Überblick Vektorgeometrie:

1. Definition des Vektors
   - Betrag, Richtung, Orientierung, *nicht* Lage $\Rightarrow$ Vektor ist Repräsentant einer Pfeilklasse
   - Unterscheidung Punkt-/Ortsvektor des Punktes
   - Kollinearität/Komplanarität
2. erste Vektorrechnungen
   - Vektoraddition/-subtraktion

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + / - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + / - c \\ b + / - d \end{pmatrix}$$

   - S-Multiplikation
     - Skalar[Zahl] • Vektor = Vektor;
     - $a \bullet \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \bullet b \\ a \bullet c \end{pmatrix}$
     - Verlängerung, Verkürzung, Gegenvektor
   - Rechenarten in Koordinatenschreibweise (Rechnungen verschieben sich in die Koordinaten, z.B Vektoradd. = Koordinatenadd.)
   - Vektorlänge aus Koordinaten
3. geometrische Beweise mit (geschlossenen) Vektorzügen
   (beachte: noch *keine* Geraden/Ebenen)
   - unbekannte Vektoren durch Summe bekannter ausdrücken
   - gesuchter Punkt auf Vektorzug
   - Teilverhältnisberechnung

4. Geraden/Ebenen in Punktrichtungs-/Mehrpunkteform
   (*parallele* Geraden/Ebenen sind nicht *gleich*)
   - Lageuntersuchungen von Geraden/Ebenen zueinander

Gerade/Gerade	Richtungsvektoren *kollinear*	Richtungsvektoren *nicht* kollinear.
Punkt(e) *gemeinsam*	Geraden gleich	Geraden schneidend Winkelberechnung
kein Punkt gemeinsam	Geraden parallel Abstandsberechnung	im 2-Dim.: unmöglich im 3-Dim.: windschief Abstandsberechnung

Ebene/Ebene	alle vier (!!!) Richtungsvektoren *komplanar*	mindestens einer der Richtungsvektoren nicht komplanar
Punkt(e) *gemeinsam*	Ebenen gleich	Schnittgerade Winkelberechnung
kein Punkt gemeinsam	Ebenen parallel Abstandsberechnung	nicht möglich

Gerade/Ebene	alle drei Richtungsvektoren *komplanar*	die drei Richtungsvektoren sind *nicht* komplanar
Punkt(e) *gemeinsam*	Geraden liegt in Ebene	Gerade durchstößt Ebene im "Spurpunkt" Winkelberechnung
kein Punkt gemeinsam	Geraden parallel zur Ebene Abstandsberechnung	nicht möglich

- Geraden/Ebenen einerseits und Einzelvektoren (mit denen g und E definiert sind) andererseits unterscheiden!:

Geraden/Ebenen	Vektoren
fest	beliebig verschiebbar
parallel, schneidend, windschief	kollinear/komplanar

5. Skalarprodukt (Vektor • Vektor = Skalar/Zahl)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = a \bullet c + b \bullet d$$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \bullet b \cos \gamma$, wobei γ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

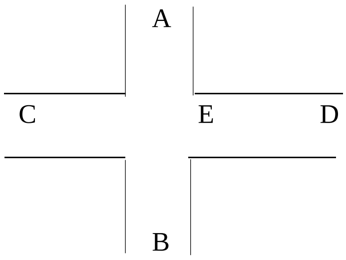
- Winkelberechnung (insbes. 90^0): $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander (falls $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ $\neq \vec{o}$)
- *nie* durch Vektoren teilen!!!
- im allgemeinen ist $\vec{a}\ \ (\vec{b}\ \ \vec{c})$ *ungleich* $(\vec{a}\ \ \vec{b})\ \ \vec{c}$!!!
  (ansonsten gelten bei allen Vektorrechnungsarten immer Komm.-, Assoz.-, Distr.-Gesetz)
- dringend S-Multiplikation/Skalarprodukt unterscheiden!!!

6. Geraden/Ebenen in Normalenformen
   (Punktnormalenform, allgemeine Normalenform, evtl. Hessesche Normalenform)
7. Umwandlung aller g/E-Formen ineinander
8. Abstandsberechnung
   alternativ: Differnz-/Lotvektor
   mit Hessescher Normalenform:
   - einer Gerade/Ebene vom Ursprung (Hessesche NF)
   - eines Punktes von einer g/E: Einsetzen in HNF.
9. Kreis/Kugel
   - Tangente(ngerade)/Tangentialebene
   - Lage Geraden/Ebenen/Kreise/Kugeln zueinander:
   - Schnittmengenbestimmung (Ein- oder Gleichsetzen).

Vektorgeometrie:
Vektordefinition, Addition, Subtraktion, S-Multiplikation

Vektordefinition

Die Vektorgeometrie löst mit einer neuen, auf Anhieb erstmal komplizierteren Denkweise viele alte geometrische Probleme sehr viel *einfacher*, vor allem im 3-Dimensionalen.
Euin weiterer Vorteil der Vektorgeometrie ist, daß man - mal abgesehen vom Umgang mit Gleichungssystemen - kaum Vorkenntnisse braucht.
Gegeben sei folgender physikalischer Versuchsaufbau: ein Wagen steht auf einer Kreuzung, und wir können ihn nur *auf* den sich kreuzenden Straßen, also in Richtung A, B, C oder D verschieben:



Die nun möglichen Bewegungen unterscheiden sich:

a) in der *Stärke* des Antriebs: je nachdem fährt der Wagen schneller oder langsamer. Stellen wir die Bewegung durch einen *Pfeil* dar, so könnte man die Stärke durch die *Länge* des Pfeils darstellen. Mathematisch nennen wir diese Länge "Betrag"

b) in der *Richtung*: der Wagen bewegt sich entweder auf der Geraden $\overline{CD}$ oder auf der Geraden $\overline{AB}$ hin und her: verwenden wir die *Pfeil*form, so läge es nahe, die erste Bewegung durch einen waagerechten, die zweite durch einen senkrechten Pfeil darzustellen

c) in der *Orientierung*: bewegt sich der Wagen auf der Geraden $\overline{CD}$, so macht es noch immer einen Unterschied, ob er sich von C nach D (nach rechts) oder umgekehrt von D nach C (nach links) bewegt. Verwenden wir also die *Pfeil*form, so läge es nahe, diesen Unterschied durch Pfeil*spitzen* klarzumachen (im ersten Fall Pfeilspitze nach rechts, im zweiten Fall nach links).

Befindet sich nun aber der Wagen auf dem Weg von E nach D, also unabänderlich in der vorgegebenen waagerechten Spur, so ist es egal, *wo* ich ihn an der hinteren Stoßstange schiebe. Oder anders gesagt: es ist schnuppe, wo der Pfeil angreift.
Damit sind wir bei einer wichtigen Unterscheidung bzw. Neudefinition:

a) <u>Pfeile</u> unterscheiden sich in 1) Betrag (Länge)
2) Richtung
3) Orientierung
4) Anfangspunkt bzw. *Lage*

b) <u>Vektoren</u> unterscheiden sich in 1) Betrag (Länge)
2) Richtung
3) Orientierung,
aber *nicht* im Anfangspunkt bzw. der *Lage*.

Man sagt auch: ein Vektor ist *Repräsentant einer Pfeilklasse* (vieler Pfeile), d.h. er steht für *alle* (unendlich viele) Pfeile, die in Betrag, Richtung und Orientierung übereinstimmen, sich aber im Anfangspunkt/der Lage unterscheiden.

D.h.

sind *unterschiedliche Pfeile* (Plural!, Lage verschieden), aber der *gleiche Vektor* (Singular!).
Lax gesagt: in *Pfeil*sprache gesprochen ist es durchaus interessant, *wo* mich ein Pferd tritt (am Kopf ist es gefährlicher als am Fuß), in *Vektor*sprache hingegen ist es schnuppe, wo es mich tritt (tötlich ist es allemal, bzw. interessant ist nur, mit welcher *Power* es mich tritt).

Für Vektoren führen folgende Schreibweise ein:

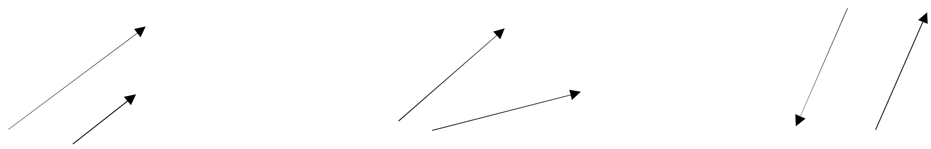
Vektoren werden mit einem Kleinbuchstaben mit einem *Pfeil* darüber notiert: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ... (im Unterschied zu Zahlen a,b,c ... und Punkten A, B, C ...)

Vorsicht, beliebter Fehler:

Von Anfang an genau zu unterscheiden sind *Vektoren* und *Punkte*: Zu jedem Punkt P im Koordinatensystem definiert man sich einen "Ortsvektor" $\vec{p}$, der den Ort/die Lage des Punktes insofern beschreibt, als er im *Ursprung* beginnt und in P endet. Der Punkt P ist also nur der *Endpunkt* seines Orts*vektors*. *Orts*vektoren sind die einzigen Vektoren, bei denen Anfangs- (Ursprung) und Endpunkt (P) *fest* sind (die also *nicht* parallelverschiebbar sind).

Folge der Vektordefinition ist:

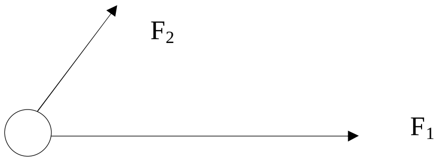
Vektoren bleiben (im Gegensatz zu Pfeilen) bei der Parallelverschiebung sie *selbst*, da bei der Parallelverschiebung Betrag, Länge und Orientierung gleichbleiben:



unterscheiden sich nur im *Betrag*	unterscheiden sich nur in der *Richtung* (Orientierung unvergleichbar, da schon Richtung verschieden)	unterscheiden sich nur in der *Orientierung*

Addition zweier Vektoren

Wir hatten die Vektoren an dem Beispiel eingeführt, daß ein Wagen bewegt bzw. eine Kraft auf ihn ausgeübt wird. Da stellt sich gleich die Frage, was passiert, wenn *zwei* Kräfte einwirken.
Um das zu betrachten, lösen wir uns vom obigen Beispiel mit vorgegebenen *Spuren*. Unser neues Beispiel sehe also so aus, daß eine Kugel *beliebig* auf einem Tisch hin- und herrollen kann und auf sie *zwei* Kräfte F_1 und F_2 einwirken (eine Kraft wirkt nach *rechts*, die andere nach *rechts oben*):

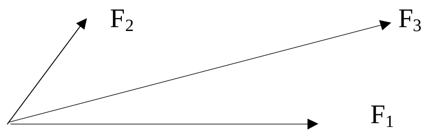


Nun gibt es gute Gründe, die Zeichnung zu *abstrahieren*:

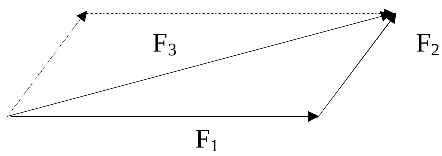
1. Physiker schauen sich nicht die *ganze* Kugel an, sondern es reicht zur Beschreibung vollständig, wenn man so tut, als sei ihre ganze Masse in einem Masse*punkt* konzentriert (d.h. wir schrumpfen die Kugel auf ihren Mittelpunkt M)
2. die Kräfte sollen also nicht mehr an *verschiedenen* Punkten der Kugeloberfläche, sondern im Punkt M angreifen. Die dazu nötige Verschiebung der Vektoren bzw. Vektoranfangspunkte in den Punkt M ist für uns kein Problem mehr, da Vektoren nach Definition beliebig parallelverschiebbar sind.

Damit sieht unser Bild so aus:

Die Frage ist nun, *wohin* sich die Kugel bewegt, wenn beide Kräfte *gleichzeitig* wirken: das kann nicht allein in Richtung von F_1 (also nur nach rechts) sein, weil F_2 von dieser Bahn ablenkt (und umgekehrt kann es nicht allein in Richtung von F_2 sein). Anzunehmen ist also eine Richtung irgendwo *zwischen* der von F_1 und der von F_2. In der Tat ergäbe ein physikalischer Versuch, daß sich die Kugel in Richtung von F_3 bewegt:

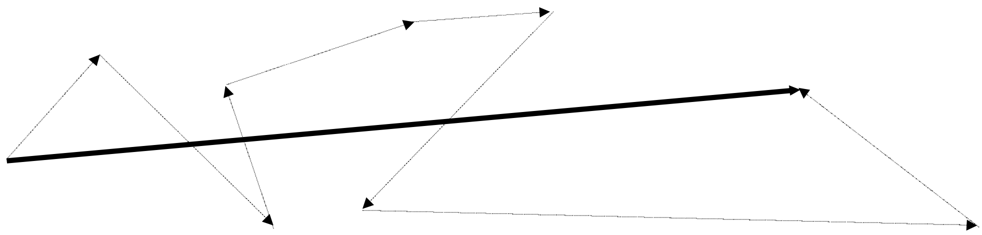


Schaut man sich das genau an, so ergibt sich für die Summe $F_3 = F_1 + F_2$ der beiden Vektoren F_1 und F_2:



D.h., zwei Vektoren F_1 und F_2 werden <u>addiert</u>, indem man den zweiten Vektor F_2 mit seinem Anfangspunkt in den Endpunkt des ersten Vektors F_1 legt.
Der *Summenvektor* $F_3 = F_1 + F_2$ hat dann als Anfangspunkt den Anfangspunkt des *ersten* Vektors F_1 und als Endpunkt den Endpunkt des *zweiten* Vektors F_2.
Der Summenvektor F_3 verbindet also den Anfangspunkt des ersten Vektors F_1 mit dem Endpunkt des zweiten Vektors F_2.

Für die Addition von *mehr* als zwei Vektoren folgt daraus: man legt sich alle *hintereinander* und braucht dann nur noch den Anfangspunkt des *ersten* mit dem Endpunkt des *letzten* zu verbinden:



Koordinatenschreibweise von Vektoren

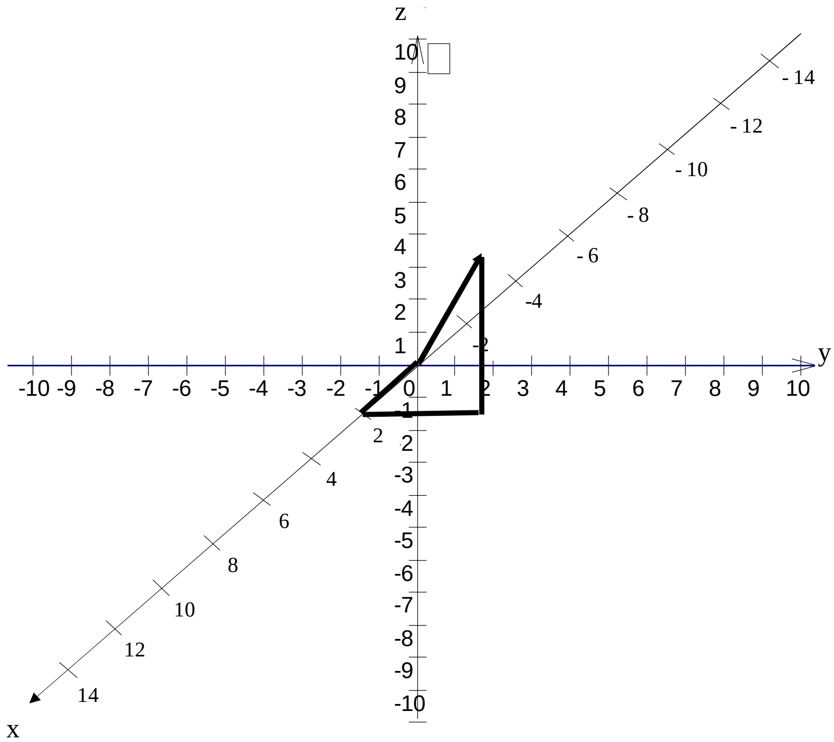
Bisher können wir Vektoren nur *zeichnen*, nicht aber *zahlenmäßig* festlegen. Üblicherweise zeichnet man in 2- bzw. 3-dimensionalen (kartesischen) *Koordinatensystemen*, also in einem Achsensystem, dessen Achsen *senkrecht* aufeinander stehen und *gleiche* Maßstäbe haben (man beachte immer, daß jede der Achsen auch über den Ursprung hinweg ins Negative geht).
Im 3-Dimensionalen hilft die "*Linke*-Hand-Regel": Daumen = x-Achse auf mich zu, Mittelfinger = y-Achse nach rechts, Zeigefinger = z-Achse nach *oben* (in Klausuren schreibe man sich das ruhig auf seine Fingerchen).
(Vorverweis: als Geraden nehme man sich später Stifte zur Hilfe, als Ebenen Papierblätter, als Kreise Geldstücke und als Kugeln Äpfel o.ä.)
Da Vektoren beliebig verschiebbar sind, legen wir sie für die Koordinatenschreibweise mit ihrem Anfangspunkt grundsätzlich in den Koordinaten*ursprung*. Wenn das so einheitlich geregelt ist, brauchen wir zur eindeutigen Darstellung des Vektors also nur noch die Koordinate des *End*punkts anzugeben:

Koordinatenschreibweise von Vektoren
(im 2-Dimensionalen fehlt die 3. bzw. z-Koordinate)
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist der Vektor, dessen Anfangspunkt im Ursprung liegt und dessen Endpunkt die x-Koordinate 2, die y-Koordinate 3 und die z-Koordinate 5 hat. Die Koordinaten sind dabei normale *Zahlen*.
So erstmal definiert, ist der Vektor dann natürlich beliebig parallelverschiebbar.

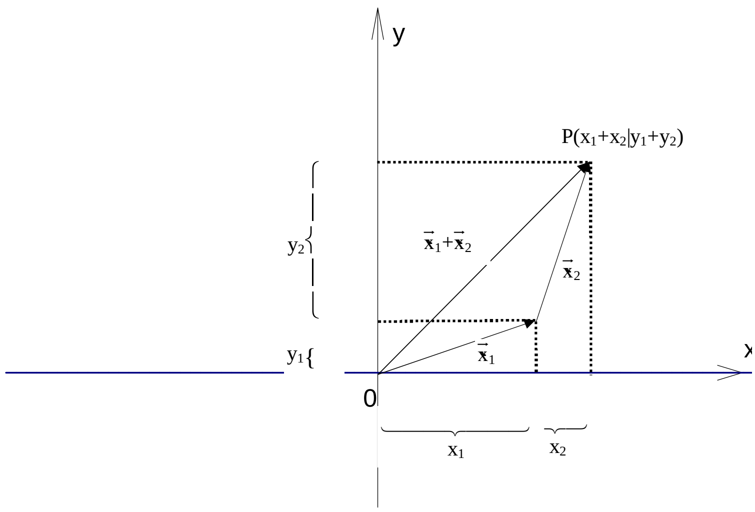
Vorsicht!: die Schreibweise eines *Punktes* P und *Vektors* $\vec{p}$ unterscheiden sich also folgendermaßen:

P(x|y|z), also Koordinaten *nebeneinander*, $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, also Koordinaten *untereinander*.

Gezeichnet wird der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ folgendermaßen: ich gehe auf der x-Achse um 2 nach vorne, dann 4 parallel zur y-Achse und von dort aus nochmals 3 parallel zur z-Achse. Im 2-Dimensionalen (auf einem Blatt Papier) und im 3-Dimensionalen (z.B. im Klassenraum) ist das kein Problem, schwieriger wird es aber, wenn man sich das 3-Dimensionale 2-dimensional aufzeichnet, weil dann ja die y-Achse in einem 45^0-Winkel zur x- und z-Achse eingezeichnet wird, obwohl sie in *Wirklichkeit* mit den beiden anderen Achsen einen *rechten* Winkel bildet:



Zurück zur Vektoraddition:



Die Abbildung zeigt im Zweidimensionalen: die *Vektor*addition ist gleichbedeutend mit der Addition der *Koordinaten*. Allgemein:

Koordinatenschreibweise der Vektoraddition:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

d.h. *Vektoren* werden addiert, indem man jeweils ihre *Koordinaten* addiert. Koordinaten aber sind ganz normale *Zahlen*, und die können wir bereits seit der Grundschule addieren.

Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor

Statt z.B. $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ kann man auch kurz $3\bullet\vec{a}$ schreiben. $3\bullet\vec{a}$ ist also ein Vektor, der die *gleiche Richtung und Orientierung* wie $\vec{a}$ hat, aber 3mal so *lang* ist. Damit aber sind wir bei der sogenannten S-Multiplikation (Zahlen heißen ab sofort Skalare):

S-Multiplikation ist die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar/einer Zahl b derart, daß der Vektor $\vec{a}$ auf das |b|-fache verlängert wird. Das Ergebnis ist also wieder ein *Vektor*. (zu unterscheiden von der Multiplikation *zweier Vektoren* miteinander, die wir später durchnehmen).

Für $b = 0$ erhält man den "Nullvektor" $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

für $b = 1$ bleibt $\vec{a}$ unverändert,
für $0 < b < 1$ wird er verkürzt (z.B. bei $b = 1/2$ wird er halb so lang),
für $b > 1$ wird er verlängert und
für negatives b definiert man sich, daß es zusätzlich zur Verlängerung die *Orientierung* von $\vec{a}$ *umdrehen* soll.

Analog zu $3\bullet\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$ definiert man allgemein:

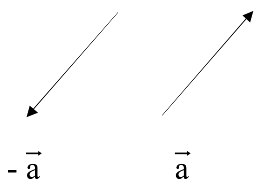
Koordinatenschreibweise der S-Multiplikation:

$$a\bullet\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bullet x \\ a\bullet y \\ a\bullet z \end{pmatrix},$$

d.h. ein *Vektor* wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jede seiner *Koordinaten* mit dem Skalar multipliziert.
Das aber ist eine reine *Zahlen*multiplikation, die wir schon aus der Grundschule kennen.
Vorsicht: niemals den Koeffizienten nur mit *einer* Koordinate multiplizieren!

Subtraktion zweier Vektoren

Aus der S-Multiplikation folgt, daß $-\vec{a} = (-1)\bullet\vec{a}$ der Vektor ist, der *gleichen Betrag* und *gleiche Richtung* wie $\vec{a}$ hat, aber *entgegengesetzte Orientierung*:



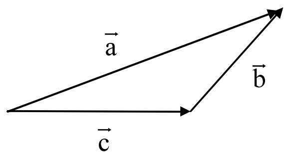
Addiert man diesen Vektor $-\vec{a}$ mit üblicher Vektoraddition zu $\vec{a}$, so erhält man den Nullvektor (Betrag 0).
Deshalb, und weil außerdem $-\vec{a}$ sich von $\vec{a}$ nur in der *Orientierung* unterscheidet (Vektoranfang und -spitze vertauscht), nennt man $-\vec{a}$ auch den *Gegenvektor* zu $\vec{a}$ (vgl: -5 ist die Gegen*zahl* zu 5 bzgl. der Addition, denn -5+5=0). Insbesondere gilt:

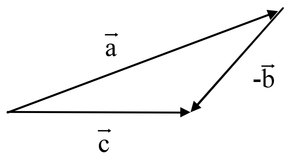
Jeder Vektor $\vec{a}$ hat einen *Gegenvektor*, nämlich $-\vec{a}$ (vgl.: Gegenzahl zu -4 ist 4).

In Koordinatenschreibweise: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $-\vec{a}$ ist $-(-\vec{a}) = \vec{a}$, also sind $-\vec{a}$ und $\vec{a}$ *gegenseitig* Gegenvektoren zueinander.

