = (0 - 2\bullet 0^2) \bullet e^{-0} = 0$

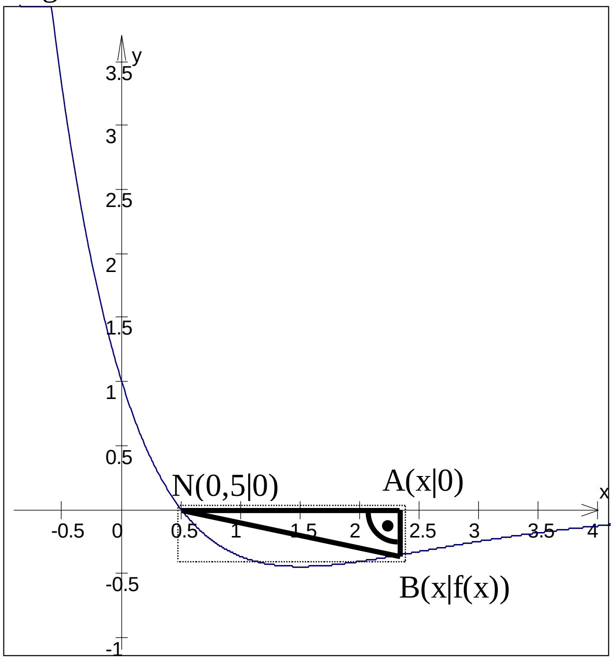
$A_R(0{,}5) = (0{,}5 - 2 \bullet 0{,}5^2) \bullet e^{-0{,}5} = 0$

$$A_R\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) = \left[\frac{5-\sqrt{17}}{4} - 2\bullet\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^2\right]\bullet e^{-\frac{5-\sqrt{17}}{4}} \approx 0{,}09887$$

Der Vergleich der Fläche für $x = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ mit den Flächen für x = 0 bzw. x = 0,5 ergibt, daß die Fläche für $x = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ ein Maximum annimmt.

Die gesuchte Rechtecksfläche hat für $x = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ als Maßzahl ≈ 0,09887

zu 5b): Zeichnen wir uns vorerst die gegebene Fläche unter f sowie das gesuchte Dreieck vergrößert raus:



Die Fläche des gesuchten Dreiecks ist genau halb so groß wie die des gestrichelt eingezeichneten Rechtecks. Dieses Rechteck hat die Länge x - 0,5 und die Höhe -f(x) (das Minuszeichen taucht auf, weil f(x) auf dem vorliegenden Intervall ja negativ ist), also die Fläche $A_R(x) = (x - 0{,}5) \bullet (-f(x))$

Damit hat das gesuchte Dreieck die Fläche

$A_D(x) = 0{,}5(x - 0{,}5) \bullet (-f(x)) =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \bullet(-(1-2x)e^{-x}) =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \bullet(2x - 1)\, e^{-x} =$

$= \frac{1}{2}\left(2x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} =$

$= \quad (x^2 - x + \frac{1}{4}) \quad e^{-x}$

Zielfunktion ist also $A_D(x) = (x^2 - x + \frac{1}{4})\, e^{-x}$

Minimaxrechnung:

I) Wann wird $A_D\,'(x) = 0$?

$A_D(x) = (x^2 - x + \frac{1}{4}) \bullet e^{-x}$

$\Rightarrow A_D\,'(x) = (2x - 1) \bullet e^{-x} + (x^2 - x + \frac{1}{4}) \bullet (-1) \bullet e^{-x} =$

$= [2x - 1 \quad - \quad x^2 + x - \frac{1}{4} \quad]\bullet e^{-x} =$

$= [-x^2 + 3x - \frac{5}{4} \quad]\bullet e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - \frac{5}{4} = 0 \quad | \bullet (-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1 = 0 \quad | + 1$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = +1 \quad \vee \quad x - \frac{3}{2} = -1 \quad | + \frac{3}{2}|$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + 1 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2} - 1$

$\Leftrightarrow x = 2{,}5 \quad \vee \quad x = 0{,}5$

In unserem Fall ist nur $x = 2{,}5$ von Interesse, da nur dieses im Intervall $[0{,}5;\infty[$ liegt.

II) Überlegung, ob für $x = 2{,}5$ ein Minimum oder ein Maximum des Flächeninhalts $A_D(x)$ vorliegt; Randwertevergleich:

$A_D(x) = (x^2 - x + \frac{1}{4}) \bullet e^{-x}$

$A_D(0{,}5) = (0{,}5^2 - 0{,}5 + \frac{1}{4}) \bullet e^{-x} = 0$

$A_D(x)$ konvergiert gegen 0 für $x \to \infty$

$A_D(2{,}5) = (2{,}5^2 - 2{,}5 + \frac{1}{4}) \bullet e^{-2{,}5} = 4 \bullet e^{-2{,}5} \approx 0{,}3283$

Der Vergleich der Fläche für $x = 2{,}5$ mit den Flächen für $x = 0{,}5$ bzw. $x \to \infty$ ergibt, daß die Fläche für $x = 2{,}5$ein Maximum annimmt.

Die gesuchte Dreiecksfläche hat für $x = 2{,}5$ als Maßzahl $\approx 0{,}3283$