Ist $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$, so ist $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$ (#)





Soll nun analog zur Zahlensubtraktion gelten

$$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \quad (\#\#)$$

so liegt es beim Vergleich von (#) und (##) nahe zu definieren:

<u>Vektorsubtraktion:</u>
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, d.h. man *subtrahiert* einen Vektor $\vec{b}$ von einem Vektor $\vec{a}$, indem man zu $\vec{a}$ den *Gegenvektor* $-\vec{b}$ *addiert*.
In Koordinatenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \left[-\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie:
Rechenregeln, Kollinearität, Komplanarität, Einheitsvektor, Länge

Vektorrechenregeln

Auch alle folgenden *Vektor*rechenregeln könnte man mittels der bekannten Regeln für die Vektoraddition und S-Multiplikation auf bereits bekannte *Zahlen*rechenregeln für die Koordinaten zurückführen, z.B. das Kommutativgesetz für *Vektoren* auf das für *Zahlen* (was hier nicht durchgeführt werden soll):

1. Kommutativgesetz (für Vektoraddition): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. Kommutativgesetz (für S-Multiplikation): $a \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet a$

Assoziativgesetz: $a\bullet(b\bullet\vec{c}) = (a\bullet b)\bullet\vec{c}$

1. Distributivgesetz (für *zwei Skalare*): $(a+b)\bullet\vec{c} = a\bullet\vec{c} + b\bullet\vec{c}$
2. Distributivgesetz (für *zwei Vektoren*): $a\bullet(\vec{b}+\vec{c}) = a\bullet\vec{b} + a\bullet\vec{c}$

Oder kürzer: bedenkt man immer, daß sich *Vektor*rechnungen in die *Koordinaten* verschieben, so funktionieren *Vektoraddition* und *S-Multiplikation* genauso wie *Zahlen*additionen und -multiplikationen. Also "nichts Neues unter der Sonne" (das ändert sich erst beim Skalarprodukt, s.u.).

Linearkombinationen/lineare (Un-)Abhängigkeit

Eine Summe (Differenz) der Form

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\,\vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n$$

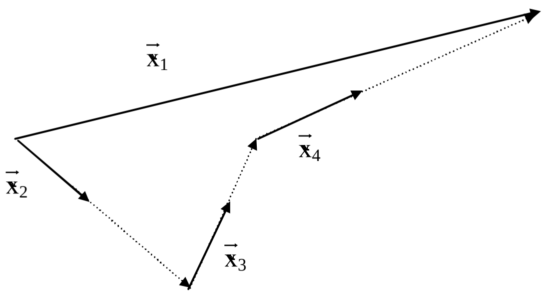
mit $a_1 ... a_n \in \mathbb{R}$ nennt man „Linearkombination" der Vektoren $\vec{x}_1 ... \vec{x}_n$.

Man könnte solche eine Form wie $a_1\vec{x}_1 + a_2\,\vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n$ in Analogie zur Algebra ($a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_nx_n$) auch „Vektoren-Polynom" nennen. „Linear" heißt der Ausdruck $a_1\vec{x}_1 + a_2\,\vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n$ in Analogie zur Algebra (y = mx + c ist Gleichung einer Gerade = Linie) , weil die Vektoren nie mit höherem Exponenten als 1 auftreten.

Beispiel: $3\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix} - \sqrt{7}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ ist eine der möglichen Linearkombinationen der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$

Mehrere Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 ... \vec{x}_n$ heißen „linear abhängig" voneinander, wenn einer davon als Linearkombination der anderen darstellbar ist, also z.B. $\vec{x}_1 = a_2\,\vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n$ (wenn es also enstsprechende $a_2 ... a_n \in \mathbb{R}$ tatsächlich gibt).
Ist das nicht der Fall, so heißen die Vektoren „linear *un*abhängig".

Anschaulich heißt das: der Vektor $\vec{x}_1$ ist als „Vektorzug" (Hintereinanderlegen, Addition) aus den verlängerten, verkürzten und evtl. in ihrer Orientierung umgedrechten Vektoren $\vec{x}_2 ... \vec{x}_n$ darstellbar:.
Beispiel: $\vec{x}_1$ ist als Vektorzug aus den entsprechend veränderten (gestrichelt) Vektoren $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ und $\vec{x}_4$ darstellbar:



Es folgt sofort eine nochmal wichtige Banalität: der Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist von *allen* anderen Vektoren $\vec{x}_2$ ... $\vec{x}_n$ linear abhängig, da immer gilt: $\vec{o} = 0 \bullet \vec{x}_2 + ... + 0 \bullet \vec{x}_n$.

Oftmals wird die lineare (Unab-)Hängigkeit noch anders formuliert, und das sei aus obiger Definition hergeleitet:

$$\begin{aligned} & \vec{x}_1 = a_2 \vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n \quad | - \vec{x}_1 \\ \Leftrightarrow\ & \vec{o} = - \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n \quad | \bullet a \\ \Leftrightarrow\ & \vec{o} = - a \bullet \vec{x}_1 + a \bullet a_2 \vec{x}_2 + ... + a \bullet a_n\vec{x}_n \\ \Leftrightarrow\ & \vec{o} = b_1 \vec{x}_1 + b_2 \vec{x}_2 + ... + b_n \vec{x}_n \end{aligned}$$

Zur ersten Zeile: laut Definition waren die Vektoren $\vec{x}_1$ ... $\vec{x}_n$ linear (un-)abhängig, wenn es (k)eine a_2 ... a_n gab, so daß $\vec{x}_1 = a_2 \vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n$. In die letzte Zeile übersetzt heißt das auf den ersten Blick: es gibt (k)eine b_1 ... b_n, so daß $\vec{o} = b_1 \vec{x}_1 + b_2 \vec{x}_2 + ... + b_n \vec{x}_n$. Das aber müssen wir uns noch genauer anschauen. Im Fall der linearen Unabhängigkeit kann es doch b_1 ... b_n geben, so daß $\vec{o} = b_1 \vec{x}_1 + b_2 \vec{x}_2 + ... + b_n \vec{x}_n$. Bei der Herleitung dieser letzten Gleichung hatten wir nämlich mit a multipliziert. Betrachten wir den Spzeialfall, daß a = 0 war. Dann sind laut Definition auch b_1 ... b_n Null.
Benennen wir nun b_1 ... b_n wieder in a_1 ... a_n um, so lautet eine weitere Definition der linearen (Un-)Ab-hängigkeit:

> Mehrere Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ ... $\vec{x}_n$ heißen „linear abhängig" voneinander, wenn es a_1 ... $a_n \in \mathbb{R}$ gibt, von denen zumindest *eins* (nämlich laut Argumentation a_1) $\neq 0$, so daß $\vec{o} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + ... + a_n \vec{x}_n$. Entsprechend: mehrere Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ ... $\vec{x}_n$ heißen „linear *un*abhängig" voneinander, wenn $\vec{o} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + ... + a_n \vec{x}_n$ *nur* für den Fall möglich ist, daß a_1 ... a_n *ausnahmslos alle gleich Null* sind.

Letzteres bedeutet anchaulich: der einzige geschlossene Vektorzug aus Vielfachen von $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ ... $\vec{x}_n$, der den Nullvektor $\vec{o}$ ergibt, ist in dem Fall möglich, daß *alle* a_1 ... a_n gleich Null sind, daß also im Grunde überhaupt kein Vektorzug zustande kommt.

Von besonderem Interesse ist nun aber die lineare Abhängigkeit *zweier* bzw. *dreier* Vektoren:

<u>lineare Abhängigkeit *zweier* Vektoren/Kollinearität</u>

> Zwei Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind linear abhängig (man sagt dann auch, sie seien „kollinear" und spricht von „Kollinearität"), wenn es a und b $\in \mathbb{R}$ gibt (nicht beide gleich 0), so daß

$$\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2,$$
wobei $\vec{o}$ der Nullvektor ist.
Ist *nur* die Darstellung mit a = b = 0 möglich, so heißen die Vektoren „linear *un*abhängig“ bzw. „*nicht* kollinear“.

Die Bedingung „nicht alle = 0“ (d.h. nicht a = 0 *und* b = 0) schließt einen trivialen Fall aus. Selbstverständlich gilt nämlich für *alle* (eben auch *nicht*kolineare) Vektoren $\vec{x}_1$, und $\vec{x}_2$, daß $0 \bullet \vec{x}_1 + 0 \bullet \vec{x}_2. = \vec{o}$.
Im Falle der Kollinearität muß der Nullvektor also auf *nicht*-triviale Weise (mindestens eins von a und b ≠ 0) als Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ darstellbar sein.

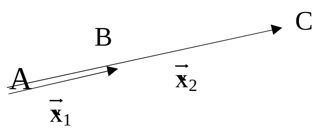
$\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2$ bedeutet schlicht und einfach, daß der Nullvektor $\vec{o}$ durch einen *geschlossenen Vektorzug* $a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2$ darstellbar ist, also durch die Summe aus Vielfachen von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$.

Schauen wir uns an, was das anschaulich bedeutet und wie es zur Bezeichnung „kollinear“ kommt. Gegeben seien drei Punkte A, B und C mit den Verbindungsvektoren $\vec{x}_1$ = AB und $\vec{x}_2$ = AC. Gefragt ist, ob die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden/(geraden) Linie liegen.
(Kurz vorweg: man erinnere sich, wie beschwerlich diese Frage in der Algebra zu beantworten wäre: man müßte z.B. die Gleichung der Geraden durch A und B mittels Zweipuntkeform aufstellen und dann untersuchen, ob auch die Koordinaten von C diese Gleichung erfüllen.)
Man mache sich vorweg noch klar:

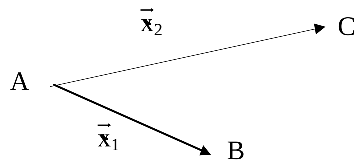
drei Punkte A, B und C liegen entweder auf einer *Geraden* oder aber in einer *Ebene* (selbst wenn sie „wild“ im dreidimensionalen Raum verteilt sind). Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

Das wird einem schnell klar, wenn man drei Finger einer Hand so hochhält, daß die Fingerspitzen *nicht* auf einer Geraden liegen (was ja die erste Möglichkeit wäre). Dann kann man auf die drei Finger eindeutig und stabil etwa einen Bierdeckel legen: die drei Fingerspitzen (Punkte) definieren eindeutig die Ebene.
Folge dieses Prinzips ist auch: dreibeinige Tische, können nie wackeln (selbst wenn ein Bein kürzer ist), weil die drei Tischfüße immer eine Ebene bilden, die mit dem ebenen Boden übereinstimmt (wir werden darauf zurückkommen: vierbeinige Tische können durchaus wackeln, wenn eins der Beine kürzer ist).
Es bleiben also bei drei Punkten nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: sie *liegen* auf einer Geraden



2. Möglichkeit: sie liegen *nicht* auf einer Geraden



Offensichtlich gilt im 1. Fall: die Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ haben dieselbe *Richtung* und nur unterschiedlichen Betrag und evtl. Orientierung. D.h., aber daß $\vec{x}_1$ (oder ein c-faches davon) als (evtl. negativ) Vielfaches von $\vec{x}_2$ darstellbar ist, daß es also ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $c \bullet \vec{x}_1 =$

$b \bullet \vec{x}_2$. $\Leftrightarrow \vec{o} = -c \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2$. Setzen wir nun a = - c, so erhalten wir $\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2$. Die beiden Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind also laut Definition linear abhängig bzw. kollinear.

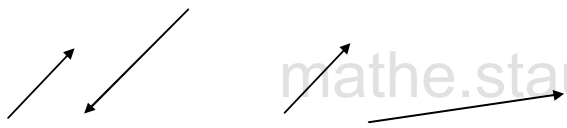
auf gerader Linie $\Leftrightarrow$ kollinear.

Selbstverständlich können auch *mehr* als zwei Vektoren kollinear sein, wenn jeweils *zwei* es sind.
Alle Vektoren gleicher Richtung (aber evtl. verschiedener Orientierung und verschiedenen Betrags) sind kollinear.

Damit zum 2. Fall: weil A, B und C *nicht* auf einer Gerade/(geraden) Linie liegen, unterscheiden sich $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ in ihren *Richtungen*. D.h. aber: jedes Vielfache $a \bullet \vec{x}_1$ geht in Richtung von $\vec{x}_1$ (außer für a = 0), jedes Vielfache $b\bullet \vec{x}_2$ geht in Richtung von $\vec{x}_2$ (außer für b = 0). Im Falle also, daß $a \neq 0$ *und* $b \neq 0$ ist, kommt man also nie zum Nullvektor $\vec{o}$ zurück. $\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2$ ist hier also nur für a = 0 *und* b = 0 möglich. Die beiden Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind also laut Definition *nicht* linear abhängig bzw. *nicht* kollinear.

Erste Folgerung:

Zwei Vektoren sind *kollinear*, wenn sie die *gleiche* Richtung haben, sich aber eventuell in Betrag und Orientierung unterscheiden, wenn sie also nach Verschieben auf einer *Gerade* (Linie) liegen:



kollinear nicht kollinear

Folgerung: Der Nullvektor $\vec{o}$ ist zu jedem Vektor $\vec{x}_1$ kollinear, denn
$\vec{o} = a \bullet \vec{o} + 0 \bullet \vec{x}_1$ auch für $a \neq 0$.

Man überprüft zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf Kollinearität, indem man einfach erstmal dreist gleichsetzt: $\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3$. Über ein Gleichungssystem 2. oder 3. Grades stellt sich dann heraus: entweder *gibt* es a und b (nicht beide gleich Null), so daß die Gleichung erfüllt ist $\Rightarrow$ es *liegt* Kollinearität vor; oder $\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2$. ist nur für a *und* b möglich $\Rightarrow$ es liegt *keine* Kollinearität vor.

Beispiele:

1. Sind $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ kollinear?

Wir setzen dreist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 6b \\ -3a + 9b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 0 = 2a - 6b \\ 0 = -3a + 9b \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\left\langle \begin{array}{l} a = 3b \\ a = 3b \end{array} \right.$. Nun können wir für b eine *beliebige* Zahl einsetzen, z.B. b = 1. Dann ist a = 3.

Es *gibt* also $a \neq 0$ und $b \neq 0$, für die die Ausgangsgleichung erfüllt ist. Also sind die beiden Ausgangsvektoren *kollinear*.

Natürlich hätten wir für b auch Null einsetzen können, und dann wäre auch a = 0. Dieser triviale Fall ist aber *immer* möglich. Für die Kollinearität hingegen ist es wichtig, ob auch der nicht-triviale Fall *möglich* ist, daß a und b nicht gleichzeitig 0 werden.

2. Sind $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ kollinear?

Wir setzen dreist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 6b \\ -3a + 12b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} 0 = 2a - 6b \\ 0 = -3a + 12b \end{matrix} \right.$

$\Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} a = 3b \\ a = 4b \end{matrix} \right.$. Wegen 3b = a = 4b muß gelten 3b = 4b, und das ist nur für b = 0 möglich. Dann ist aber auch a = 0. Die Die Anfangsgleichung ist also nur für a *und* b = 0 lösbar. Somit sind die Ausgangsvektoren *nicht* kollinear.

Halten wir schonmal als später wichtige Folgerung fest:

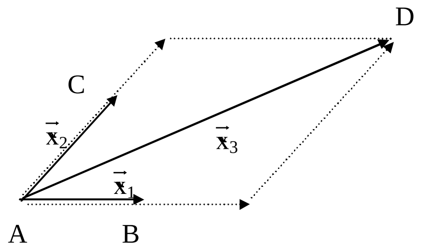
1. *ein* (Richtungs-)Vektor definiert bereits eine *Gerade* (alle Vielfachen von ihm bilden die Gerade), aber noch keine Ebene: die Ebene könnte noch um diesen einen Vektor rotieren.
2. *zwei nicht-kollineare* (Richtungs-)Vektoren definieren eine *Ebene*.

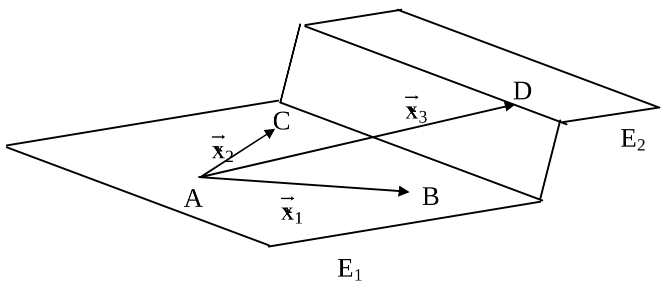
lineare Abhängigkeit *dreier* Vektoren/Komplanarität

Wir hatten oben gesehen: 3 Punkte A, B und C liegen entweder auf einer Geraden oder aber in einer Ebene (im folgenden E_1). Letzteren Fall wollen wir uns genauer anschauen. Offensichtlichlich liegt ein vierter Punkt D dann entweder auch in der Ebene E_1 oder aber außerhalb dieser:

1. Möglichkeit:
D liegt auch in E_1 (hier E_1 = Blattebene)

2. Möglichkeit:
D liegt auf einer anderen „Stufe“ als E_1
(hier in der zu E_1 parallelen Ebene E_2)





Im 1. Fall wird anhand der gestrichelten Vektoren deutlich, daß $\vec{x}_3$ (oder ein d-faches davon) als Linearkombination (Summe von Vielfachen) von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ darstellbar ist, daß es also a und b $\in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$d \bullet \vec{x}_3 = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2.$

$\Leftrightarrow \quad \vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. - d \bullet \vec{x}_3$

Setzen wir nun c = - d ein, so erhalten wir

$\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3$

Halten wir dafür sofort den Spezialnamen fest:

Drei Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ sind linear abhängig (man sagt auch „komplanar“; „plan“ wie in einer Ebene), wenn es a, b und c $\in \mathbb{R}$ gibt (nicht *alle* gleich Null), so daß

$$\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3,$$
wobei $\vec{o}$ der Nullvektor ist.
Ist *nur* die Darstellung mit a = b = c = 0 möglich, so heißen die Vektoren „linear *un*abhängig“ bzw. „*nicht* komplanar“.

Die Bedingung „nicht alle = 0“ (d.h. nicht a = 0 *und* b = 0 *und* c = 0) schließt einen trivialen Fall aus. Selbstverständlich gilt nämlich für *alle* (eben auch *nicht*komplanare) Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$. und $\vec{x}_3$, daß $0 \bullet \vec{x}_1 + 0 \bullet \vec{x}_2. + 0 \bullet \vec{x}_3 = \vec{o}$.
Im Falle der Komplanarität muß der Nullvektor also auf *nicht*-triviale Weise (mindestens eins von a, b und c ≠ 0) als <u>Linearkombination von $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$</u> darstellbar sein.

$\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3$ bedeutet schlicht und einfach, daß der Nullvektor $\vec{o}$ durch einen *geschlossenen Vektorzug* $a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3$ darstellbar ist, also durch die Summe aus Vielfachen von $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$.

Merkregel: in einer Ebene („Plane“) ⇔ kom<u>plana</u>r

Selbstverständlich können auch *mehr* als drei Vektoren komplanar sein, wenn jeweils *drei* (in allen Kombinationen!) es sind. Wir werden diesen Umstand später beim Vergleich zweier Ebenen gebrauchen.

Damit aber zum 2. Fall: *jedes Vielfache* $a \bullet \vec{x}_1$, $b \bullet \vec{x}_2$ und $c \bullet \vec{x}_3$ führt in eine spezielle Richtung (außer für a = 0, b = 0 und c = 0), die durch die jeweils *anderen beiden* Vielfachen nicht rückgängig zu machen ist. $\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3$ ist also *nur* für a = 0 *und* b = 0 *und* c = 0 möglich. Also sind $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ *nicht* komplanar.

Folgerung: Der Nullvektor $\vec{o}$ ist *immer* komplanar zu zwei vorgegebenen Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$, denn
$$\vec{o} = a \bullet \vec{o} + 0 \bullet \vec{x}_1 + 0 \bullet \vec{x}_2 \text{ auch für } a \neq 0.$$

Komplanarität wird ähnlich überprüft wie Kollinearität: man setzt erstmal dreist gleich: $\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3$. Über ein Gleichungssystem 3. Grades stellt sich dann heraus: entweder *gibt* es a, b und c (nicht alle gleich Null), so daß die Gleichung erfüllt ist ⇒ es *liegt* Komplanarität vor; oder $\vec{o} = a \bullet \vec{x}_1 + b \bullet \vec{x}_2. + c \bullet \vec{x}_3$ ist nur für a *und* b *und* c möglich ⇒ es liegt *keine* Komplanarität vor.
Zwei bewußt einfache und überschaubare Beispiele:

1. Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ liegen (nach Verschieben in den Ursprung) alle in der xy-Ebene und *sind* somit komplanar. Es soll überprüft werden, ob und wie sich das rechnerisch ergibt:

$$\vec{o} = a \bullet \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a + c \\ 0 = b + c \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = - c \\ b = - c \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Nun können wir für c eine *beliebige* Zahl einsetzen, z.B. c = 1. Dann ist a = b = - 1. Es *gibt* also $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $c \neq 0$, für die die Ausgangsgleichung erfüllt ist. Also sind die drei Ausgangsvektoren *komplanar*.
Natürlich hätten wir für c auch Null einsetzen können, und dann wäre auch a = b = 0. Dieser triviale Fall ist aber *immer* möglich. Für die Komplanarität hingegen ist es wichtig, ob auch der nicht-triviale Fall *möglich* ist, daß a und b und c *nicht gleichzeitig* 0 werden.

2. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen (nach Verschieben in den Ursprung) auf den drei Koordinatensystemachsen und sind somit *nicht* komplanar. Es soll überprüft werden, ob und wie sich das rechnerisch ergibt:

$$\vec{o} = a \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 0 = b \\ 0 = c \end{cases}$$

Nun können wir für c *nicht mehr* wie noch in 1. eine *beliebige* Zahl einsetzen, z.B. c = 1, sondern es bleibt die *einzige* Lösung a = b = c = 0. Somit sind die drei Ausgangsvektoren *nicht* komplanar.

Zusammenfassung

also: kollinear ⇔ auf einer Linie (Gerade) komplanar ⇔ in einer Ebene (plan)

Die Kollinearität ist also sozusagen eine Verschärfung der Komplanarität:
- nicht *alle* Vektoren sind komplanar, und *wenn* welche *komplanar* sind (in einer Ebene liegen), so sind sie noch lange *nicht kollinear* (liegen sie also noch lange nicht auch auf einer Linie)
- umgekehrt gilt aber: sind Vektoren *kollinear* (liegen sie also auf einem Lineal = Gerade), so sind sie schon *allemal komplanar* (liegen sie nämlich in einer beliebigen Ebene durch diese Gerade):
- also: kollinear ⇒ komplanar, aber *nicht* komplanar ⇒ kollinear.
- *Zwei* Vektoren sind noch lange nicht kollinear, aber garantiert komplanar, denn sie liegen in genau der Ebene, die durch sie selbst aufgespannt wird.
- *Drei oder mehr* Vektoren sind aber nicht mehr notwendig komplanar (und schon gar nicht automatisch kollinear), denn der 3. Vektor kann aus der Ebene herausführen, die durch die beiden ersten Vektoren gebildet wird (z.B. zeigt ein Baum aus der Ebene des Waldbodens heraus).

Einheitsvektor

Später noch wichtig werden wird der sogenannte *Einheitsvektor* des *Betrags/der Länge 1*:

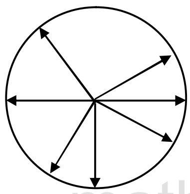
zu *jedem* Vektor $\vec{a}$ (außer dem Nullvektor) mit der Länge a gibt es einen entsprechenden Einheitsvektor $\vec{a}^0$, d.h. einen Vektor mit *gleicher Richtung und Orientierung*, aber *neuem* Betrag 1.

Es gilt: 1. $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{a} \bullet \vec{a}$, d.h. man erhält den Einheitsvektor $\vec{a}^0$, indem man a durch seine *Länge* a *teilt*. (indem man also $\vec{a}$ auf die Länge 1 verkürzt/verlängert)

2. daraus folgt umgekehrt: $\vec{a} = a \bullet \vec{a}^0$, d.h. man erhält a, indem man den Einheitsvektor $\vec{a}^0$ mit der *Länge* a von $\vec{a}$ *multipliziert*.

Um Mißverständnissen vorzubeugen: *alle* Einheitsvektoren stimmen zwar im *Betrag* 1 überein, *nicht* aber notwendig in *Richtung* und *Orientierung*. Es gibt also zu *jedem* Vektor (außer dem Nullvektor) genau *einen* Einheitsvektor, aber insgesamt *unendlich viele* verschiedene Einheitsvektoren:

Kreisradius = 1



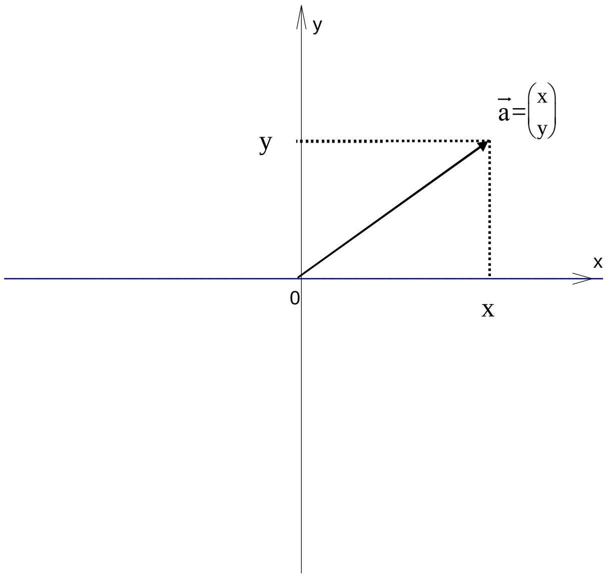
Andererseits:

zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben denselben Einheitsvektor $\vec{c}^0$, wenn sie 1. *kollinear* sind und 2. *gleiche Orientierung* haben. Die Einheitsvektoren *kollinearer* Vektoren mit *unterschiedlicher Orientierung* unterscheiden sich nur in der *Orientierung*.

Zur Schreibweise: die Null oben an $\vec{a}^0$ erscheint auf den ersten Blick schwachsinnig, wo der Vektor doch den Betrag *Eins* haben soll. Benutzt wird sie aber in Analogie zur *Zahlen*rechnung $a^0 = 1$.

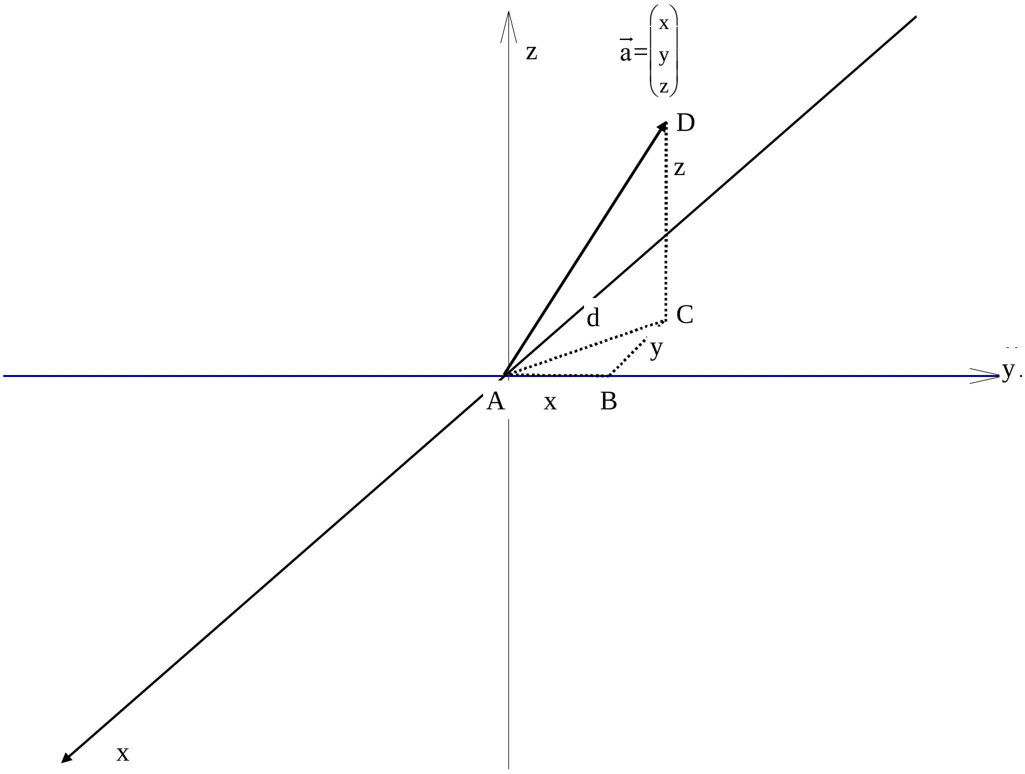
Länge/Betrag eines Vektors

Zur Berechnung des Einheitsvektors braucht man die Länge/den Betrag des Ausgangsvektors. Daher sei kurz eingeschoben, wie man den berechnet:



Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (also im *Zwei*dimensionalen), so gilt für die Länge/den Betrag a des Vektors $\vec{a}$ nach dem Pythagoras: $a^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow a = \sqrt{x^2 + y^2}$

Im Dreidimensionalen sieht das auf Anhieb erstmal schwieriger aus: es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$



Der Pythagoras für das Dreieck ABC ergibt $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, der für das Dreieck ACD ergibt $a = \sqrt{d^2 + z^2}$. Das 1. in das 2. Ergebnis eingesetzt ergibt:

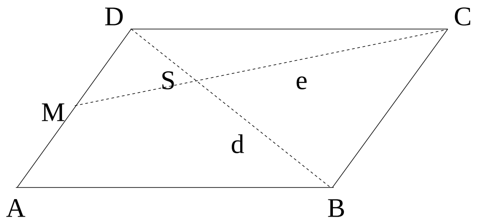
Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (also im Dreidimensionalen), so gilt für die Länge/den Betrag a des Vektors $\vec{a}$:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vektorgeometrie: Aufgabenlösung mittels geschlossener Vektorzüge

So: endlich sind die wichtigsten Vorarbeiten abgeschlossen, die wir brauchen, um mit Vektoren *arbeiten* zu können - und zu merken, wozu der ganze Aufwand überhaupt gut war. Um das zu zeigen, sei eine Aufgabe vorgeführt, die von ihrer ganzen Verfahrensweise her typisch ist:

Gegeben sei ein beliebiges Parallelogramm:



wobei d = $\overline{BD}$, M = Mittelpunkt von $\overline{AD}$, e = $\overline{MC}$. Unsere Planskizze dient ausschließlich dazu, die Bezeichnungen klarzumachen und Übersichtlichkeit zu schaffen (wer kann sich schon Geometrie nur *vorstellen*?). Die einzige sonstige Eigenschaft, die zählt, ist der *Parallelogramm*charakter. Da die Planskizze für *alle* Parallelogramme aussagekräftig sein soll, sind also ihre *Maße* (Streckenlängen, Winkel) völlig uninteressant - und man hüte sich, zusätzliche Eigenschaften einzubauen. Nähme man z.B. zusätzlich *Rechtwinkligkeit* an, so könnten alle Ergebnisse nur für *Rechtecke*, nicht aber *sonstige* Parallelogramme gelten.

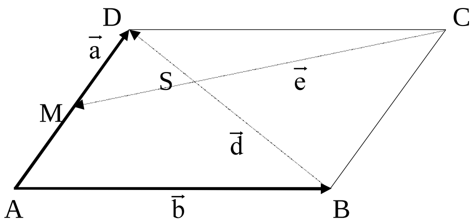
Aufgabe/Frage: teilt der Punkt S die Strecke e (bzw. d) in einem *festen*, von der *Form* des Parallelogramms

unabhängigen Verhältnis - und wenn ja, in welchem? Also:

$$\frac{\overline{CS}}{\overline{MS}} = ? \qquad \frac{\overline{BS}}{\overline{DS}} = ?$$

Nachmessen ergibt in beiden Fällen ein Verhältnis von 2:1, bzw. S *drittelt* die Strecken. Das wäre schon erstaunlich genug, denn salopp gesagt: woher wußte die Konstruktion, die über die *Hälfte* der Seite $\overline{AD}$ definiert war, daß sie ausgerechnet auf ein *Drittel* hinauslaufen sollte?
Nachmessen aber ist aufgrund der Zeichnungs- und Abmeßungenauigkeit natürlich *kein Beweis*. Vor allem könnte das Ergebnis nur für die speziellen Maße unserer *Planskizze* und keineswegs für *alle* Parallelogramme gelten.
Allzu gerne läßt man sich dazu verführen, erst noch *zu Beweisendes* versehentlich als *schon bewiesen* anzusehen, wenn es *anschaulich* klar scheint. Angenommen, die Anschauung ist tatsächlich richtig, so ist es doch das Tolle an der Mathematik, daß es sich *allgemeingültig* beweisen läßt und man sich dann endlich sicher sein kann, kein (vielleicht sehr verborgenes) *Gegenbeispiel* übersehen zu haben. Andererseits sollte man aber gegenüber angeblich Selbstverständlichem skeptisch werden: nichts glauben, was einem nicht bewiesen wurde; insbesondere auch der eigenen Anschauung zutiefst mißtrauen: z.B. dreht sich die Sonne gegen alle alltägliche Anschauung *nicht* um die Erde. Vielleicht gelingt es sogar, über die Möglichkeit allgemeingültiger Beweise *staunen* zu lernen: das ist doch erheblich interessanter, als wie sich Linien im Parallelogramm schneiden: die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die absolute Allgemeingültigkeit beweisen kann.

Sie hat es allerdings auch sehr einfach, denn sie muß sich nie mit den *Unregelmäßigkeiten der Wirklichkeit* rumschlagen, sondern ihre Aussagen beziehen sich auf *selbstdefinierte abstrakte* Gegenstände (z.B. *absolute* Parallelogramme).
Damit aber zurück zu unserer Aufgabe: man könnte sie auch mit herkömmlichen *algebraischen* Mitteln lösen, indem man sich mehrere Geraden definiert und deren Schnittpunkt berechnet. Erheblich einfacher sind solche geometrischen Beweise aber mit unserem neuen Handwerkszeug Vektorgeometrie. Dazu definieren wir uns erstmal eine *Vektorbeschreibung* des Problems: ein Parallelogramm wird eindeutig durch zwei aufspannende Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert, und auch die Diagonale bzw. Seitenhalbierende definieren wir uns als Vektoren. Einzige Voraussetzung für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, daß sie keine Nullvektoren und *nicht*kollinear sind (wären sie es doch, so würden sie überhaupt *kein* Parallelogramm aufspannen, sondern nur eine einzige *Gerade* bzw. sogar nur einen *Punkt*):



Hier wird nebenbei der größte Vorteil der Vektorgeometrie deutlich: in *normaler* Geometrie sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ bzw. $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ *verschiedene* Seiten, *vektorgeometrisch* sind hingegen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ bzw. $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ *gleiche Vektoren*: wir müssen also mit viel *weniger* rechnen. Zudem läßt sich mit Vektoren *rechnen*, *nicht* jedoch mit *Seiten* (da kann man nur mit *Längen* rechnen [die wir hier nicht haben und auch gar nicht haben *wollen*], verliert dabei aber die wichtige *Parallelität*).

$\vec{d}$ und $\vec{e}$ verändern sich je nach Wahl von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, sind also von diesen *abhängig*. Oder mathematisch ausgedrückt: da wir uns im 2-Dimensionalen/der Ebene befinden, lassen sich *alle* Ebenenvektoren (also insbesondere $\vec{d}$ und $\vec{e}$) als Vielfachensumme ("Linearkombination") der die Ebene "aufspannenden", *nicht* kollinearen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken.
Da das besonders einfach ist, führen wir es sofort für $\vec{d}$ und $\vec{e}$ durch, um mit möglichst *wenig* Vektoren hantieren zu müssen. Für $\vec{d}$ geschieht das, indem wir uns einen "Vektorzug" (mehrere hintereinander liegende Vektoren) suchen, der den Anfangspunkt B von $\vec{d}$ mit dem Endpunkt D von $\vec{d}$ verbindet und nur aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besteht. Das ist offensichtlich auf dem Weg BAD der Fall. Vektoriell heißt das:

$$\vec{d} = -\vec{b} + \vec{a} \quad \text{(A)}$$

(von B nach A geht man den Vektor $\vec{b}$ rückwärts, und $\overline{AD} = \vec{a}$)
Genauso läßt sich $\vec{e}$ durch den Vektorzug CDM beschreiben, bzw. vektoriell (da M nach Voraussetzung auf der Hälfte von $\vec{a}$ liegt):

$$\vec{e} = -\vec{b} - \frac{1}{2} \bullet \vec{a} \quad \text{(B)}$$

Damit können wir uns endlich an den gesuchten Punkt S begeben. Unser Ziel muß es sein, eine *Gleichung* zu finden, in der S vorkommt und alle *anderen* Dinge *bekannt* sind. In der Vektorgeometrie macht man das so, daß man sich erstmal einen "*geschlossenen* Vektorzug" (Vektorzug, dessen *Ende* wieder im *Anfang* liegt) sucht, in dem S *vorkommt*. Eine (von mehreren) Möglichkeiten ist SMDS, oder vektoriell ausgedrückt:

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DM}$$

Mit unseren Vektoren ausgedrückt heißt das:

$$m\bullet\vec{e} \quad = \quad n\bullet\vec{d} \quad - \frac{1}{2}\bullet\vec{a} \qquad \text{(C)}$$

denn $\overrightarrow{SM}$ ist ein Teil von $\vec{e}$: $\overrightarrow{SM} = m \bullet \vec{e}$

denn $\overrightarrow{SD}$ ist ein Teil von $\vec{d}$: $\overrightarrow{SD} = n \bullet \vec{d}$

denn $\overrightarrow{DM}$ ist $\frac{1}{2}$ von $\vec{a}$ (#)

Die Gleichung (C) hat nun den Nachteil, daß *drei* Vektoren auftauchen (nämlich $\vec{e}$, $\vec{d}$ und $\vec{a}$). Setzen wir in (C) aber (A) und (B) ein, so reduziert sich die Anzahl der Vektoren auf die *zwei* Ausgangsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$m\bullet\underbrace{(-\vec{b}-[{}^1/_2]\bullet\vec{a})}_{\vec{e}} \quad = \quad n\bullet\underbrace{(-\vec{b}+\vec{a})}_{\vec{d}} \quad - \frac{1}{2}\bullet\vec{a}$$

Das ist uns erstmal viel zu kompliziert. Also vereinfachen wir ganz stumpfsinnig, indem wir die Klammern auflösen:

$$-m\bullet\vec{b}-[{}^1/_2]\bullet m\bullet\vec{a} \quad = \quad -n\bullet\vec{b} + n\bullet\vec{a} \quad - \frac{1}{2}\bullet\vec{a}$$

An dieser Gleichung fällt erstmal nur auf, daß es einige Summanden mit $\vec{a}$ und einige mit $\vec{b}$ gibt. Um Ordnung zu schaffen, bringen wir die ersteren nach links, die letzteren nach rechts:

$$-[{}^1/_2]\bullet m\bullet\vec{a} - n\bullet\vec{a} + ({}^1/_2)\bullet\vec{a} = m\bullet\vec{b} - n\bullet\vec{b}$$

Als einzige Vereinfachung bleibt erstmal, links $\vec{a}$, rechts $\vec{b}$ *auszuklammern*

$$\underline{(-[{}^1/_2]\bullet m - n + [{}^1/_2])} \bullet \vec{a} = \underline{(m - n)} \bullet \vec{b}$$

Nun steht links also ein Vielfaches von $\vec{a}$, rechts ein Vielfaches von $\vec{b}$. Da aber nach Voraussetzung $\vec{a}$ und $\vec{b}$ weder Nullvektoren noch kollinear sind, ist das nur möglich, wenn *jeder* der beiden unterstrichenen *Gesamtkoeffizienten* 0 ist, wenn also gilt:

$$\left\langle \begin{array}{lr} -\frac{1}{2}\bullet m - n + \frac{1}{2} = 0 & \text{I} \\ m - n = 0 & \text{II} \end{array}\right.$$

Aus II folgt sofort m = n, und damit können wir in I statt m das n einsetzen und erhalten

$$-\frac{1}{2}\bullet n - n + \frac{1}{2} = 0$$

bzw. $(1{,}5)\bullet n = \frac{1}{2}$ bzw. $n = \frac{1}{3}$ und mit II auch $m = \frac{1}{3}$.

Diese Ergebnisse wollen nun aber *gedeutet* werden. Dazu müssen wir uns aber erstmal zurückerinnern, was n und m denn eigentlich sein sollten. n und m waren aber in den Gleichungen (#) definiert worden. Wir erhalten also: $\overline{S\ M} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{m} \bullet e$ und $\overline{S\ D} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{n} \bullet d$

Das aber heißt, daß S jeweils genau auf einem *Drittel* von $\vec{d}$ und $\vec{e}$ liegt bzw. $\vec{d}$ und $\vec{e}$ jeweils im Verhältnis 2:1 teilt (vgl. Anfangsvermutung).

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die konkreten Maße von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie der Winkel zwischen ihnen *nirgends* in die Rechnung eingegangen sind. Der Beweis ist also für *alle* Parallelogramme gültig.

Die dargestellte Beweisart liegt immer nah, wenn man *Eigenschaften* von geometrischen Figuren wie Dreiecken, Vierecken, Kreisen usw. beweisen will. Entweder braucht man dazu wie im Beispiel *überhaupt kein* Koordinatensystem, oder man läßt wichtige Vektoren immer vom *Ursprung* ausgehen, verschiebt die Figur also mit einer Ecke in den Ursprung.

Vektorgeometrie: Geraden und Ebenen

Gleich vorweg:

Geraden *nicht* mit Vektoren verwechseln!

Wir sind es aus der Mittelstufenalgebra und der Analysis (Differential- und Integralrechnung) schon gewohnt, Geraden *graphisch* im Koordinatensystem darzustellen. Genau dies wollen wir jetzt auch *vektorgeometrisch* durchführen, und zwar für Geraden (im 2- und 3-Dimensionalen) und Ebenen (im 3-Dimensionalen).
Wirklich neu sind dabei die Erkenntnisse fürs *Dreidimensionale*, das wir bisher noch nie behandelt haben (weil es mit den üblichen algebraischen Mitteln viel zu schwierig ist).

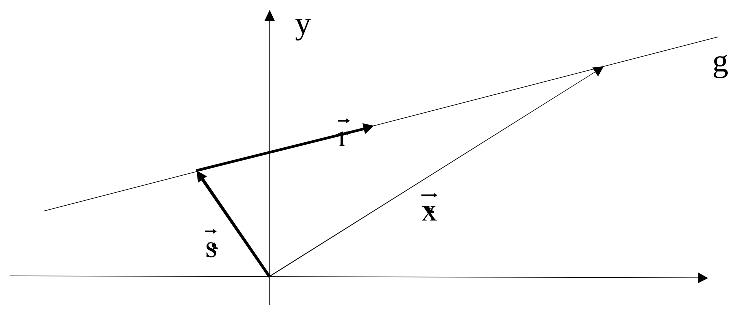
Geradendefinition

Die Autobahn (Gerade) geht leider nicht durch Ahlen: um also z.B. nach Hannover zu kommen, muß ich *von* Ahlen erst *bis* zur Autobahn (z.B. bei Beckum) kommen und von dort aus nur immer "geradeaus" *auf* der Autobahn fahren. Stellen wir uns die Autobahn mal vereinfacht als *Gerade* vor.
Vektorgeometrisch ausgedrückt: ich gehe erst einen "Stützvektor" $\vec{s}$ *vom Ursprung* (Ahlen) bis zu einem *beliebigen* Punkt S (z.B. Oelde oder Beckum) *auf* der Geraden (Autobahn) und von da aus ein Vielfaches eines beliebigen ("Richtungs"-)Vektors $\vec{r}$ *in* der Geraden.
Der Vektor $\vec{s}$ heißt "*Stütz*vektor", weil er sozusagen ein Tischbein ist, das die Gerade (vom Ursprung aus) ab*stützt*. Vergleichbar ist das mit der Situation: ich kann auf 2 Fingern einen Bleistift/ein Buch blancieren: jeder der Finger (von der Handfläche = Ursprung zum Bleistift/Buch = Gerade) ist dann "Stützvektor":

"Stützvektoren" gehen immer *vom Ursprung bis zur Gerade* (später Ebene), sind aber natürlich wie alle Vektoren *parallelverschiebbar.*

Weil der Vektor $\vec{r}$ erst die genaue *Richtung* der Geraden angibt, nennt man ihn auch den "Richtungsvektor":

"Richtungsvektoren" liegen immer *in der Gerade* (später Ebene), sind aber natürlich wie alle Vektoren *parallelverschiebbar.*



Ist nun $\vec{x}$ ein Vektor vom Ursprung bis zum *beliebigen* Punkt X auf der Geraden, so kann ich ihn auch darstellen als

(A) $\vec{x} = \vec{s} + m \bullet \vec{r}$

(In unserer Zeichnung: um zu X zu kommen, gehe ich erst den *Stütz*vektor $\vec{s}$ und dann m = 3mal den *Richtungs*vektor $\vec{r}$.)
Da wir mit $\vec{s}$ einen *Punkt* der Geraden erreichen und $\vec{r}$ die *Richtung* angibt, sprechen wir in Analogie zur Mittelstufenalgebra (Punktsteigungsform) auch von der

Punktrichtungsform der Geraden

$$g: \vec{x} = \underbrace{\vec{s}}_{\text{Stützvektor}} + m \bullet \underbrace{\vec{r}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

Für *verschiedene* $m \in \mathbb{R}$ kann ich damit *jeden* Punkt X der Geraden erreichen.

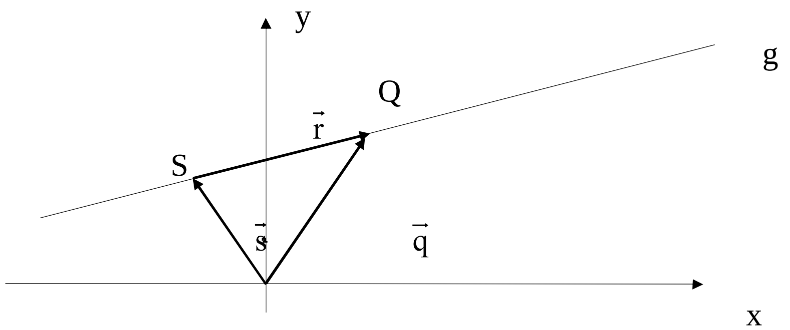
Wohlgemerkt: Ergebnisse der Geradengleichung sind nicht Vektoren *in* der Geraden, sondern all die Vektoren, die im Ursprung *beginnen* und *auf der Geraden enden*: nur die Vektor*spitzen* (alle Punkte X) bilden eine *Gerade*.
Es ist wie später auch bei Ebene/Kreis/Kugel: die Lösungen $\vec{x}$ kann man sich vorstellen wie einen Fächer aus *unendlich* vielen Vektoren: der Knotenpunkt des Fächers ist *immer* im Ursprung, und von dort aus gehen die $\vec{x}$ zu *allen* (unendlich vielen) Punkten der Gerade/der Ebene/des Kreises/der Kugel.

Man mache sich mal anschaulich klar, wie merkwürdig „um die Ecke gedacht“ diese Geradendefinition ist (später auch die Ebenen-, Kreis-, und Kugeldefinition): Die Autobahn A2 von Dortmund nach Hannover wird nicht als *Menge aller Punkte auf ihr* definiert, sondern als *Menge aller Zufahrten von Ahlen auf diese Autobahn*.

Jede Gerade (und später Ebene) ist durch *unendlich viele* Stütz- und Richtungsvektoren darstellbar: es ist egal, *wo* ich auf die Gerade (und später Ebene) gehe (Stützvektor) und wie "*schnell*" (Richtungsvektor) ich mich auf ihr bewege. D.h. aber:

Ein und dieselbe Gerade (und später Ebene) ist durch auf den ersten Blick *völlig verschiedene Gleichungen* dargestellbar (so daß wir uns unten überlegen müssen, wie man *dennoch* Gleichheit nachweisen kann).

In Analogie zur Algebra fehlt nur noch die *Zweipunkteform* der Geraden. Die herzustellen müßte möglich sein, da eine Gerade *eindeutig* durch *zwei* auf ihr liegende Punkte definiert wird. Angenommen also, wir kennen zwei Punkte S und Q der Geraden bzw. deren Ortsvektoren $\vec{s}$ und $\vec{q}$:



Wie in der Punktrichtungsform können wir nun $\vec{s}$ als Stützvektor benutzen, während $\overline{P}\ \overline{Q}$ = $\vec{q} - \vec{s}$ ein Richtungsvektor ist. Setzen wir das in die Punktrichtungsform ein, so erhalten wir die

Zweipunkteform der Geraden: g: $\vec{x} = \vec{s} + m(\vec{q} - \vec{s})$

Wichtig:

beide Formen der Gerade funktionieren (im Gegensatz zur Algebra) auch problemlos für Geraden im dreidimensionalen *Raum*.

Man beachte immer:

Geraden und Ebenen werden hier zwar über *Vektoren* definiert, sind aber im Gegensatz zu diesen *nicht* beliebig (parallel-)verschiebbar, sondern liegen *eindeutig* im Koordinatensystem fest (eine *parallele* Gerade/Ebene ist eine *andere* Gerade/Ebene). Ebenso können nur *Vektoren* kollinear/komplanar sein, *nicht* aber *Geraden/Ebenen* (die sind höchstens *gleich* oder *parallel*).

Lage von Geraden zueinander

Zwei Geraden können *gleich* sein (bzw. zwei völlig unähnliche Gleichungen stellen die gleiche Gerade dar), *parallel* sein, sich *schneiden* oder (*nur* im 3-Dimensionalen) *windschief* zueinander sein (sie gehen *aneinander vorbei* wie z.B. zwei gekreuzte, sich aber nicht berührende Bleistifte).

Überprüfen läßt sich das ganz einfach mit
1) der (Nicht-)*Kollinearität* der Richtungsvektoren
2) der Überprüfung auf *gemeinsame Punkte*.

Es ergibt sich folgendes Schema:

	Richtungsvektoren *kollinear*	Richtungsvektoren *nicht* kollinear.
Punkt(e) *gemeinsam*	Geraden gleich	Geraden schneidend
kein Punkt gemeinsam	Geraden parallel	im 2-Dim.: unmöglich im 3-Dim.: windschief

Zuerst werden also die *Richtungsvektoren* überpüft:

1. Fall: Richtungsvektoren sind kollinear.

A) die Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{s} + m\vec{r}_1$ und g_2: $\vec{x} = \vec{s}_2 + m\vec{r}_2$ sind gleich, wenn sie *alle Punkte* gemeinsam haben d.h. insbesondere, daß $\vec{s}_1$ auf g_2 enden muß (bzw. $\vec{s}_2$ auf g_1). Es muß also gelten: es gibt eindeutig ein m, so daß $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + m\vec{r}_2$ (bzw. $\vec{s}_2 = \vec{s}_1 + m\vec{r}_1$)

B) die Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{s}_1 + m\vec{r}_1$ und g_2: $\vec{x} = \vec{s}_2 + m\vec{r}_2$ sind parallel, wenn sie *keinen* Punkte gemeinsam haben d.h. insbesondere, daß $\vec{s}_1$ *nicht* auf g_2 enden darf (bzw. $\vec{s}_2$ *nicht* auf g_1). Es muß also gelten: es gibt *kein eindeutiges* m, so daß $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + m\vec{r}_2$ (bzw. $\vec{s}_2 = \vec{s}_1 + m\vec{r}_1$)

2. Fall: Richtungsvektoren sind nicht kollinear:

A) die Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{s}_1 + m\,\vec{r}_1$ und g_2: $\vec{x} = \vec{s}_2 + m\,\vec{r}_2$ schneiden sich in *einem* Punkt P. Wenn nun P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ auf g *und* h liegen soll, so muß er *sowohl* mit der 1. *als auch* mit der 2. Geradengleichung darstellbar sein, d.h. es muß eindeutige m und n geben so daß:

$$\vec{s}_1 + m\,\vec{r}_1 = \vec{p} = \vec{s}_2 + n\,\vec{r}_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{s}_1 + m\,\vec{r}_1 = \vec{s}_2 + n\,\vec{r}_2 \quad \text{(Gleichsetzung der Geradengleichungen)}$$

Ganz wichtig dabei: rechts haben wir für den Koeffizienten vor dem Richtungsvektor den *neuen* Buchstaben n eingesetzt, weil ja auf g_1 und g_2 *nicht* das *gleiche* Vielfache des jeweiligen Richtungsvektors zurückgelegt werden muß, um $\vec{p}$ zu erhalten. Würden wir in *beiden* Termen m benutzen, so setzten wir schon einen Schnittpunkt für *gleiches* m voraus. Und dabei könnte eventuell herauskommen, daß das *nicht* möglich ist - obwohl die Geraden für *verschiedene* m und n vielleicht *durchaus* einen Schnittpunkt haben.

Haben wir m (und n) *eindeutig* erhalten, so brauchen wir es nur in die Gleichung von g_1 einzusetzen, um $\vec{p}$ berechnen.

Beispiel: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Nach Gleichsetzen und Anwendung der Vektorrechnung sowie Koordinatenvergleich ergibt sich das Gleichungs*system*

$$\left\langle \begin{array}{l} 6 + m \cdot 4 = -3 + n \cdot 5 \\ 3 + m \cdot 2 = 3 + n \cdot (-2) \\ 2 + m \cdot (-1) = 0 + n \cdot 3 \end{array} \right.$$

Und das ergibt als Lösung (aus allen drei Gleichungen) n = 1 und m = 1 (es bestätigt sich: auf g_1 und g_2 muß ich *andere* Vielfache des jeweiligen Richtungsvektors gehen, um zu P zu gelangen). Da ich also auf g das n = 1-fache des Richtungsvektors gehen muß, um den Schnittpunkt P zu erreichen, ergibt sich:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P(2|1|3)$$

n

B) die Geraden sind (nur im 3-Dim.) windschief

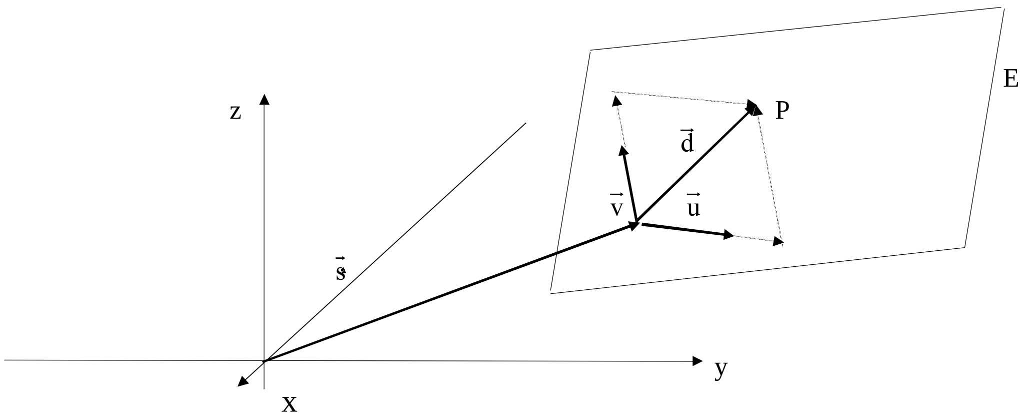
sie haben also *keinen* Punkt gemeinsam: nach Gleichsetzung (wie bei schneidenden Geraden) ergeben sich *keine eindeutigen* m und n)

Ebenendefinition

Die Ebene wird ganz ähnlich definiert wie die Gerade: um einen Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ in der Ebene E zu erreichen, muß ich erstmal mittels eines Stützvektors $\vec{s}$ *vom Ursprung auf* die Ebene kommen, und von dort aus komme ich dann mit einem in der Ebene liegenden Vektor $\vec{d}$ zu P. Also:

$$\vec{x} = \vec{s} + r \cdot \vec{d} \qquad \text{(A)}$$

Die Ebene wird aber eindeutig durch *zwei nicht*kollineare *in* ihr liegende Richtungsvekoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt (wären sie *doch* kollinear, so erhielte ich nur eine *Gerade*), so daß ich jeden Vektor $\vec{d}$ in der Ebene als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen kann:



Also: $\vec{d} = u \cdot \vec{u} + v \cdot \vec{v}$ (B)

(A) und (B) zusammen ergeben

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{s} + r \cdot (u \cdot \vec{u} + v \cdot \vec{v}) \\ &= \vec{s} + (r \cdot u) \cdot \vec{u} + (r \cdot v) \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

oder für $m = r \cdot u$ und $n = r \cdot v$

<u>Punktrichtungsform der Ebene</u>

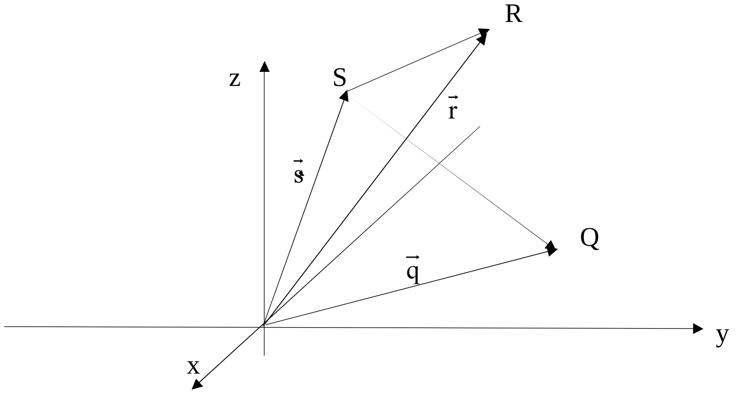
(Ebenenpunkt S mit Ortsvektor $\vec{s}$, den wir als Stützvektor der Ebene benützen; zwei *nicht*kollineare Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$):

$$E: \vec{x} = \vec{s} + m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}$$

Wohlgemerkt: Ergebnisse der Ebenengleichung sind nicht Vektoren *in* der Ebene, sondern all die Vektoren, die im Ursprung beginnen und *auf der Ebene enden*: nur die Vektor*spitzen* (alle Punkte X) bilden eine *Ebene*.

Man stelle sich die Punktrichtungsform der Ebene so vor: um vom Schuleingang (Koordinatenursprung) in Raum 301 zu kommen, muß ich erst irgendwie in die 3.-Stock-Ebene kommen (Stützvektor), und vom dann erreichten Standpunkt gehe ich *in* der Ebene des 3. Stocks erst *geradeaus* auf dem Flur (1. Richtungsvektor) und dann seitlich in R. 301 (2. Richtungsvektor). Mit diesen Richtungsvektoren läßt sich *jeder* Raum in der 3. Etage erreichen.

Selbstverständlich läßt sich eine Ebene auch durch *drei Punkte* definieren (man braucht mindestens drei Finger, um auf ihnen ein Buch sicher zu halten). Gegeben seien die drei Punkte S, Q und R mit ihren Ortsvektoren $\vec{s}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$.



Dann ist $\vec{s}$ als Stützvektor der Ebene übernehmbar, und als Richtungsvektoren nehmen wir $\overline{SQ} = \vec{q} - \vec{s}$ und $\overline{SR} = \vec{r} - \vec{s}$. Eingesetzt in die Punktrichtungsform der Ebene ergibt das die

Dreipunkteform der Ebene: E: $\vec{x} = \vec{s} + m\bullet(\vec{q} - \vec{s}) + n\bullet(\vec{r} - \vec{s})$ Vorsicht: liegen S, Q und R auf einer *Geraden* in der Ebene, so ergibt sich hier nur eine *Geraden*gleichung: die Richtungsvektoren werden *kollinear*.

(Die Ebene ist *nur* im 3-Dimensionalen von Interesse. Man stelle sie sich vor wie ein Blatt Papier, das durchs Zimmer fliegt. Einziger Unterschied: Ebenen [und Geraden] gehen in jeder Rich tung *unendlich weiter*.)

Setzt man in die *Zweipunkte*form der Geraden oder die *Dreipunkte*form der Ebene *konkrete* Vektoren ein und subtrahiert man sie voneinander, so reduzieren sie sich auf die *Punktrichtungs*form der Gerade/Ebene.

Lage von Ebenen zueinander

Zwei Ebenen können *gleich* sein (bzw. zwei völlig unähnliche Gleichungen stellen die gleiche Ebene dar), *parallel* sein (wie z.B. Vorder- und Rückdeckel eines Buches) oder sich in einer Schnittgeraden *schneiden* (so, wie sich z.B. der Boden und eine Seitenwand eines Raumes in der Fußleistengerade schneiden). Ebenen können aber *nicht* windschief zueinander sein.

Die Untersuchung ist nach folgendem Schema möglich:

	alle vier (!!!) Richtungsvektoren *komplanar*	mindestens einer der Richtungsvektoren nicht komplanar
Punkt(e) *gemeinsam*	Ebenen gleich	Schnittgerade
kein Punkt gemeinsam	Ebenen parallel	nicht möglich (denn Ebenen können nicht windschief zueinander sein/aneinander vorbeilaufen)

Zuerst Untersuchung der *Richtungsvektoren* auf *Komplanarität* (da man nur jeweils *drei* Vektoren auf Komplanarität hin überprüfen kann, tut man dies erst beim 1., 2. und 3 und dann nochmals beim 1., 2. und 4.):

1. Fall: alle vier Richtungsvektoren sind komplanar:

A) die Ebenen E_1: $\vec{x} = \vec{s}_1 + m\,\vec{u}_1 + n\,\vec{v}_1$ und E_2: $\vec{x} = \vec{s}_2 + m\,\vec{u} + n\,\vec{v}_2$ sind gleich, wenn sie *alle* Punkte gemeinsam haben d.h. insbesondere, daß $\vec{s}_1$ auf E_2 enden muß (bzw. $\vec{s}_2$ auf E_1). Es muß also gelten: es gibt eindeutige m und n, so daß $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + m\,\vec{u}_2 + n\,\vec{v}_2$ (bzw. $\vec{s}_2 = \vec{s}_1 + m\,\vec{u}_1 + n\,\vec{v}_2$)

B) die Ebenen E_1: $\vec{x} = \vec{s}_1 + m\,\vec{u}_1 + n\,\vec{v}_1$ und E_2: $\vec{x} = \vec{s}_2 + m\,\vec{u}_2 + n\,\vec{v}_2$ sind parallel, wenn sie *keinen* Punkt gemeinsam haben d.h. insbesondere, daß $\vec{s}_1$ *nicht* auf E_2 enden darf (bzw. $\vec{s}_2$ nicht auf E_1). Es muß also gelten: es gibt *keine eindeutigen* m und n, so daß $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + m\,\vec{u}_2 + n\,\vec{v}_2$ (bzw. $\vec{s}_2 = \vec{s}_1 + m\,\vec{u}_1 + n\,\vec{v}_2$)

2. Fall: die Richtungsvektoren sind nicht komplanar:

A) und einzig möglicher Fall: die Ebenen schneiden sich.

Dafür sei ein rechnerisch nicht gerade einfaches Beispiel vorgeführt, weil sich daran alle notwendigen Verfahren zeigen lassen: gegeben seien die beiden Ebenen

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und $$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren (das sei hier unbewiesen) sind *nicht* komplanar. Damit können sich die beiden Ebenen nur *schneiden*. Um rauszubekommen, in welchen *Punkten* sie das tun (welche Punkte also auf *beiden* Ebenen liegen und damit *beide* Ebenengleichungen erfüllen), setzen wir *gleich*:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} -1 + m - 2n = 1 + r + 3p \quad | + 1 \\ 5 + m + n = 3 - 2r + p \quad | - 5 \\ 2 + 2m + 3n = 2 + 4p \quad | - 2 \end{array} \right.$$

Man mache sich kurz klar, was das bedeutet: es liegt ein Gleichungssystem aus *drei* Gleichungen mit *vier* Unbekannten vor, also einer Unbekannten zu *viel* für eine *eindeutige* Lösung (für m, n, r und p sind also keine eindeutigen Zahlen erhältlich). Wenn überhaupt, so können wir nur Unbekannte *in Abhängigkeit voneinander* bestimmen. Genau das aber ist in unserem Fall sehr hilfreich, wie wir noch sehen werden.

Zur einfacheren Behandlung des Gleichungssystems gehen wir nun nach dem Gaußschen Verfahren für Gleichungssysteme vor. Dabei sollen uns erstmal nur die Variablen m und n der ersten Ebene interessieren, die wir wie gewohnt alleine links vom Gleichheitszeichen stehen lassen (alle reinen Zahlen und Variablen r und p der zweiten Ebene kommen nach rechts). Die Terme rechts sollen uns vorerst noch gar nicht weiter interessieren.

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} m - 2n = 2 + r + 3p \quad | \bullet (-2) \\ m + n = -2 - 2r + p \quad | \bullet 2 \\ 2m + 3n = 4p \end{array} \right.$$

Wie beim Gaußschen Verfahren gewohnt, wollen wir nun m aus der zweiten und dritten Gleichung herauswerfen. Dazu sorgen wir erstmal für durchgehend gleiche Koeffizienten vor m, also für 2 bzw. - 2.

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} -2m + 4n = -4 - 2r - 6p & A \\ 2m + 2n = -4 - 4r + 2p & B \\ 2m + 3n = 4p & C \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} -2m + 4n = -4 - 2r - 6p \\ \qquad 6n = -8 - 6r - 4p \quad A + B \quad | \bullet (-7) \\ \qquad 7n = -4 - 2r - 2p \quad A + C \quad | \bullet 6 \end{array} \right.$$

Nun soll aus der allerletzten Gleichung auch noch n verschwinden. Deshalb sorgen wir in den letzten beiden Gleichungen für dieselben Koeffizienten 42 bzw. -42 vor dem n.

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} -2m + 4n = -4 - 2r - 6p \quad A \\ \quad - 42n = 56 + 42r + 28p \quad C \\ \quad 42n = -24 - 12r - 12p \quad D \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} -2m + 4n = -4 - 2r - 6p \quad A \\ \quad - 42n = 56 + 42r + 28p \quad C \\ \qquad 0 = 32 + 30r + 16p \quad C + D = E \end{array} \right.$$

Daran ist nun insbesondere die letzte Zeile E von Interesse: in ihr liegt nur noch eine Abhängigkeit der beiden Variablen der *zweiten* Ebene vor (und genau das muß in solchen Fällen immer unser Ziel sein: Abhängigkeit der Variablen *einer* Ebene). Wendet man das Gaußverfahren *immer* so an, daß man *links* nur Variablen (m, n) der *ersten* Ebene hat, so kann man *immer* dafür sorgen, daß in der letzten Gleichung (E) *alle* Variablen der *ersten* Ebene rausfallen und *nur noch* Variablen (r, p) der *zweiten* Ebene (in Abhängigkeit voneinander) überbleiben.

Es ergibt sich $16p = -32 - 30r \Leftrightarrow p = -2 - \frac{15}{8}r$.

Dieses p setzen wir nun in die Gleichung der zweiten Ebene ein:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\left(-2 - \frac{15}{8}r\right)}_{p}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} - \frac{15}{8}r\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\frac{45}{8}\\-\frac{15}{8}\\-\frac{60}{8}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\frac{45}{8}\\-\frac{15}{8}\\-\frac{60}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\frac{45}{8}\\-\frac{15}{8}\\-\frac{60}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix} + r\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{45}{8}\\-\frac{15}{8}\\-\frac{60}{8}\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix} + r\left[\begin{pmatrix}\frac{8}{8}\\ \frac{-16}{8}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{45}{8}\\ -\frac{15}{8}\\ -\frac{60}{8}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\frac{37}{8}\\ -\frac{31}{8}\\ -\frac{60}{8}\end{pmatrix}$$

Und damit haben wir offensichtliche nicht mehr eine *Ebenen*-, sondern eine *Geraden*gleichung: die Gleichung der Schnittgerade g zwischen den beiden Ebenen.
Wem der Richtungsvektor der Schnittgerade zu kompliziert ist, der kann stattdessen einen kollinearen Richtungsvektor einsetzen, indem er den vorhandenen Richtungsvektor mit (-8) multipliziert. Dann ergibt sich für die Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}37\\31\\60\end{pmatrix}$

Man mache sich nochmal das Verfahren klar: man drückt eine Variable (p) der einen Ebene (E_2) durch die andere Variable (r) *derselben* (!) Ebene (E_2) aus. In der sich dann ergebenden Gleichung taucht dann nur noch *eine* Variable (r) auf, und somit ist es eine *Geraden*gleichung.
Es hilft reichlich wenig, eine Variable der *einen* Ebene in Abhängigkeit von einer Variablen der *anderen* Ebene zu bestimmen.

Da die Lage von Ebenen im dreidimensionalen Raum so schwierig abzuschätzen ist, sucht man gerne insbesondere nach den Durchstoß*geraden*, d.h. den Schnittgeraden zwischen einer vorgegebenen Ebene E und einer der drei Erzeugendenebenen (xy- oder xz- oder yz-Ebene).
Dazu muß man wissen:
- alle Punkte in der xy-Ebene haben als z-Koordinate 0
- alle Punkte in der xz-Ebene haben als y-Koordinate 0
- alle Punkte in der yz-Ebene haben als x-Koordinate 0

Wollen wir nun also beispielsweise die Schnittgerade zwischen der Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + m \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + n \bullet \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

und der xy-Ebene errechnen, so setzen wir $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ und erhalten: $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + m \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + n \bullet \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} x = 1 + m & \\ y = 1 + m + n & \\ 0 = 1 + n & \Leftrightarrow n = -1 \end{array} \right.$$

n = -1 in die Ausgangs*ebene* E eingesetzt führt zu der Durchstoßungs*geraden*

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + m \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + m \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Analog gehen wir für die *anderen* Durchstoßgeraden vor.

Lage von Gerade/Ebene zueinander

Wo sich schon Ebenen in einer Gerade schneiden können, liegt die Frage nahe, wie grundsätzlich eine *Ebene* und eine *Gerade* zueinander liegen können:
1. eine Gerade und eine Ebene sind *parallel* (z.B. eine Reckstange zur Erde)
2. eine Gerade liegt *in* einer Ebene (z.B. eine Gerade auf einem Stück Papier)
3. die Gerade *durchstößt* die Ebene in einem Punkt (z.B. ein Pfeil die Schießscheibe).

Hier gilt das Schema:

	alle drei Richtungsvektoren *komplanar*	die drei Richtungsvektoren sind *nicht* komplanar
Punkt(e) *gemeinsam*	Geraden liegt in Ebene	Gerade durchstößt Ebene im "Spurpunkt"
kein Punkt gemeinsam	Geraden parallel zur Ebene	nicht möglich

(von „Spurpunkt“ spricht man in Analogie zu einer Revolverkugel, die beim Durschlagen einer Fläche einen „Spurpunkt“ hinterläßt)

Zuerst wieder Untersuchung der Richtungsvektoren auf Komplanarität:

1. Fall: Richtungsvektoren komplanar:
   A) die Gerade g: $\vec{x} = \vec{s}_1 + m\,\vec{r}$ liegt in der EbeneE: $\vec{x} = \vec{s}_2 + m\,\vec{u} + n\,\vec{v}$, wenn *alle* Punkte von g auch in E liegen (*nicht* aber: alle Punkte von E in g) d.h. insbeson-dere, daß $\vec{s}_1$ auf E enden muß (*nicht* aber $\vec{s}_2$ auf g!). Es muß also gelten: es gibt eindeutige m und n, so daß $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + m\,\vec{u} + n\,\vec{v}$
   B) die Gerade g: $\vec{x} = \vec{s}_1 + m\,\vec{r}$ und die Ebene E: $\vec{x} = \vec{s}_2 + m\,\vec{u} + n\,\vec{v}$ sind parallel, wenn sie *keine* Punkte gemeinsam haben; d.h. insbesondere, daß $\vec{s}_1$ *nicht* auf E enden darf (während g und E *sehr wohl* gemeinsame Punkte haben können, wenn $\vec{s}_2$ nicht auf g endet!). Es muß also gelten: es gibt keine eindeutigen m und n, so daß $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + m\,\vec{u} + n\,\vec{v}$
2. Fall: die Richtungsvektoren sind *nicht* komplanar:
   A) und einzig möglicher Fall: die Gerade durchstößt die Ebene. Der Durchstoßungspunkt (Spurpunkt) wird mittels *Gleichsetzung* der beiden vollständigen Geraden/Ebenengleichungen bestimmt (vgl. Schnittgerade von *Ebenen*).

Da die Lage von Geraden im dreidimensionalen Raum so schwierig abzuschätzen ist, sucht man gerne insbesondere nach den Durchstoß*punkten*, d.h. den Schnittpunkten zwischen einer vorgegebenen Gerade g und einer der drei Erzeugendenebenen (xy- oder xz- oder yz-Ebene).
Erinnern wir uns wieder:
- alle Punkte in der xy-Ebene haben als z-Koordinate 0

- alle Punkte in der xz-Ebene haben als y-Koordinate 0
- alle Punkte in der yz-Ebene haben als x-Koordinate 0

Wollen wir nun also beispielsweise den Schnittpunkt zwischen der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und der xy-Ebene errechnen, so setzen wir für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ und erhalten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 1 + r \\ y = 1 \\ 0 = 1 + r \;\Leftrightarrow r = -1 \end{array} \right.$$

r = -1 in die Gleichung der Ausgangsgerade eingesetzt führt zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Durchstoßpunkt, an dem g durch die xy-Ebene geht, ist also $D_{xy}(0|1|0)$.
Analog gehen wir für die anderen Durchstoßpunkten vor.

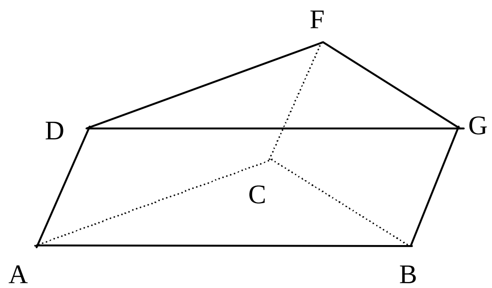
Zusammenfassung zur Lageuntersuchung

Bei der Überprüfung der Lage von Gerade/Gerade, Ebene/Ebene, Gerade/Ebene zueinander geht man folgendermaßen vor:

1. Überprüfung der Richtungsvektoren auf *Kollinearität/Komplanarität*.
2. *kollinear/komplanar*:
   ersten Stützvektor in zweite Gleichung einsetzen
   - *Ergebnis* ⇒ *gleich* (bzw. Gerade in Ebene)
   - *kein* Ergebnis ⇒ *parallel*.
3. *nicht* kollinear/komplanar: *ganze* Gleichungen gleichsetzen
   - *Ergebnis* ⇒ *Schnittpunkt/Schnittgerade/Durchstoßpunkt*
   - *kein* Ergebnis (nur bei *Geraden* im 3-Dim.) ⇒ *windschief*.

Vektorgeometrie: Aufgabe zur Geraden- und Ebenenberechnung

Gegeben sei als komplexerer geometrischer Gegenstand folgendes Dreiecksprisma:



Die Bezeichnung der Punkte ist dabei willkürlich, wenn man mal davon absieht, daß dazu üblicherweise Großbuchstaben benutzt werden. Nur spare man sich den *Punkt* E, weil er allzu leicht mit einer *Ebene* E verwechselt werden kann.

Um das Prisma nochmal in Worten zu beschreiben: die Deckfläche DGF sowie die Bodenfläche ABC seien kongruente Dreiecke mit zueinander parallelen Seiten (also $\overline{AB} \parallel \overline{DG}$, $\overline{BC} \parallel \overline{GF}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$) - und damit auch parallelen Boden- und Deckflächen (#). Die Seitenflächen ABGD, BGFC und ACFD sind Parallelogramme.

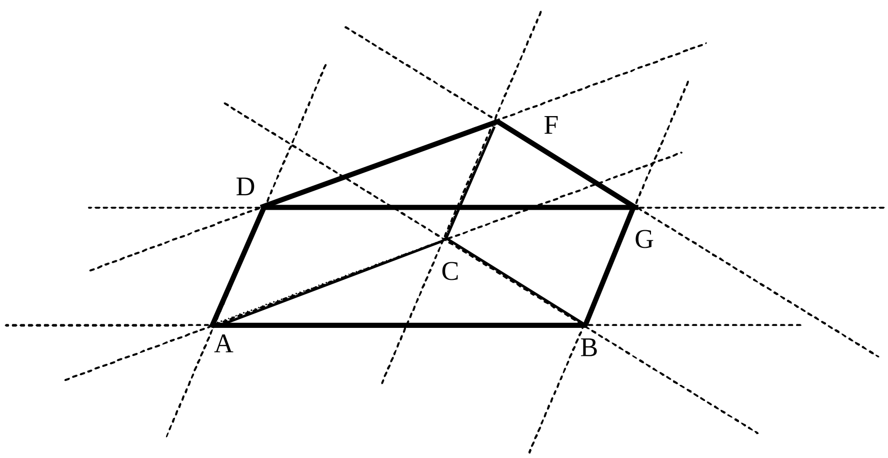
Damit ist das Dreiecksprisma noch rein *konventionell* geometrisch und keineswegs *vektor*geometrisch erfaßt. In der Vektorgeometrie haben wir nämlich beispielsweise keine *Flächen* (also Ebenenausschnitte), sondern nur *Ebenen* behandelt.

Aus vektorgeometrischer Sicht muß man das Dreiecksprisma also erstmal ganz anders auffassen, und zwar so, daß wir

- Dreiecks*seiten* (Strecken) bzw. Körper*kanten* als Ausschnitte von *Geraden* und
- Seiten*flächen* als Ausschnitte von *Ebenen* betrachten.

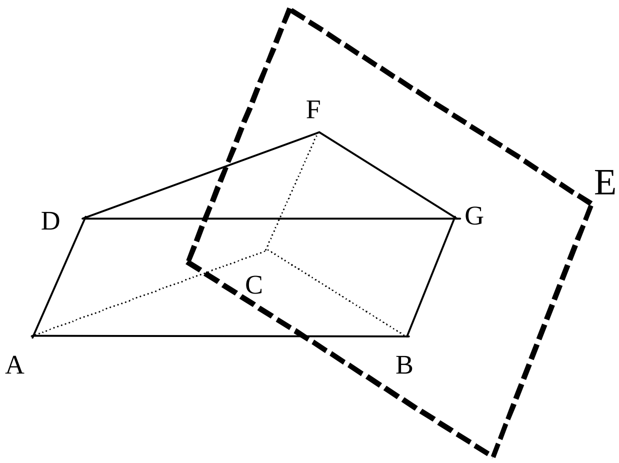
Man mache sich nochmal klar: Dreiecksseiten (Strecken), Körperkanten (Strecken) und Seitenflächen sind *begrenzt*, während Geraden und Ebenen sich in jeder Richtung *unendlich* ausweiten.

Die vektorgeometrische Auffassung sei vorerst nur anhand der *Seiten/Kanten* klargemacht: wir stellen das Prisma als Schnitt von 9 unendlich langen Geraden dar. Man kann sich das auch so vorstellen: die Geraden gehen „von Ewigkeit zu Ewigkeit“ *unabhängig voneinander* und treten *nur am Ort des Prismas in eine Beziehung zueinander* (vgl. etwa: die Alster und die Elbe sind zwei voneinander unabhängige Flüsse, die nur in *Hamburg* eine engere Beziehung eingehen: dort fließt nämlich die Alster in die Elbe):



Nun scheint diese vektorgeometrische Darstellung ja nur noch erheblich komplizierter und unübersichtlicher als die konventionell geometrische: vor lauter Geraden kann man ja kaum

mehr das Dreiecksprisma erkennen. Üblicherweise braucht man aber (wie wir unten sehen werden) gar nicht *alle* auftauchenden Geraden, sondern nur von Fall zu Fall *die eine oder andere*. Wichtig ist hier allein: man *kann* das Dreiecksprisma auch vollständig durch Geraden erklären bzw. definieren.
Ebenso ist es möglich, alle Seitenflächen als Ausschnitte von *Ebenen* zu verstehen. Das sei hier der Übersichtlichkeit halber nur an *einem* Beispiel vorgeführt: die Seitenfläche CBGF liegt *in* der Ebene E (die wir hier allerdings der Anschaulichkeit halber auch wieder als endlich darstellen müssen, obwohl sie eigentlich in jeder Richtung unendlich weitergeht):

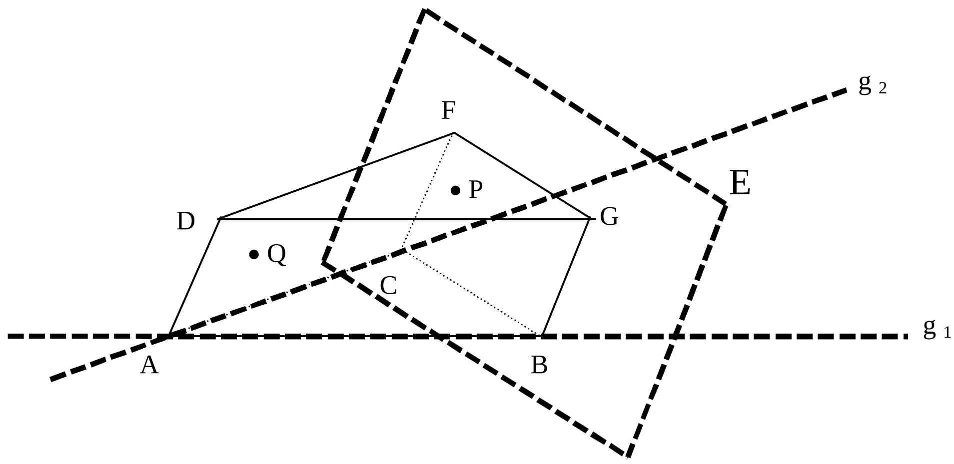


Worin die Vorteile einer solch vektorgeometrischen Auffassung des Dreiecksprismas liegen, werden wir unten noch sehen.
Bisher hatten wir das Dreiecksprisma noch ganz *allgemein*, ohne *konkretere* Zahlenangaben definiert. Wichtig waren allein die *grundsätzlichen* geometrischen Eigenschaften (parallele Boden- und Deckfläche , Seitenparallelogramme).
Nun sollen konkrete Angaben folgen, damit *gerechnet* werden kann:

1) Wir fassen die Seite $\overline{AB}$ nun tatsächlich als Ausschnitt einer *Geraden* auf, und zwar der Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$
2) Die Seite $\overline{AC}$ liege auf der Geraden g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
3) Die Seitenfläche CBGF liege in der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
4) P(17|-4|17) sei ein Punkt der Deckebene E_D, die auch das Dreieck DGF enthält.
5) Q(-1|7|2) sei ein Punkt der hinteren Seitenebene E_H, die auch das Parallelogramm ACFD enthält.

Das scheint nun erstmal eine völlig willkürliche Definition, und natürlich ist sie auch ein wenig typisch spinnert mathematisch: da hat jemand offensichtlich versucht, möglichst *viele* unterschiedliche Dinge unterzubringen, damit die SchülerInnen nochmal alles wiederholen: Geraden, eine Ebene, zwei Punkte. Und wie wir noch sehen werden, ist die Aufgabe auch so gebaut, daß man fast alle vektorgeometrischen Kenntnisse und Formeln braucht.

Aber man mache sich mal klar, daß das Dreiecksprisma mit den Vorgaben 1) - 5) tatsächlich überhaupt erst *vollständig* und *eindeutig* definiert ist. Deutlich wird das, wenn man die Vorgaben 1) - 5) dick gestrichelt einzeichnet:



Die Vorgaben 1) - 5) haben also offensichtlich durchaus jeweils ihre besondere Funktion:
- die Geraden g_1 und g_2 spannen die Bodenebene E_B auf
- die Ebene E begrenzt diese Bodenebene E_B nach $\overline{CB}$ hin und gibt außerdem die Lage der Fläche CBGF vor
- der Punkt P gibt die *Höhe* des Dreiecksprismas vor (die Fläche DGF soll ja laut Voraussetzung parallel zur Fläche ABC sein).
- der Punkt Q legt fest, wie weit die hintere Seitenebene E_H durch ACFD (die bisher ja nur durch $\overline{AC}$ gehen muß) nach hinten kippen darf.

Man beachte: bisher ist kein einziger *Eckpunkt* des Prismas vorgegeben (sie kommen in der hier vorliegenden Denkweise überhaupt erst als Schnittpunkte von Geraden und Ebenen zustande).
Und in der Berechnung der Eckpunkte soll gerade die Aufgabenstellung bestehen.

Halten wir kurz fest: vektorgeometrisch lassen sich Punkte bzw. deren Ortsvektoren nur durch *Untersuchung der Lage zweier Geraden bzw. einer Geraden und einer Ebene zueinander* erhalten. Wir müssen also nach solch *vorgegebenen* Geraden/Ebenen Ausschau halten bzw. die Gleichungen von *Hilfs*geraden/-ebenen aufstellen.

Fangen wir dazu mit dem Einfachsten an:

a) A ist offensichtlich Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2. Hier soll nun also offensichtlich die *Berechnung der Lage zweier Geraden zueinander* bzw. die *Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden* wiederholt werden.
Diese Rechnung soll hier nun nicht mehr gesondert vorgeführt werden. Nach Gleichsetzung der beiden Geradenterme ergibt sich als Schnittvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und somit A = (3|2|-1).
Hier sei allerdings daran erinnert: in Abi-Aufgaben wird kaum je die Lösungs*idee* vorgegeben, sondern die muß man schon *selbst* finden.

b) B ist der Schnittpunkt der Geraden g_1 mit der Ebene E, C der Schnittpunkt der Geraden g_2 mit der Ebene E. Offensichtlich soll hier also die *Berechnung der Lage von Geraden und*

Ebenen zueinander bzw. die *Berechnung des Schnittpunkts Gerade/Ebene* wiederholt werden.

α) Nach Gleichsetzung des Geradenterms von g_1 und des Ebenenterms von E ergibt sich als

Schnittvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und somit B = (5|-1|6)

ß) Nach Gleichsetzung des Geradenterms von g_2 und des Ebenenterms von E ergibt sich als

Schnittvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und somit C = (-4|1|2)

c) Die weiteren Prisma-Eckpunkte D, F und G sind nun aber leider nicht mehr so einfach als Schnittpunkte vorgegebener Geraden/Ebenen erhältlich.

D ist Schnittpunkt der Geraden g_{DF} und g_{DG}, F Schnittpunkt der Geraden g_{DF} und g_{GF}, G Schnittpunkt der Geraden g_{DG} und g_{GF}. Und das sind alles noch *unbekannte* Geraden. Als einziges haben sie gemeinsam, daß sie alle in der Deckebene E_D liegen, in der das Dreieck DGF liegt.

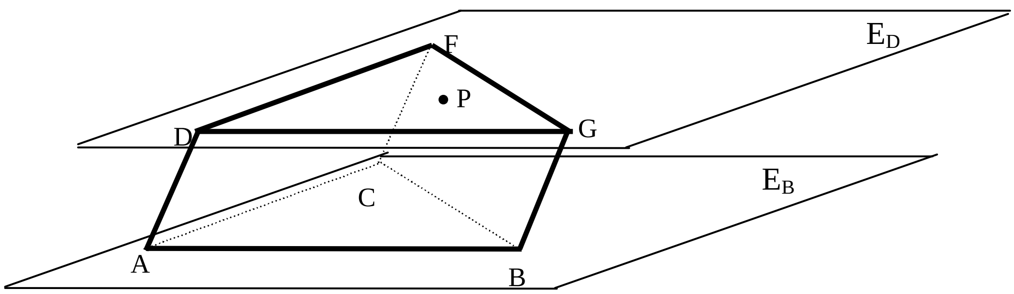
Von dieser Deckebene E_D wissen wir aber bisher nur eins: daß auch der Punkt P in ihr liegt. Nutzen wir also als nächstes erstmal die P betreffende Information aus 4.

Wir wissen:

P liegt in der Ebene E_D, in der auch das Dreieck DGF liegt. Anders ausgedrückt:

P liegt in der Fläche DGF. Diese ist laut Voraussetzung # parallel zur Grundfläche ABC bzw. zur Bodenebene E_B.

Wir suchen also eine Deckebene E_D, die
α) parallel zur Bodenebene E_B ist und
ß) den Punkt P enthält.



Um aber E_D zu erhalten, müssen wir erstmal E_B bestimmen:

d) Wir wissen:

α) die beiden vorgegebenen Geraden g_1 und g_2 liegen *in* der gesuchten Bodenebene E_B. Wir können also die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ von g_1 und $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ von g_2 als Richtungsvektoren der Bodenebene E_B übernehmen:

$$E_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ß) A liegt in E_B. Wir können also $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Stützvektor in E_B übernehmen und erhalten somit insgesamt:

$$E_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Und mit diesem Ergebnis ist nun c) lösbar, also E_D erhältlich.

e) Erinnern wir uns dazu an das Kästchen oben:

Wir suchen eine Deckebene E_D, die α) parallel zur Bodenebene E_B ist und ß) den Punkt P enthält.

zu α): Wenn E_D parallel zu E_B sein soll, können wir die Richtungsvektoren von E_B in E_D übernehmen:

$$E_D: \vec{x} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

zu ß): P (17|-4|17) soll in E_D liegen, d.h., wir können seinen Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}$ als Stützvektor von E_D benutzen und erhalten somit insgesamt:

$$E_D: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

f) Die Gerade g_{GF} erhalten wir als Schnitt von E und E_D (Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen). Es ergibt sich $g_{GF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

g) Auf dieser Geraden g_{GF} liegen nun die gesuchten Punkte G und F - nur leider wissen wir noch nicht, wo. Beschäftigen wir uns erstmal mit F. Die Frage ist, wo wir noch eine andere Bedingung für diesen Punkt herbekommen können. Erinnern wir uns dazu: F liegt auch auf der Geraden g_{DF}. Diese Gerade g_{DF} liegt nun aber auch in der hinteren Ebene E_H, in der das Parallelogramm ACFD liegt. Über dieses wissen wir aber schon:
- die bereits *bekannten* Punkte A und C liegen in ihr,
- Q (aus der 5. und letzten Vorinformation) liegt in ihr

(wenn man nicht weiter weiß, versuche man, eine noch unbenutzte Information einzubringen).

Wir können E_H also mittels der Dreipunkteform der Ebene erstellen und erhalten

$$E_H: \vec{x} = \vec{a} + r[\vec{a} - \vec{b}] + s[\vec{a} - \vec{q}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}\right] + s\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

j) Die Gerade g_{DF} ergibt sich nun nach Gleichsetzung der Terme von E_H und E_D als

$$g_{DF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

i) Der Punkt F ergibt sich wiederum (nach Gleichsetzung der Geradenterme) als Schnittpunkt von g_{DE} (vgl. g) und g_{GF} (vgl. e), und zwar als F = (-3|3|2).

j) Wie nun aber an die Punkte D und G kommen? Man könnte daran denken, sie *auch* als Schnittpunkte von Geraden zu bestimmen. Nur leider haben wir keine Informationen über die dazu benötigte Gerade g_{DG}, also weder einen Stützpunkt (nämlich die noch gesuchten Punkte D und G) noch den Richtungsvektor von D nach G (der wäre auch nur erhältlich, wenn wir D und G schon kennen würden).

Und doch kann man auf diesem Weg einen Tip erhalten: der Vektor von D nach G ist derselbe wie der von A nach B.

Man erinnere sich: laut Voraussetzung sollen die *Ober*kanten des Prismas parallel zu den *Unter*kanten sein; und weiterhin erinnere man sich: *parallele* Vektoren sind *gleich*.

Und hier - das sei doch unbedingt eingefügt - zeigt sich der enorme *Vorteil der vektorgeometrischen Betrachtungsweise*: obwohl die Obergeraden ganz andere Geraden als die Untergeraden sind, sind doch die Verbindungsvektoren oben und unten identisch, d.h., wir können sie für das Dreieck DGF aus dem Dreieck ABC übernehmen, dessen drei Punkte wir schon alle kennen.

Wenn wir weiterhin bedenken, daß wir F schon kennen, so gilt:

$$\vec{d} = \vec{f} + (\vec{d} - \vec{f}) =$$

$$= \vec{f} + (\vec{a} - \vec{c}) \quad \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = (4|4|-1)$$

$$\vec{g} = \vec{f} + (\vec{g} - \vec{f}) =$$

$$= \vec{f} + (\vec{b} - \vec{c}) \quad \Rightarrow \vec{g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow G = (6|1|6)$$

Damit sind alle Eckpunkte des Prismas berechnet, und somit ist die Aufgabenstellung erfüllt.

Es sei nochmals festgehalten, was bei der Lösung einer solchen Aufgabe wichtig ist:

1. muß man fast alle durchgenommenen *Formeln* parat haben;
2. bedarf es großer geometrisch-räumlicher *Anschauung* (deutliche Planskizze; evtl. *mehrere* Planskizzen für die Darstellung gerade benötigter Elemente!);
3. muß man alle *Bezüge zwischen vorgegebenen Elementen* sehen (also z.B., daß die Seitenkanten des Bodendreiecks *parallel* zu denen des Deckdreiecks sind);

4. bedarf es spezifisch *vektorgeometrischer Kenntnisse* (z.B., daß die Seitenkantenvektoren des Deckdreiecks *identisch* mit denen des Bodendreiecks sind);
5. muß man *Lösungswege systematisch erarbeiten* können (z.B. „der Punkt F ist nur als Schnittpunkt von Geraden erhältlich, also muß ich entsprechende Geraden suchen“);
6. muß man sich *Hilfs*geraden und -ebenen erstellen können, *ohne* daß diese in der Aufgabenstellung vorgegeben sind;
7. muß man *Zusatzvorgaben* der Aufgabenstellung (z.B. über P und Q) *rechtzeitig einbringen* können; bzw. wenn man mit den bisher genutzten Vorgaben nicht weiterkommt, sollte man sich fragen: „kann ich denn mit einer weiteren Vorgabe weiterkommen?“
8. muß man so ordentlich und übersichtlich schreiben (und sich selbst kommentieren), daß man vorher erlangte Ergebnisse jederzeit wieder aufnehmen und benutzen kann (vgl.: ganz am Ende benötigen wir wieder $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ vom Anfang).
9. führe man eine klare Bezeichnungsweise und Index-Vergabe ein. Die Bezeichnung jeder Einzelheit sollte *eindeutig-unverwechselbar* und *aussagekräftig* sein (z.B. „$E_{\underline{D}}$ ist die <u>D</u>eckeckebene, in der das Dreieck DGF liegt“). Auch da können Kommentare nicht schaden!

Vektorgeometrie: Skalarprodukt, Lotvektoren

Das Skalarprodukt:

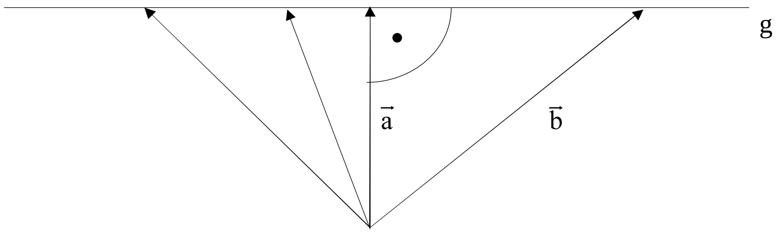
Bisher kennen wir zwei Vektorrechnungsverfahren:
a) die Vektor*addition* (*Vektor* plus *Vektor* gleich *Vektor*)
b) die *S-Multiplikation* (*Skalar* mal *Vektor* gleich *Vektor*)
Gerade weil es solche Rechenarten schon gibt, kann man sich fragen, ob es auch eine *Multiplikation zweier Vektoren* gibt bzw. ob es sinnvoll ist, sie zu definieren.
Die Suche nach solch einer Multiplikationsverknüpfung von Vektoren ist nebenbei typisch mathematisch gelaufen: erst hat man noch gar nicht gewußt, wozu sie gut sein sollte, sondern sich einfach nur innermathematisch-systematisch gefragt: wenn man Vektoren (ähnlich wie Zahlen) *addieren* kann, kann man sie dann auch (ähnlich wie Zahlen) *multiplizieren*? Läßt sich also eine Vektormultiplikation erdenken, die typische Multiplikationseigenschaften hat?
Da sind dann durchaus verschiedene Lösungswege möglich. Z.B. kann man sich die Multiplikation zweier Vektoren so definieren, daß das Ergebnis wiederum ein *Vektor* oder daß das Ergebnis eine *Zahl*/ein *Skalar* ist.
Es gibt in der fortgeschrittenen Vektorgeometrie beides: kommt ein *Vektor* heraus, so spricht man vom *Vektorprodukt*, kommt ein *Skalar* (also eine normale *Zahl*) heraus, so spricht man vom *Skalarprodukt*.
Ganz typisch für die Mathematik ist auch: man kann sich alles und jedes definieren, und erst später entdeckt man dann evtl. eine sinnvolle Anwendung. Bzw. man entscheidet sich erst endgültig für eine neue Theorie/Definition, wenn sie auch sinnvoll *anwendbar* ist.

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit dem

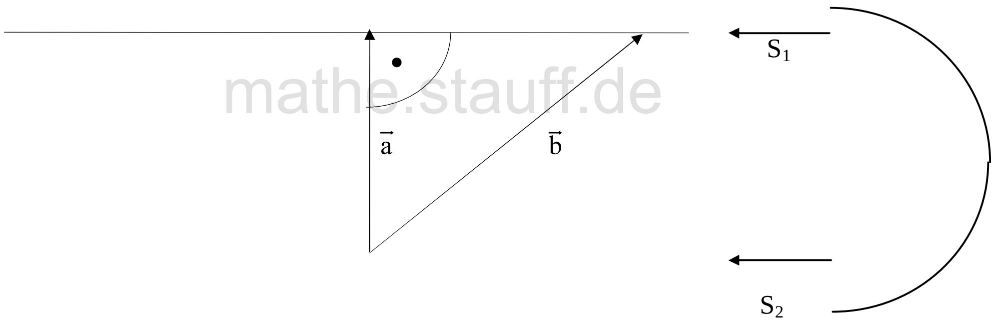
Skalarprodukt:
Vektor mal *Vektor* gleich *Skalar*

Skalarprodukt und S-Multiplikation darf man *nie* verwechseln!!!:
- beim Skalarprodukt werden zwei Vektoren miteinander multipliziert, und das *Ergebnis* ist ein Skalar,
- bei der S-Multiplikation wird hingegen ein Skalar *mit* einem Vektor multipliziert, und das Ergebnis ist ein Vektor)

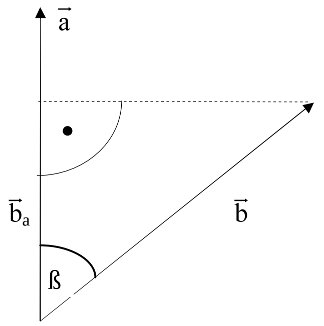
Stellt sich nur die Frage, *welchen* Skalar (welche Zahl) wir dem Produkt zweier Vektoren zuordnen sollen. Prinzipiell kann man sich da *alles* definieren (z.B., daß das Produkt zweier Vektoren immer gleich Null sein soll). Es gibt aber auch eine *sinnvoll*e, bei Problemen *hilfreiche* Definition:
dazu schauen wir uns nochmal die vektorielle Definition von Geraden (bzw. Ebenen) an: unsere Geraden-(Ebenen-)Gleichungen werden (s.o.) von *all* den Vektoren erfüllt, die im Ursprung beginnen und auf der jeweiligen Gerade (Ebene) enden. Zeichnen wir uns das nochmal:

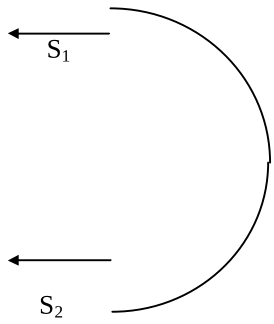


(das ist ebenso gut eine *Ebene*, die man von der *Seite* sieht, wobei sie ja wie eine Gerade aussieht)
Nun kann man sich natürlich fragen, wie *weit* es vom Ursprung bis zu der Geraden (Ebene) ist: wenn man sich das so vorstellt, als stünde man vor einer Wand und wolle die Entfernung zu dieser messen, so wird deutlich, daß es wenig sinnvoll ist, die Länge *jedes* Vektors vom Ursprung bis zur Gerade (Ebene, Wand) als Entfernung zu nehmen: dann gäbe es ja *unendlich viele* Entfernungen vom Ursprung bis zu dieser Geraden (Ebene, Wand). Sondern naheliegend ist es doch wohl, *senkrecht* auf die Gerade (Ebene, Wand) zuzugehen und die Länge *dieses* Vektors (in der Zeichnung $\vec{a}$) als Entfernung zu nehmen: da es nur *einen* solchen Vektor gibt, ist damit die Entfernung *eindeutig* definiert.
Schauen wir uns nunmal an, was alle *anderen* Vektoren der Zeichnung mit diesem Vektor $\vec{a}$ zu tun haben. Dazu zeichnen wir uns $\vec{a}$ und *einen* dieser weiteren Vektoren, also z.B. $\vec{b}$, heraus:

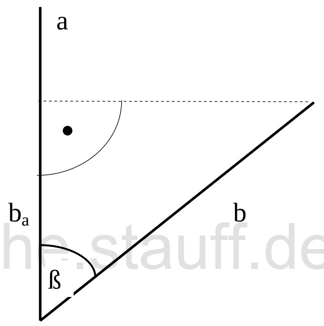


Offensichtlich ergibt $\vec{b}$ (und damit jeder andere Vektor aus der Zeichnung) genau $\vec{a}$, wenn man ihn *senkrecht* auf $\vec{a}$ *projiziert*. Diese Projektion kann man sich auch folgendermaßen vorstellen:
rechts stehe eine Lampe mit parallelem Licht.
Der Lichtstrahl S_1 projiziert nun die *Spitze* von $\vec{b}$ auf die *Spitze* von $\vec{a}$, der Lichtstrahl S_2 beläßt den *Anfang* von $\vec{b}$ im *Anfang* von $\vec{a}$. Die Projektion $\vec{b}_a$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ist also gleich $\vec{a}$.
Senkrechten Projektionen schauen wir uns jetzt mal genauer an (auf das Geradenbeispiel werden wir zurückkommen): seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, die miteinander den Winkel ß bilden:





Uns interessiert nun, wie *lang* die senkrechte Projektion $\vec{b}_a$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ist. Dazu setzen wir voraus: a sei der Betrag (die Länge) von $\vec{a}$, b der Betrag von $\vec{b}$ und b_a der Betrag von $\vec{b}_a$. Damit können wir die obige vektorgeometrische Zeichnung in eine *normale* geometrische Zeichnung überführen (der Vorteil ist auch: das gesuchte Skalarprodukt aus zwei Vektoren soll ja einen *Skalar*/eine *Zahl* als Ergebnis haben: in üblicher Geometrie tauchen aber gar keine *Vektoren*, sondern nur noch Streckenlänge, also *Zahlen* auf):



Wegen des rechten Winkels können wir im entstehenden rechtwinkligen Dreieck auf ß den Cosinus anwenden und erhalten:

$$\cos ß = \underbrace{b_a}_{\text{Ankathete}} : \underbrace{b}_{\text{Hypotenuse}}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_a = b \cdot \cos ß \qquad (\#)$$

Und damit definieren wir uns nun das Skalarprodukt:

Es sei ß der Winkel, den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen, wenn man beide im Anfangspunkt zusammenlegt.
Das Skalarprodukt der beiden Vektoren soll das Produkt aus
1) dem Betrag a von $\vec{a}$ und
2) dem Betrag b_a des Projektionsvektors $\vec{b}_a$ (nach senkrechter Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$)

sein, also:

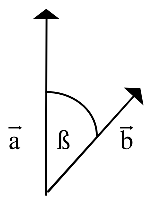
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b_a \underset{(\#)}{=} a \cdot b \cdot \cos ß$$

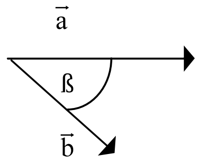
oder kurz:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a\,b\,\cos ß$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist also gleich dem Produkt aus ihren *Beträgen* a und b sowie dem *Cosinus* des von beiden eingeschlossenen Winkels.

Man mache sich klar: da a, b und cos ß *Skalare/Zahlen* sind, kommt beim Skalarprodukt zweier *Vektoren* als *Ergebnis* also wirklich ein *Skalar* heraus.
Des weiteren mache man sich klar: in der Form $\vec{a}\ \vec{b} = a\ b \cos \text{ß}$ ist das Skalarprodukt nur von der *Länge* der beiden Vektoren und dem zwischenliegenden *Winkel* ß, also der Lage der beiden Vektoren *zueinander* abhängig, nicht aber von der Lage beider Vektoren *im Raum*. In beiden folgenden Fällen haben also die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *dasselbe* Skalarporodukt:





Wozu wir diese Definition brauchen können, wird schon halbwegs klar, wenn wir die sich aus ihr ergebenden Eigenschaften anschauen:

Eigenschaften/Rechenregeln zum Skalaprodukt

1. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, ist also der eingeschlossene Winkel 0^0, so ergibt sich
   $\vec{a}\ \vec{b} = a\ b \cos 0^0 = a\ b \bullet 1 = a\ b$,
   d.h. dann ist das Skalarprodukt gleich dem Produkt der Beträge (*ohne* Cosinusrechnung).
2. $\vec{a}\ \vec{a} = a\ a \cos 0^0 = a\ a \bullet 1 = a\ a = a^2$,
   d.h. man multipliziert einen Vektor mit sich *selbst*, indem man seinen *Betrag* mit sich selbst multipliziert (quadriert).
3. $\vec{a}\ \vec{b} = a\ b \cos \text{ß}$ kann *nur* dann gleich Null sein, wenn
   a) einer der beiden *Beträge* a oder b gleich Null ist, also einer der beiden Vektoren ein Nullvektor ist oder
   b) $\cos \text{ß} = 0 \Leftrightarrow \text{ß} = 90^0$, d.h. wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

Wichtige Folgerung: mit dem Skalarprodukt läßt sich überprüfen, ob (Nicht-Null)-Vektoren *senkrecht* zueinander sind.

4. $\vec{a}^0$ und $\vec{b}^0$ seien die Einheitsvektoren (d.h. mit dem Betrag 1) zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
   $\vec{a}^0\ \vec{b}^0 = 1 \bullet 1 \bullet \cos \text{ß} = \cos \text{ß}$

Wichtige Folgerung: haben wir zwei Einheitsvektoren, so können wir den zwischenliegenden *Winkel* bestimmen.

5. Es gilt das Kommutativgesetz: $\vec{a}\ \vec{b} = \vec{b}\ \vec{a}$
6. Es gilt das Distributivgesetz: $\vec{a}\ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\ \vec{b} + \vec{a}\ \vec{c}$
7. Es gilt das (aus Skalaren und Vektoren) gemischte Assoziativgesetz:
   $n(\vec{a}\ \vec{b}) = (n\ \vec{a})\ \vec{b} = \vec{a}\ (n\ \vec{b})$,
   1. 2. 3.
   d.h. es ist egal, *wann* ich einen Skalar hereinmultipliziere und ob ich es - wie in 2. und 3. - mittels S-Multiplikation oder - wie in 1. - mit normaler Zahlenmultiplikation tue (denn das $\vec{a}\ \vec{b}$ ist ja nur ein Skalar).

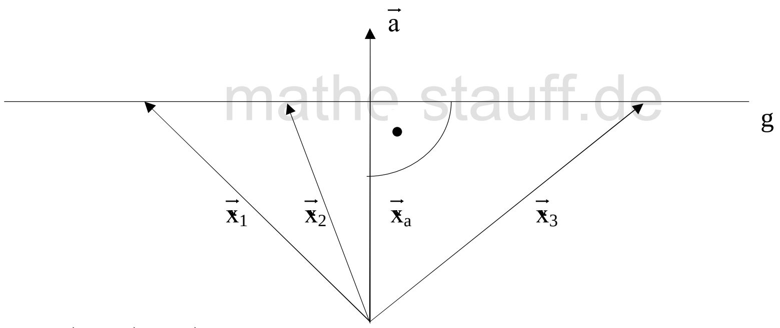
8. Vorsicht!!!: es gilt im Allgemeinen NICHT das (ungemischte, also nur aus Vektoren) bestehende Assoziativgesetz:

$\vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c})$ UNGLEICH $(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c}$

!

(denn da $\vec{b}\,\vec{c}$ ein *Skalar* ist, erhalten wir *links* ein Vielfaches von $\vec{a}$; da $\vec{a}\,\vec{b}$ ein *Skalar* ist, erhalten wir *rechts* ein Vielfaches von $\vec{c}$. Also müßte insgesamt ein Vielfaches von $\vec{a}$ gleich einem Vielfachen von $\vec{c}$ sein. Das aber wäre höchstens für den Spezialfall möglich, daß $\vec{a}$ und $\vec{c}$ *kollinear* sind, gilt aber sicherlich *nicht*, wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ *nicht* kollinear sind.)

9. Wir haben hergeleitet: $\vec{a}\,\vec{x}$ = a x cos ß, wobei a x cos ß ein *Skalar* ist. Nennen wir diesen Skalar mal c, so erhalten wir kürzer $\vec{a}\,\vec{x} = c$. Nun kann man sich fragen, mit welchem Vektor $\vec{x}$ ich denn einen vorgegebenen Vektor $\vec{a}$ multiplizieren muß, um ein vorgegebenes c zu bekommen.
   In der *Zahlen*algebra würden wir das Problem ax = c einfach so lösen, daß wir die Gleichung auf beiden Seiten durch a *teilen*, so daß wir $x = \frac{c}{a}$ erhalten. Die Frage ist, ob man in der Vektorgeometrie genauso vorgehen, also durch den *Vektor* $\vec{a}$ *teilen* darf, ob es also sinnvoll ist, eine Vektor*division* zu definieren. Die Einführung einer Rechenart ist aber nur dann sinnvoll, wenn sie *eindeutige* (statt mehrere) Ergebnisse liefert. Das ist hier aber nicht der Fall. Schauen wir uns dazu eine Zeichnung an:



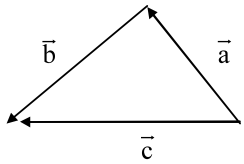
   Alle Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ ..., die im Ursprung beginnen und auf einer Geraden senkrecht zu $\vec{a}$ enden, haben den *gleichen* Projektionsvektor $\vec{x}_a$, so daß $\vec{a}\,\vec{x}_1 = a\,x_a$, $\vec{a}\,\vec{x}_2$ = = ax_a, $\vec{a}\,\vec{x}_3 = a\,x_a$ ... D.h. doch, daß *alle* Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ ... mit $\vec{a}$ *dasselbe* Skalarprodukt, nämlich $\vec{a}\,\vec{x}_a = c$ bilden.
   Es gibt also keinen *eindeutig* bestimmten Vektor $\vec{x}$, so daß $\vec{a}\,\vec{x} = c$, sondern *alle* Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ ..., die auf einer bestimmten, zu $\vec{a}$ senkrechten Geraden enden, sind Lösungen.
   Wenn wir also eine Division definieren wollten, hätte sie *unendlich viele* Lösungen. Solche Rechnungen sind aber wenig hilfreich, denn wie finde ich damit *eine* Lösung? Aus diesem Grunde definieren sich die Mathematiker grundsätzlich *nur* Rechnungen, die nur *eine*, dafür aber eine *eindeutige* Lösung haben. Das liegt hier *nicht* vor, also wird *keine* Vektordivision definiert. Das aber heißt:

NIEMALS durch Vektoren dividieren!!!

!

Anwendungsbeispiel zum Skalarprodukt

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den zueinander senkrechten Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



Damit gilt: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Quadrieren wir diese Gleichung auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$\vec{c}\,\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$$
$$\Leftrightarrow \vec{c}\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{a} + \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{b}$$
$$\Leftrightarrow \vec{c}\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{a} + 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{b}$$
$$\Leftrightarrow c\,c = a\,a + 0 + b\,b$$

(s.o. 2. bzw. 3b.)

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2,$$

womit wir den Pythagoras *erheblich* einfacher als in der 9. Klasse bewiesen haben.

Koordinatendarstellung des Skalarprodukts

Aus $\vec{a}\,\vec{b} = a\,b\cos ß$ folgt, daß wir das Skalarprodukt bisher nur berechnen können, wenn wir die *Beträge* a und b und den zwischenliegenden *Winkel* ß kennen. Und außerdem haben wir noch nichts davon: wir können dann zwar das Skalarprodukt berechnen - aber wozu?

Wie bei der Vektoraddition und der S-Multiplikation wollen wir aber auch das Skalarprodukt direkt aus den *Koordinaten* der beiden Vektoren berechnen können (und wir werden noch sehen, was wir dann damit anfangen können).

Dazu schreiben wir uns die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = x_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$\vec{a} = x_a\,\vec{i} + y_a\,\vec{j} + z_a\,\vec{k}, \qquad \vec{b} = x_b\,\vec{i} + y_b\,\vec{j} + z_b\,\vec{k}$$

Also ist

$$\vec{a}\,\vec{b} = (x_a\,\vec{i} + y_a\,\vec{j} + z_a\,\vec{k})(x_b\,\vec{i} + y_b\,\vec{j} + z_b\,\vec{k})$$

Das können wir summandenweise ausmultiplizieren. Übrig (also ungleich Null) bleiben nur *die* Summanden, in denen $\vec{i}$ mit $\vec{i}$, $\vec{j}$ mit $\vec{j}$ oder $\vec{k}$ mit $\vec{k}$ multipliziert wird: in allen anderen Fällen werden *senkrecht* aufeinander stehende Vektoren miteinander multipliziert, und das ergibt - wie wir bereits aus 3b) wissen - *immer* Null. Übrig bleibt also

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_a x_b\,\vec{i}\,\vec{i} + y_a y_b\,\vec{j}\,\vec{j} + z_a z_b\,\vec{k}\,\vec{k} \qquad (\#)$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ sind aber Einheitsvektoren (mit dem Betrag 1), die mit sich selbst den Winkel 0^0 bilden. Also ist $\vec{i}\,\vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^0 = 1$ und analog $\vec{j}\,\vec{j} = 1$ und $\vec{k}\,\vec{k} = 1$.

Einsetzen in (#) ergibt das:

Skalarprodukt in Koordinatendarstellung:
$\vec{a}\,\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

Das aber heißt doch: wir können das Skalarprodukt zweier *Vektoren* errechnen, indem wir die *Summe der Produkte der* jeweiligen Koordinaten bilden (und das ist wieder aus der Grundschule bekanntes Rechnen mit *Zahlen*)

Beispiel:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 1 \bullet 2 + 3 \bullet 4 + 5 \bullet 6 = 2 + 12 + 30 = 44$$

Aus der Koordinatenberechnung des Skalarprodukts ergeben sich einige interessante (?) Folgerungen:

1a) für $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ im Zweidimensionalen ergibt sich $\vec{a}\,\vec{a} = x \bullet x + y \bullet y$ oder $\vec{a}\,\vec{a} = x^2 + y^2$.

Wir wissen aber, daß für den *Betrag* a von $\vec{a}$ gilt: $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, und daraus ergibt sich

$$a = \sqrt{\vec{a}\quad\vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1b) Analog gilt im Dreidimensionalen:

$$a = \sqrt{\vec{a}\quad\vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ist z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, so ist $a = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

2) bisher konnten wir nach $\vec{a}\,\vec{b} = a\,b\cos ß$ das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *nur* berechnen, wenn wir die *Beträge* a und b sowie den zwischenliegenden *Winkel* ß kannten.
Da wir $\vec{a}\,\vec{b}$ jetzt auch *anders* berechnen können, ist es uns nun auch umgekehrt möglich, den zwischenliegenden *Winkel* ß zu berechnen (also überhaupt erstmals in der Vektorgeometrie *Winkel* zu berechnen):

$$\vec{a}\,\vec{b} = a\,b\cos ß \quad\Leftrightarrow\quad \cos ß = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{a\,b}$$

Beispiel:

Gegeben seien $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, gesucht ist der von ihnen eingeschlossene Winkel ß.

Wir rechnen $a = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ (A)

$b = \sqrt{\vec{b}\,\vec{b}} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{77}$ (B)

Außerdem ergibt $\vec{a}\,\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32 \quad \text{(C)}$

Und damit erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \underset{\text{(C)}|}{\vec{a}\,\vec{b}} & = & \underset{\text{(A)}|}{a} \cdot \underset{\text{(B)}|}{b} \cdot \cos ß \\ 32 & = & \sqrt{14} \cdot \sqrt{77} \cdot \cos ß \\ \Leftrightarrow 32 & = & \sqrt{1078} \cdot \cos ß \qquad |: \sqrt{1078} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{\sqrt{1078}} = \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos ß \approx 0{,}9746 \Rightarrow ß \approx 12{,}9^0$$

3. Wir wissen bereits, daß zwei Nicht-Null-Vektoren *senkrecht* zueinander stehen, wenn ihr Skalarprodukt *Null* ergibt. Zusammen mit der Koordinatenberechnung des Skalarprodukts können wir damit auch zu einem vorgegebenen Vektor einen *senkrechten* berechnen. Diesen senkrechten Vektor werden wir dann "Lotvektor" oder "Normalenvektor" nennen (so, wie ein Lot immer senkrecht zur Erde hängt). Kennzeichnen werden wir ihn durch einen *zusätzlichen* Strich über dem Vektor:

   $\vec{a}$ ist (einer) der Lotvektor(en) zu $\vec{a}$.

   Beginnen wir im 2-Dimensionalen. Nun gibt es zu einem vorgegebenen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sicherlich *unendlich viele* Vektoren $\vec{b}$, die senkrecht auf ihm stehen (sie unterscheiden sich nur in der *Länge/Orientierung*, aber *nicht* in der Richtung).

   Behauptung:

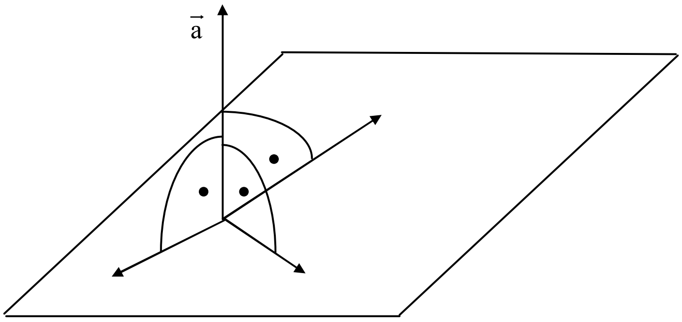
$\vec{b} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ ist *einer* der Lotvektoren zu $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ Der Lotvektor hat also nur *umgekehrte Koordinaten*, wobei die *eine* zusätzlich *negativ* gesetzt wird. Alle *anderen* Lotvektoren sind Vielfache davon.

   Beweis: $\vec{a}\,\vec{b} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = x\,(-y) + y\,x = 0$

   Beispiel: $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ hat als Lotvektor $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

   Im 3-Dimensionalen liegt der Fall leider ein bißchen schwieriger: die unendlich vielen Lotvektoren zu *einem* Vektor unterscheiden sich nicht nur in *Betrag* und *Orientierung*, sondern auch in der *Richtung* (so, wie alle Speichen eines Schirms *senkrecht* vom Schirmstock weggehen und doch *verschiedene* Richtungen haben):

   die Lotvektoren bilden im *Drei*dimensionalen eine *Ebene* senkrecht zum Ausgangsvektor:



Drei *mögliche* Lotvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ erhält man (ohne Beweis), wenn man *eine* der Koordinaten von $\vec{a}$ "*null*setzt", die beiden anderen *vertauscht* und bei *einer* das *Vorzeichen verändert*:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

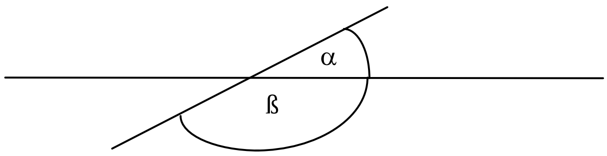
Vektorgeometrie: Winkel- und Abstandsberechnung

Mit dem Hilfsmittel des Skalarprodukts kann man nun die restlichen Fragen zu Geraden und Ebenen klären, nämlich
I. in welchem Winkel sie sich *schneiden*;
II. welchen Abstand sie voneinander haben (falls sie *parallel* oder *windschief* sind).

Wenn sie *identisch* sind oder *ineinander* liegen, kann offensichtlich weder von einem Winkel noch von Abstand gesprochen werden.
Wenn sie *parallel* sind, ist es sinnlos, einen Winkel zu bestimmen, und wenn sie sich *schneiden*, ist es umgekehrt sinnlos, von einem Abstand zu sprechen.

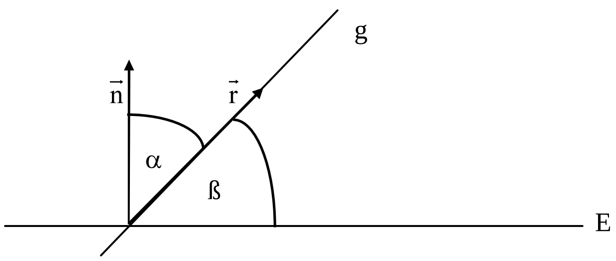
zu I.: Winkelbestimmung

Vorweg sei geklärt, was man als Winkel zwischen zwei Elementen versteht. Dazu seien zwei sich schneidende Elemente (Geraden oder Ebenen) von der Seite gezeichnet.:

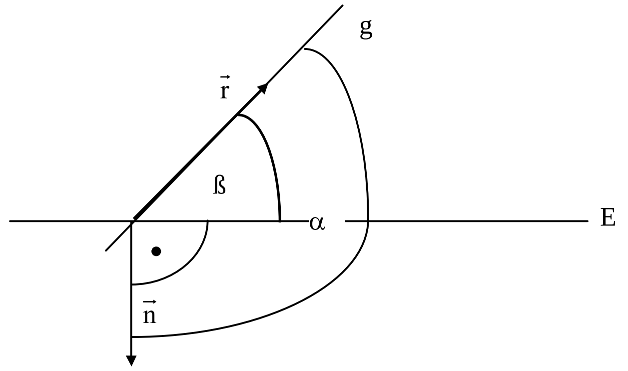


Als „den“ Winkel zwischen den beiden Elementen wollen wir nun immer den *kleineren* von beiden verstehen, also im obigen Fall α. Solch ein Winkel ist immer $\leq 90^0$.
Bemerkenswert ist aber, daß wir α auch als Gegenwinkel zu ß erhalten können, nämlich als $\alpha = 180^0 - \alpha$.

a) Der Winkel zwischen zwei sich *schneidenden Geraden* ist gleich dem Winkel zwischen den *Richtungsvektoren* der beiden Geraden (bzw. im 2-Dimensionalen auch der Winkel zwischen den *Lot*vektoren zu den beiden Geraden)
b) Der Winkel ß zwischen einer Ebene E und einer sie durchstoßenden Gerade g ist gleich 90^0 *minus dem Winkel* α *zwischen dem* Rich*tungsvektor* $\vec{r}$ der Geraden und dem *Lotvektor* $\vec{n}$ der Ebene:



Nun kann allerdings auch folgender Fall auftreten (etwa, wenn man zufällig einen umgekehrten Lotvektor erwischt) vorliegen:



Dann gilt offensichtlich ß = α - 90^0
Es gilt also entweder ß = 90^0 - α oder ß = α - 90^0. Das können wir mittels Betragsstrichen vereinheitlichen zu

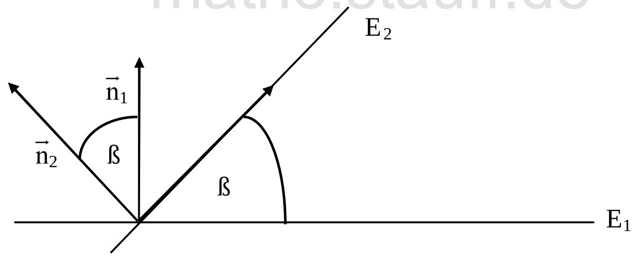
ß = | 90^0 - α |.

Das gilt für jeden der beiden genannten Fälle.
Die Berechnung verläuft dann folgendermaßen:

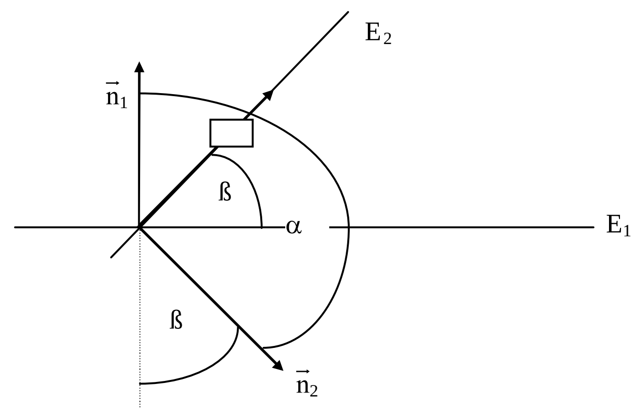
$$\sin ß = \sin(|\,90^0 - \alpha\,|) = \cos\alpha = \frac{\vec n \bullet \vec r}{n \bullet r} \Leftrightarrow \sin ß = \frac{\vec n \bullet \vec r}{n \bullet r}$$

In diesem Fall können wir also ohne Fallunterscheidung ausnahmsweise den *Sinus* anwenden.

c) Der Winkel ß zwischen zwei sich *schneidenden Ebenen* E_1 und E_2 ist gleich dem Winkel zwischen ihren beiden *Lotvektoren* $\vec n_1$ und $\vec n_2$:



Allerdings kann auch durch ungünstige Wahl der Lotvektoren auch folgender Fall eintreten:



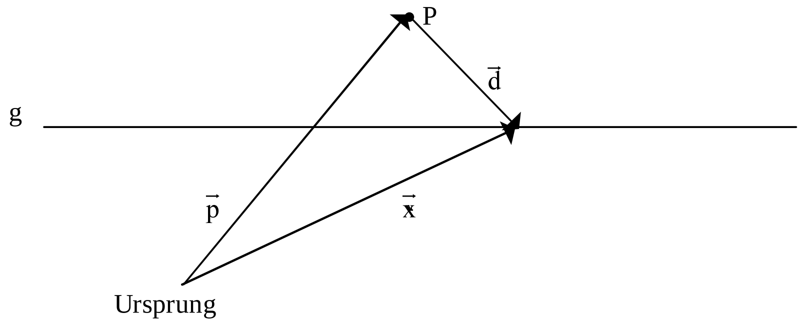
In diesem Fall gilt nun offensichtlich ß = 180^0 - α (wobei α der Winkel zwischen den beiden Lotvektoren ist).
Wie nun aber merkt man, *welcher* Fall vorliegt. Ganz einfach: Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen sind höchstens 90^0 groß. Bekommt man nun als Winkel zwischen den beiden

Lotvektoren einen Winkel $\alpha \leq 90^0$ raus, so kann man ihn als Winkel ß zwischen den beiden Ebenen übernehmen.
Bekommt man hingegen als Winkel zwischen den beiden Lotvektoren eine Winkel $\alpha > 90^0$ raus, so übernimmt man als Winkel ß zwischen den beiden Ebenen den Gegenwinkel zu 180^0, also ß $=180^0 - \alpha$.

zu II.: Abstandsberechnung

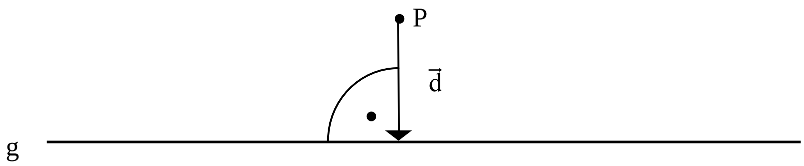
a) Abstand zwischen einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{s} + r \bullet \vec{r}$ und einem Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$:

1. Differenzvektor $\vec{d} = \vec{x} - \vec{p} = \vec{s} + t \bullet \vec{r} - \vec{p}$



(dringender Hinweis: man könnte zwar genauso gut $\vec{d} = \vec{p} - \vec{x}$ definieren [also einen umgekehrten Vektor von der Geraden zum Punkt P hin], aber das erweist sich später bei der Tangentenberechnung als ungünstig)

2. Unter all diesen Differenzvektoren $\vec{d}$ von P irgendwohin auf g suchen wir nun denjenigen, der senkrecht zu g ist:



$$0 = \vec{d} \bullet \vec{r} = (\vec{s} + t \bullet \vec{r} - \vec{p}) \bullet \vec{r}$$
$$\Leftrightarrow 0 = (\vec{s} + t \bullet \vec{r} - \vec{p}) \bullet \vec{r}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \vec{s} \bullet \vec{r} + t \bullet \vec{r} \bullet \vec{r} - \vec{p} \bullet \vec{r}$$

3. Der gesuchte Abstand ist dann die Länge d von $\vec{d}$

b) Abstand zwischen zwei Geraden $g_1 : \vec{x} = \vec{s}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{s}_2 + t_2 \bullet \vec{r}_2$

α) Die beiden Ebenen sind *parallel*. Dann nehme man sich den Aufpunkt S_2 der Gerade g_2 und berechne seinen Abstand zur Gerade g_1 (siehe a)

ß) g_1 und g_2 sind *windschief*

1. Differenzvektor $\vec{d} = (\vec{s}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1) - (\vec{s}_2 + t_2 \bullet \vec{r}_2) =$
$= \vec{s}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1 - \vec{s}_2 - t_2 \bullet \vec{r}_2$
2. a) Differenzvektor muß senkrecht zu $\vec{r}_1$ sein:
$0 = \vec{d} \bullet \vec{r}_1 = (\vec{s}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1 - \vec{s}_2 - t_2 \bullet \vec{r}_2) \bullet \vec{r}_1$
$\Leftrightarrow 0 = (\vec{s}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1 - \vec{s}_2 - t_2 \bullet \vec{r}_2) \bullet \vec{r}_1$
$\Leftrightarrow 0 = \vec{s}_1 \bullet \vec{r}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1 \bullet \vec{r}_1 - \vec{s}_2 \bullet \vec{r}_1 - t_2 \bullet \vec{r}_2 \bullet \vec{r}_1$ (A)
b) Differenzvektor muß senkrecht zu $\vec{r}_2$ sein:
$0 = \vec{d} \bullet \vec{r}_2 = (\vec{s}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1 - \vec{s}_2 - t_2 \bullet \vec{r}_2) \bullet \vec{r}_2$
$\Leftrightarrow 0 = (\vec{s}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1 - \vec{s}_2 - t_2 \bullet \vec{r}_2) \bullet \vec{r}_2$
$\Leftrightarrow 0 = \vec{s}_1 \bullet \vec{r}_2 + t_1 \bullet \vec{r}_1 \bullet \vec{r}_2 - \vec{s}_2 \bullet \vec{r}_2 - t_2 \bullet \vec{r}_2 \bullet \vec{r}_2$ (B)
c) Gleichungssystem aus (A) und (B) lösen
3. Bestimmung der Länge d von $\vec{d}$

<u>c) Abstand zwischen einer Ebene E : $\vec{x} = \vec{s} + t_1 \bullet \vec{r}_1 + v_1 \bullet \vec{r}_2$ und einem Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$:</u>

1. Differenzvektor $\vec{d} = (\vec{s} + t_1 \bullet \vec{r}_1 + v_1 \bullet \vec{r}_2) - \vec{p} =$
$= \vec{s} + t_1 \bullet \vec{r}_1 + v_1 \bullet \vec{r}_2 - \vec{p}$
2. a) Differenzvektor muß senkrecht zu $\vec{r}_1$ sein:
$0 = \vec{d} \bullet \vec{r}_1 = (\vec{s} + t_1 \bullet \vec{r}_1 + v_1 \bullet \vec{r}_2 - \vec{p}) \bullet \vec{r}_1$
$\Leftrightarrow 0 = \vec{s} \bullet \vec{r}_1 + t_1 \bullet \vec{r}_1 \bullet \vec{r}_1 + v_1 \bullet \vec{r}_2 \bullet \vec{r}_1 - \vec{p} \bullet \vec{r}_1$ (A)
b) Differenzvektor muß senkrecht zu $\vec{r}_2$ sein:
$0 = \vec{d} \bullet \vec{r}_2 = (\vec{s} + t_1 \bullet \vec{r}_1 + v_1 \bullet \vec{r}_2 - \vec{p}) \bullet \vec{r}_2$
$\Leftrightarrow 0 = \vec{s} \bullet \vec{r}_2 + t_1 \bullet \vec{r}_1 \bullet \vec{r}_2 + v_1 \bullet \vec{r}_2 \bullet \vec{r}_2 - \vec{p} \bullet \vec{r}_2$ (B)
c) Gleichungssystem aus (A) und (B) lösen
3. Bestimmung der Länge d von $\vec{d}$

Beispiel:

gegeben seien der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die Ebene E in der Punktrichtungsform

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{s}} + m \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_1} + n \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{r}_2}.$$

Nun muß laut obigen Überlegungen gelten, daß der Differenzvektor $\vec{d}$ senkrecht zu $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ist, also mit beiden jeweils das Skalarprodukt 0 bildet.

$$\underbrace{\left[\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}\right]}_{\vec{d}}\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{r}_1}=0 \qquad \text{(C)}$$

$$\underbrace{\left[\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}\right]}_{\vec{d}}\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{r}_2}=0 \qquad \text{(D)}$$

Man bedenke (und rechne gegebenenfalls aus), daß die Zeilen (C) und (D) nach Ausmultiplikation der Skalarprodukte reine Skalarzeilen sind und daher ein übliches arithmetisches Gleichungssystem ergeben.

Daraus errechnet sich auf einigen Umwegen m = 0,5 und n = 1,5 und damit $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, und das hat die Länge d = $\sqrt{6}$. Der Punkt P hat also den Abstand $\sqrt{6}$ von der Ebene E.

d) Abstand zwischen zwei Ebenen

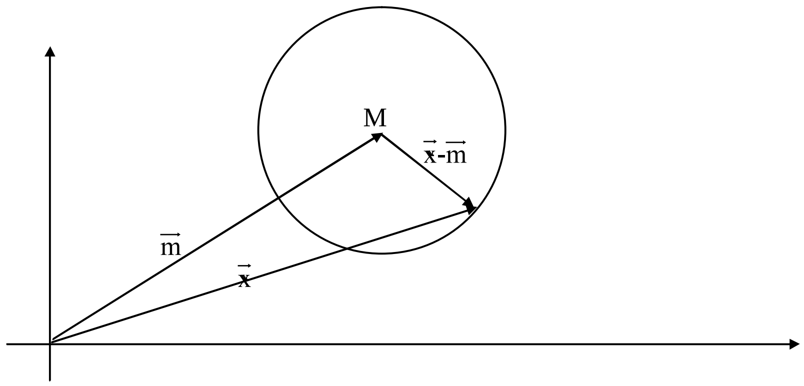
Die beiden Ebenen sind *parallel*. Dann nehme man sich den Aufpunkt S_2 der zweiten Ebene und berechne seinen Abstand zur ersten Ebene (siehe c)

Abstand zwischen einer Ebene E und einer Geraden g:

g ist *parallel* zu E. Dann nehme man sich den Aufpunkt S_2 der Gerade g und berechne seinen Abstand zur Ebene E (nicht umgekehrt!!!) (siehe c)

Vektorgeometrie: Kreis und Kugel

Im folgenden leiten wir die Kreisgleichung (im Zweidimensionalen) und die Kugelgleichung (im Dreidimensionalen) *gleichzeitig* her. Die zweidimensionale Zeichnung zeigt also
- entweder den Kreis
- oder die Kugel von der Seite gesehen:



Wie bereits eingezeichnet, seien
* $\vec{m}$ der Mittelpunktsvektor (also vom Ursprung zum Mittelpunkt des Kreises),
* $\vec{x}$ ein Vektor vom Ursprung bis zum Punkt X auf dem Kreis/der Kugel.

Nun muß die Länge des Vektors ($\vec{x}$ - $\vec{m}$) vom Mittelpunkt des Kreises/der Kugel bis zum Punkt X auf dem Kreis/der Kugel gleich dem *Radius* r sein: $\sqrt{(\vec{x}-\vec{m})^2} = r$. Durch Quadrieren auf beiden Seiten erhält man die

Kreis-/Kugelgleichung K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$

wobei die *End*punkte aller $\vec{x}$ auf dem Kreis/der Kugel liegen (*nicht* die Vektoren $\vec{x}$ *selbst*: sie wären dann ja krumm). Die $\vec{x}$ *beginnen* alle im *Ursprung*.

Merke: die den Kreis/die Kugel definierenden Vektoren $\vec{x}$ gehen vom Ursprung evtl. *durch* den Kreis/die Kugel, enden aber immer *auf* ihm/ihr.

Spezialfall: Kreis-/Kugelmittelpunkt = *Ursprung* $\Rightarrow$ $\vec{m}$ = Nullvektor $\Rightarrow$ K: $\vec{x}^2 = r^2$

Kreise sind nur im 2-, Kugeln nur im 3-Dimensionalen berechenbar.

Hier ergibt sich wieder das gleiche Problem wie bei Normalenformen: solche Gleichungen können wir NICHT eindeutig nach $\vec{x}$ auflösen, denn *alle* auf dem Kreis/der Kugel endenden Vektoren $\vec{x}$ erfüllen sie ja. Und doch können wir *einzelne* Vektoren berechnen.
Kreisbeispiel: gegeben sei ein Kreis um M (3|1) mit dem Radius r = 4. Damit ergibt sich die Kreisgleichung als

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}^2 = 16 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-6x+9 + y^2-2y+1}_{\text{2. Binomi}} = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+y^2-2y+10 = 16 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-2y-6 = 0$$

Das ist nun *eine* Gleichung mit *zwei* Unbekannten und somit nur lösbar, wenn wir *eine* der Unbekannten *vorgeben*. Sei z.B. x = 0. Dann vereinfacht sich die Gleichung zu y^2-2y-6 = 0. Das aber ist eine normale *quadratische* Gleichung, die wir (im Regelfall) nach y auflösen können (was hier aus Platzgründen nicht vorgeführt sei). Nur soviel: es ergeben sich *zwei* y, weil der Kreis (für x = 0) zweimal die x-Achse schneidet.
Kugelbeispiel: Gegeben sei die Kugel K mit dem Mittelpunkt M(1|2|5) und dem Radius r = 12, also

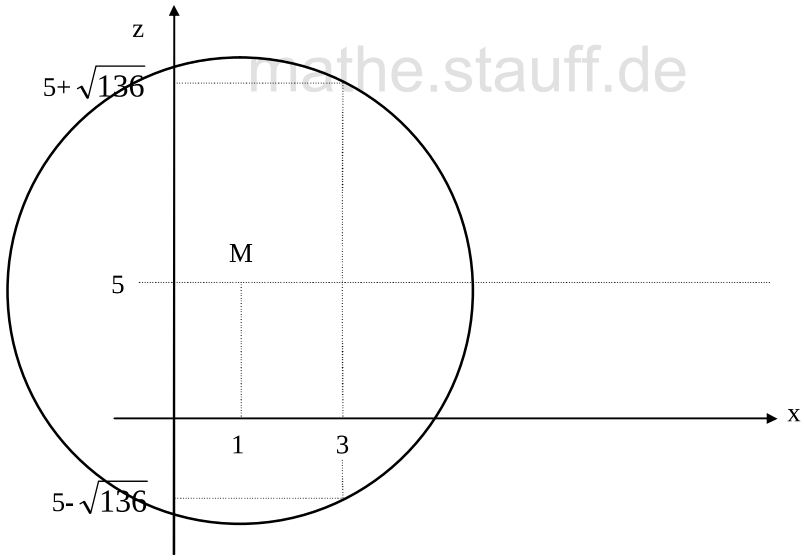
K: $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)^2 = 144$

Gesucht sei ein Punkt auf der Kugel, z.B. mit x = 3 und y = 4 $\Rightarrow$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \\ z-5 \end{pmatrix}^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ z-5 \end{pmatrix}^2 = 144$$

$\Leftrightarrow 2\bullet 2+2\bullet 2+(z-5)^2 = 144 \Leftrightarrow (z-5)^2 = 136 \Leftrightarrow z-5 = \sqrt{136} \vee z - 5 = -\sqrt{136}$
$\Leftrightarrow z = 5 + \sqrt{136} \vee z = 5 - \sqrt{136}$

$\Rightarrow P_1\ (3|4|5+\sqrt{136})$ und $P_2\ (3|4|5 - \sqrt{136})$ sind zwei Punkte auf der Kugel:



Man versuche nicht, die Gleichung $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ dadurch zu lösen, daß man auf beiden Seiten die Wurzel zieht. Dadurch käme nämlich links der *Vektor* $\vec{x} - \vec{m}$ heraus, rechts hingegen der *Skalar* r; und das kann nicht gleich sein.

Beziehungen Gerade/Ebene/Kreis/Kugel

Nun liegt es nahe, Beziehungen zwischen bereits *Bekanntem* (Gerade, Ebene) und dem *Neuen* (Kreis, Kugel) zu untersuchen. Ja, ehrlich gesagt werden Kreis und Kugel überhaupt nur eingeführt, um das vorher Durchgenommene nochmals (in komplexeren Abi-Aufgaben) anwenden zu können. Dahinter steckt aber auch das alte Anliegen der Mathematiker, "Gerades" (Gerade, Ebene) und "Krummes" (Kreis, Kugel) in Beziehung zueinander zu setzen:

Mögliche Beziehungen zwischen Gerade/Ebene und Kreis/Kugel:

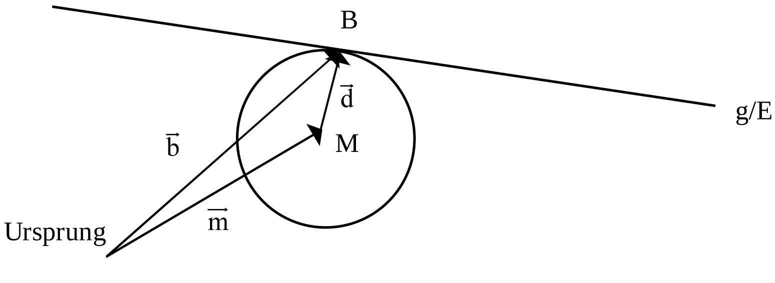
Eine Gerade/Ebene ist Tangente/Tangentialebene eines Kreises/einer Kugel genau dann, wenn der Abstand zwischen Kreis-/Kugelmittelpunkt gleich dem Radius des Kreises/der Kugel ist (vgl. Abstandsberechnung). Es gibt dann genau einen Berührpunkt B.
Ist der Abstand größer als der Radius, so ist die Gerade/Ebene „Passante“ des Kreises/der Kugel, d.h. die Gerade/Ebene geht ohne Schnittpunkt an dem Kreis/der Kugel vorbei.
Ist der Abstand kleiner als der Radius, so ist die Gerade/Ebene „Sekante“ des Kreises/der Kugel, d.h. die Gerade/Ebene geht durch den Kreis/die Kugel (Schnittpunkte oder Schnittkreis).

Tangente/Tangentialebene an Kreis/Kugel

Man mache sich klar: eine Tangente an einen Kreis erhalte ich, wenn ich z.B. ein Messer seitlich an einen runden Teller halte. Lege ich eine Kugel auf einen Tisch, so ist die Tischoberfläche Tangentialebene zu dieser Kugel.

Übliche Aufgabenstellungen sind:

1. Es ist bekannt, daß g/E Tangente zu k/K ist. Gesucht ist der Berührpunkt B mit dem Ortsvektor $\vec{b}$.
   Die Lösung: hat man die Tangenteneigenschaft mittels des Abstands gezeigt, so fällt dabei der Differenzvektor $\vec{d}$ ab: er ist die kürzeste/senkrechte Verbindung zwischen Kreis-/Kugelmittelpunkt M einerseits und Gerade/Ebene andererseits, d.h., der Vektor von M nach B. Also ist $\vec{b} = \vec{m} + \vec{d}$.



2.: Umgekehrt ist manchmal nur der Kreis/die Kugel gegeben sowie ein Berührpunkt B darauf, in dem eine Lotgerade/-ebene angelegt werden soll. Dann läßt sich $\vec{b}$ als Stützvektor der Lotgeraden/-ebene benutzen. Der/die Richtungsvektoren müssen dann senkrecht zu $\vec{d} = \vec{b} - \vec{m}$ sein.
   (zu 1. und 2. siehe „Abi-Musteraufgabe Vektorgeometrie“)

3. Gegeben seien eine Ebene E und ein Punkt M. Gesucht ist die Kugel K um M, zu der E Tangentialebene ist.
   Lösung: Bestimmung des *Abstandes* d zwischen M und E. Dieser Abstand d ist dann der R*adius* r der Kugel. Aus M und r ergibt sich die Kugelgleichung.

Sekante eines Kreises/einer Kugel

Beispiel: sei K: $\vec{\mathbf{x}}^2 = 36$, also ein Kreis um den Ursprung mit dem Radius 6.

Sei des weiteren g: $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Sekante des Kreises.

Gesucht sind die Schnittpunkte.

g eingesetzt in K ergibt

$$\left[\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right]^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}^2 + 2r\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \left[r\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right]^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 13 + 2r \quad 14 + r^2 17 = 36$$

$$\Leftrightarrow 13 + 28r + 17r^2 = 36 \mid -36$$

$$\Leftrightarrow 17r^2 + 28r - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 + \frac{28}{27}r - \frac{23}{27} = 0$$

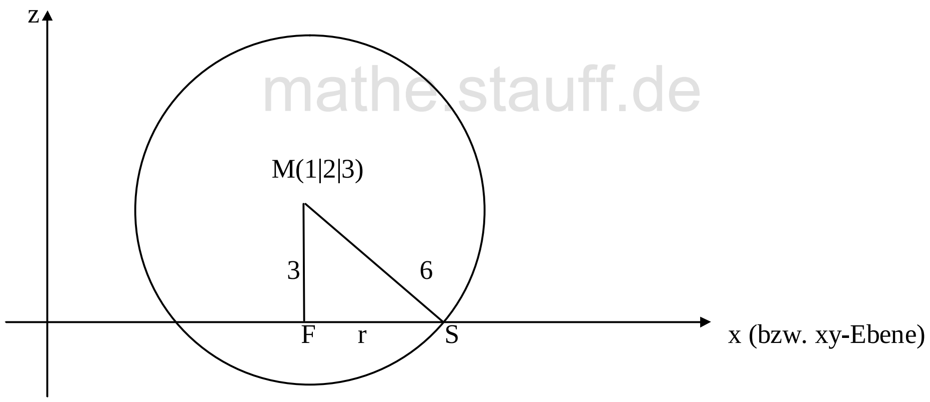
Das ist eine quadratische Gleichung, die sich lösen läßt zu $r = \dfrac{-14 \pm \sqrt{817}}{27}$

Setzt man nun diese beiden r in g ein, so erhält man die Ortsvektoren der beiden Schnittpunkte zwischen Kreis und Gerade

Beispiel: Schnittkreis zwischen einer Kugel und einer *Basis*ebene, hier z.B. der xy-Ebene

Gesucht ist der Schnittkreis zwischen der Kugel $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]^2 = 36$, also einer Kugel um $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ mit dem Radius 6, und der xy-Ebene.

Von der Seite gesehen sieht das etwa folgendermaßen aus:



Der Zeichnung läßt sich entnehmen:

1. Der Fußpunkt F liegt direkt unter dem Mittelpunkt M, hat also die z-Koordinate 0. Auf die zweidimensionale xy-Ebene bezogen, ist F also F(1|2) bzw. der Kreis in der xy-Ebene hat den Mittelpunktsvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
2. der Radius r dieses Kreises läßt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck MFS berechnen als $3^2 + r^2 = 6^2 \Leftrightarrow 9 + r^2 = 36 \Leftrightarrow r^2 = 27 \Leftrightarrow r = \sqrt{27}$

Aus 1. und 2. ergibt sich als Formel des gesuchten Kreises K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 27$

Vorsicht: Schnittkreise *anderer* Ebenen als der Basisebenen mit Kugeln nur schwerlich berechnen (weil wir keine Formeln für Kreise im Dreidimensionalen kennen), wohl aber läßt sich mit dem Pythagorasverfahren der *Radius* eines solchen Kreises bestimmen, wenn wir den *Abstand* des Kugelmittelpunktes von der Ebene berechnet haben.

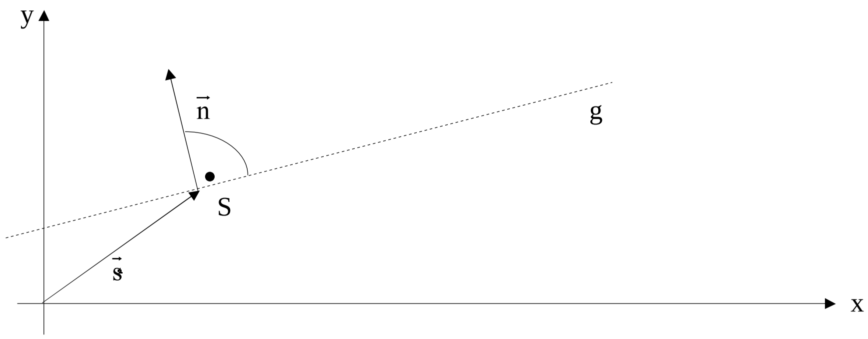
Eine andere Darstellung von Gerade/Ebene

Die Punktnormalenform (der Geraden/Ebene)

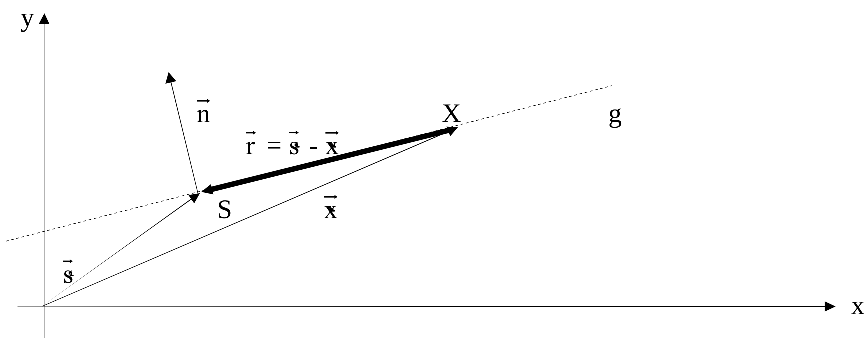
Bisher hatten wir eine Gerade/Ebene immer durch einen *Stütz*vektor (bis *auf* die Gerade/Ebene) und (einen) *Richtungs*vektor(en) (*innerhalb* der Gerade/Ebene) definiert.
Statt über die *Richtungs*vektoren sollen nun Geraden/Ebenen über ihre *Normalen-* = *Lot*vektoren definiert werden (mit dem Skalarprodukt ist das erstmals möglich). Beginnen wir wieder im 2-Dimensionalen mit Geraden. Gegeben seien

1) ein Punkt S auf der Geraden mit dem Ortsvektor $\vec{s}$
2) ein Normalenvektor $\vec{n}$ zur Geraden.

Zeichnen wir sie hintereinander, so kann die Gerade nur die hier gestrichelte Linie sein, da sie senkrecht zu $\vec{n}$ stehen und durch S gehen soll: die Gerade ist also eindeutig definiert:



Sei nun X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ ein *weiterer* Punkt auf der Geraden:



Der Vektor $\vec{r} = \vec{x} - \vec{s}$ liegt *auf* der Geraden und muß somit *senkrecht* zu $\vec{n}$ liegen. Mit dem Skalarprodukt muß also gelten:

$$\vec{n}\,\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}\,(\vec{x} - \vec{s}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$$

Letztere Gleichung ergibt sich akkurat genauso für *Ebenen* im Raum:

<u>Punktnormalenform</u> der Gerade (im 2-Dim.)/der Ebene (im 3-Dim.):
Ist S ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{s}$ und $\vec{n}$ ein Normalenvektor, so wird durch

g/E: $\vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$
|
hier muß *immer* ein *Minus* stehen

eindeutig eine Gerade/Ebene durch S senkrecht zu $\vec{n}$ definiert.
Wieder: die möglichen Ergebnisvektoren $\vec{x}$ beginnen im Ursprung und *enden* auf der Geraden/Ebene. Nur ihre *Spit zen* X bilden die *Gerade/Ebene*.

Vorsicht!!!:
es gibt *keine* Punktnormalenform für Geraden im *Raum*/3-Dimensionalen, denn da gibt es zu *jedem* Normalenvektor *unendlich viele* Geraden (mal wieder so, wie unendlich viele Speichengeraden eines Schirms senkrecht zum Schirmstock stehen).

Vorsicht!!!:
Da durch die Punktnormalenform eine Gerade/Ebene beschrieben wird (genauer: alle möglichen $\vec{x}$ *enden* auf der Geraden/Ebene), gibt es *unendlich viele* $\vec{x}$, die diese Gleichung erfüllen. Wir können also NICHT *eindeutig* nach $\vec{x}$ = ... auflösen (anders als bei Punkt*richtungs*form).

Das wird auch in folgendem deutlich: bei $\vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$ könnte man auf die Idee kommen, folgendermaßen nach $\vec{x}$ aufzulösen:

$$\begin{aligned} \vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} &= 0 \quad &&| + \vec{n}\,\vec{s} \\ \vec{n}\,\vec{x} &= \vec{n}\,\vec{s} \quad &&|: \vec{n} \\ \vec{x} &= \vec{s} \end{aligned}$$

Wir haben dabei allerdings UNERLAUBT durch einen Vektor *geteilt*, nämlich durch $\vec{s}$.

Dennoch sind Gleichungen der Form $\vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$ (wenn auch nicht eindeutig) auflösbar, wenn *konkrete Koordinaten* gegeben sind (dabei lernen wir nebenbei schon ein typisches Verfahren kennen):
sei gegeben

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0 \quad \text{und } \vec{x} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \quad \vec{x} \; - \; \vec{n} \quad \vec{s} \; = 0$$

Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow 2a + 3b - 2 = 0 \qquad \text{(A)}$$

In dieser Gleichung mit *zwei* Unbekannten hängt b von a ab, je nachdem, wie wir a wählen. Sei also z.B. a = 1 (genauso gut wäre jede *andere* Zahl möglich, und b ergäbe sich entsprechend anders).

Eingesetzt in (A) ergibt sich b = 0, und wir erhalten als *eine* der gesuchten Lösungen $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, das auf g endet, bzw. den Punkt P(1|0) auf g.

Mit der Punktnormalenform machen wir insbesondere im Hinblick auf Ebenen etwas sehr Merkwürdiges: wir definieren einen Baum (Normalenvektor) nicht mehr als senkrecht zur Erde (Ebene), sondern umgekehrt die gesamte Erde (Ebene) als senkrecht zum Baum (Normalenvektor).
Einen Vorteil hat die Punkt*normalen*form auf jeden Fall schon einmal: sie sieht (im Gegensatz zu den Punkt*richtungs*formen) für Geraden (im 2-Dim.) und Ebenen (im 3-Dim.) absolut *identisch* aus, man muß hier also nur *eine* Formel lernen.

Allgemeine Normalenform

Sind $\vec{n}$ und $\vec{s}$ fest vorgegeben, so ist $\vec{n}\,\vec{s}$ ein fester *Skalar* c, und somit erhalten wir die

Allgemeine Normalenform:

g/E: $\vec{n}\,\vec{x} - c = 0$ bzw. g/E: $\vec{n}\,\vec{x} = c$

Die „algebraische“ Geraden- und Ebenendarstellung

Manchmal möchte man nicht eine *vektorielle* Darstellung von Geraden/Ebenen, sondern eine in Analogie zur *Algebra* (also g: y = mx + c).
Diese nun läßt sich ohne großen Umstand aus der allgemeinen Normalenform gewinnen - und umgekehrt.

1. Gegeben sei in der allgemeinen Normalenform die *Gerade* g:

$$\underset{\vec{n}}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \underset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} - \underset{c}{c} = 0 \Leftrightarrow$$

$\underline{ax + by - c = 0}$ nach Definition des Skalarprodukts

Mit der unterstrichenen Form haben wir nun eine andere, algebraische Darstellung der Gerade (diese wird oft in Büchern statt der vektoreillen benutzt, und man sollte die eine in die andere Form umwandeln können).

2. Gegeben sei in der allgemeinen Normalenform die *Ebene* E:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c = 0 \Leftrightarrow \underline{ax + by + dz - c = 0}$$

Die „algebraischen“ Formen (unterstrichen) sind also nur verkappte allgemeine Normalenformen.

Umwandlung Punktrichtungs-/normalenform

Selbstverständlich kann man jede Gerade/Ebene *sowohl* in Punkt*richtungs-* *als auch* in Punkt*normalen*form schreiben (außer Geraden im *Drei*dimensionalen).

Beispiele für die Umwandlung:

1. Gegeben sei eine Ebene in der allgemeinen *Normalen*form $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{x} + 3 = 0$. Gesucht ist als erstes ein Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für die Punkt*richtungs*form $\vec{x} = \vec{s} + m\,\vec{u} + n\,\vec{v}$. Dieser Vektor $\vec{s}$ muß natürlich auch die allgemeine Normalenform erfüllen. Setzen wir also dort ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 3 = 0 \Leftrightarrow (1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z) + 3 = 0.$$

Setzen wir nun für x und y *beliebige* Zahlen ein, als z.B. x = 0 und y = 0, so muß nur noch gelten $3z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = -1$.

Der gesuchte Stützvektor $\vec{s}$ heißt also $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (A)

Des weiteren suchen wir zwei nichtkollineare *Richtungs*vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die *senkrecht* auf dem *Normalen*vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ stehen müssen. Wir hatten schon oben gesehen, daß

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(B)}$$

solche (zudem *nicht*kollineare) Vektoren sind. Mit (A) und (B) zusammen erhalten wir die Punktrichtungsform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Nun suchen wir umgekehrt zur Punkt*richtungs*form $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ die

Punkt*normalen*form. Den Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ können wir beibehalten. Gesucht ist weiterhin ein *Lot*vektor $n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, der auf *beiden Richtungs*vektoren der Ebene senkrecht steht, für den also gilt: $y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $y\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ bzw. $\left\langle \begin{matrix} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{matrix} \right.$

Das sind *zwei* Gleichungen mit *drei* Unbekannten, also einer Unbekannte *zuviel*. Wir wählen daher x *beliebig* (außer Null, weil dann *alles* Null würde), also z.B. $x = 1 \Rightarrow y = 2$ und $z = 3$. Also ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ ist die Punktnormalenform.}$$

Oft soll die Lage einer Geraden/Ebene in Punkt*richtungs*- zu einer Geraden/Ebene in Punkt*normalen*form untersucht werden. Weil man zu faul ist, letztere auch in Punkt*richtungs*form zu bringen (und dann wie gewohnt weiterzurechnen), geht man pfiffiger vor.

Beispiel: gegeben seien z.B. die beiden Geraden

$$g\colon \vec{x} = \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad h\colon \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Nun setzt man einfach g (bzw. das Unterstrichene) für x in h *ein* und erhält:

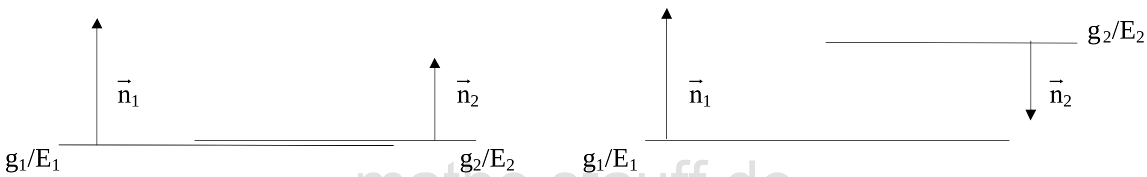
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Das läßt sich über die Koordinaten ausrechnen zu m = 1, und dieses wiederum in g eingesetzt ergibt den Schnittpunkt SP (1|2).

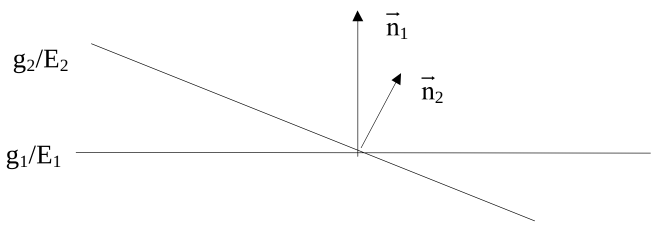
Lage von Geraden/Ebenen zueinander

Während es bei der Punkt*richtungs*form sehr aufwendig ist, die Lage von Geraden/Ebenen zueinander herauszufinden, ist das bei der Punktnormalenform sehr einfach:
Sind Geraden (Ebenen) in *Normalen*form gegeben, so lassen sich Basisinformationen über ihre Lage zueinander direkt aus den Normalenfomen *ablesen*:

– sind die Normalenvektoren von g_1 und g_2 (bzw. E_1 und E_2) *kollinear*, so sind die Geraden (bzw. Ebenen) *parallel* oder *gleich*:



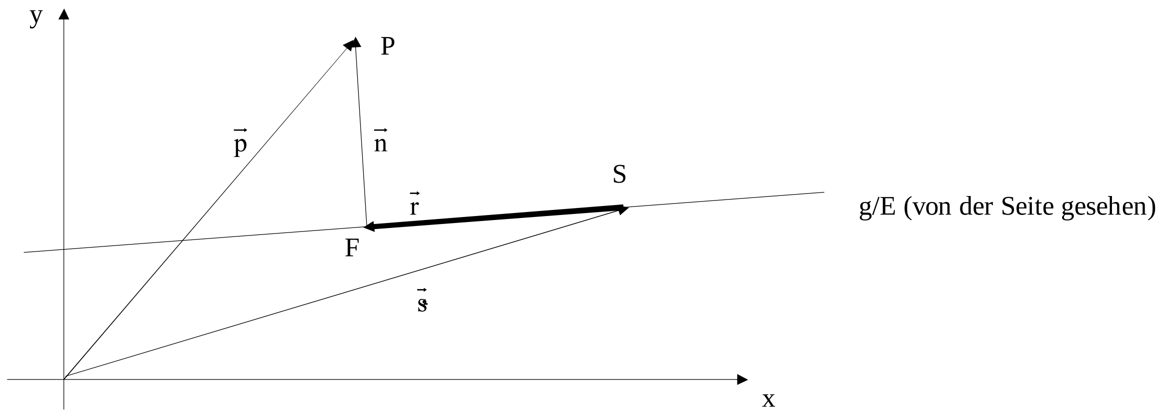
– sind die Normalenvektoren *nicht* kollinear, so *schneiden* sich die Geraden (bzw. Ebenen):



2. Weg zur Abstandsberechnung: Hessesche Normalenform

Nochmals fragen wir uns, wie der Abstand eines Punktes P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ von einer Geraden g/Ebene E berechnet werden kann. Dabei ist wieder klar: der Abstand wird *senkrecht* zu g bzw. E. gemessen, und deshalb liegt es nahe, den *Normalen*vektor $\vec{n}$ vom Lotfußpunkt F zu P zu benutzen.
Gesucht ist der Abstand zwischen P und g/E, also die Länge n dieses Normalenvektors $\vec{n}$.
Halten wir daher schon fest: $n=\sqrt{\vec{n}^2}$ bzw. $n^2 = \vec{n}^2$ (A)
Die Argumentation im folgenden wird nämlich darauf hinauslaufen, das nutzbar zu machen.
Weil $\vec{n}$ Normalenvektor zu g/E ist, können wir ihn in der Punktnormalenform von g/E benutzen:

g/E: $\vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$, wobei $\vec{s}$ der Ortsvektor eines Punktes S ist, durch den g/E geht.



Auszunutzen ist die Grundbedingung, daß $\vec{n}$ senkrecht zu g bzw. E ist, d.h. es liegt nahe, einen Vektor $\vec{r}$ in g bzw. E zu definieren, zu dem $\vec{n}$ senkrecht ist, so daß also $\vec{n} \bullet \vec{r} = 0$. (B)
Weil wir die Punkte F und S schon haben, liegt als Definition von $\vec{r}$ nahe: $\vec{r} = \overrightarrow{SF}$.
Nun gilt laut Zeichnung $\vec{n} = -\vec{r} - \vec{s} + \vec{p}$ bzw. $\vec{n} = \vec{p} - \vec{r} - \vec{s}$ und deshalb $\vec{n}^2 = (\vec{p} - \vec{r} - \vec{s}) \bullet \vec{n}$ (C)
Mit (B) folgt : $\vec{n}^2 = (\vec{p} - \vec{r} - \vec{s}) \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n} - \underbrace{\vec{r} \bullet \vec{n}}_{= 0} - \vec{s} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n} - \vec{s} \bullet \vec{n} = (\vec{p} - \vec{s}) \bullet \vec{n}$

oder kurz $\vec{n}^2 = (\vec{p} - \vec{s}) \bullet \vec{n}$.
Mit (A) wird daraus

$$n^2 = (\vec{p} - \vec{s}) \bullet \vec{n}$$

Division durch n auf beiden Seiten ergibt:

$$n = \left| (\vec{p} - \vec{s}) \bullet \frac{\vec{n}}{n} \right|$$

Dabei ist $\frac{\vec{n}}{n} = \vec{n}^0$, also der Normalen*einheits*vektor der Länge 1. Es ergibt sich also:

$$n = |\,(\vec{p} - \vec{s}\,) \bullet \vec{n}^0|$$

bzw.

$$n = |\underline{\vec{n}^0 \bullet \vec{p} - \vec{n}^0 \bullet \vec{s}}\,| \qquad \text{(D)}$$

Das Unterstrichene ähnelt nun sehr der Punktnormalenform $\vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{p} = 0$ (bei beliebigem Normalenvektor $\vec{n}$ und $\vec{p}$ statt $\vec{x}$).
Nun können wir allerdings problemlos statt des beliebigen Normalenvektors $\vec{n}$ auch den speziellen Einheitsnormalenvektor $\vec{n}^0$ einsetzen und erhalten

Die Hessesche Normalenform für Geraden/Ebenen: g/E: $\vec{n}^0\,\vec{x} - \vec{n}^0\,\vec{s} = 0$ bzw. g/E: $\vec{n}^0\,\vec{x} - d = 0$

Wir werden unten noch sehen, wie man die verschiedenen Normalenformen ineinander verwandelt, also auch aus der bekannten Punktnormalenform die neue Hessesche Normalenform macht.

Damit aber erstmal zurück zur Abstandsberechnung:
Wie man im Vergleich der Hesseschen Normalenform $\vec{n}^0\ \vec{x} - \vec{n}^0\ \vec{s} = 0$ mit der Gleichung (D)

$$n = |\underline{\vec{n}^0 \bullet \vec{p} - \vec{n}^0 \bullet \vec{s}}\,|$$

sieht, ergibt sich der Abstand eines Punktes P von der Geraden g bzw. der Ebene E ganz einfach, wenn man erstmal die Hessesche Normalenform hat:

Liegt g bzw. E in der Hesseschen Normalenform g/E: $\vec{n}^0\,\vec{x} - \vec{n}^0\,\vec{s} = 0$ bzw. $\vec{n}^0\,\vec{x} - d = 0$ vor, so braucht man nur den Ortsvektor $\vec{p}$ eines Punktes P statt $\vec{x}$ in diese Normalenform einzusetzen, und es ergibt sich der Abstand n des Punktes P von g/E als $n = |\,\vec{n}^0\,\vec{p} - \vec{n}^0\,\vec{s}\,|$ bzw. $n = |\,\vec{n}^0\,\vec{p} - d\,|$

Spezialfall der Abstandsberechnung: Sei P der Ursprung, also P (0|0) mit $\vec{p} = \vec{o}$ (Nullvektor)
Der Abstand des Ursprungs von g/ bzw. umgekehrt der Abstand von g/E zum Ursprung berechnet sich dann als
$n = |\,\vec{n}^0\,\vec{o} - \vec{n}\,\vec{s}\,| = |\,-\vec{n}\,\vec{s}\,| = |\,\vec{n}\,\vec{s}\,|$.
Daraus folgt:

Liegt eine Gerade g/Ebene E in der Hesseschen Normalenform g/E: $\vec{n}^0\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$ bzw. g/E: $\vec{n}^0\,\vec{x} - d = 0$ vor, so ist der $|\,\vec{n}\,\vec{s}\,|$ bzw. $|\,d\,|$ gleich dem Abstand der Geraden g/Ebene E vom Ursprung.

1. Beispiel:

Gegeben sei eine Gerade in der *allgemeinen* Normalenform (notfalls machen wir erst aus der Punkt*richtungs*- eine Punkt*normalen* und daraus eine *allgemeine* Normalenform). Sei also g:$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\vec{x} + 25 = 0$. Nun ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ allerdings noch *kein* Einheitsvektor, denn n = $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ *ungleich* 1.
Aber wir erhalten den Einheitsvektor $\vec{n}^0$, wenn wir durch n = *5 teilen*, und zwar tun wir das mit der *ganzen Gleichung*:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\vec{x} + \frac{25}{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\vec{x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\vec{x} - (-5) = 0$$

in der Hesseschen Normalenform muß hier ja ein *Minus* stehen

Nun ist d aber noch negativ. Das beheben wir, indem wir die *ganze* Gleichung mit "-1" multiplizieren:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\vec{x} - 5 = 0$$ Aus dieser Gleichung (jetzt erst Hessesche Normalenform) können wir *direkt*

d = 5

auch Normaleneinheitsvektor, da nur umgedreht

d

ablesen: die Gerade verläuft im Abstand 5 vom Ursprung.
2. Beispiel:
Welchen Abstand hat P (3|-2) von der in Hessescher Normalenform gegebenen Geraden g: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\vec{x} - 1 = 0$?

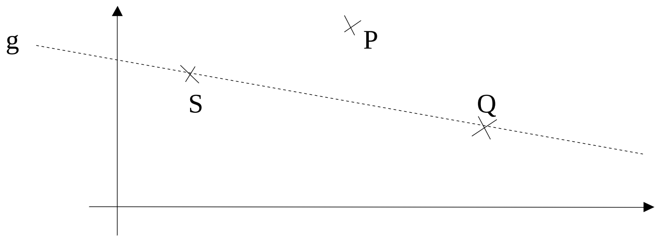
Einsetzen von $\vec{p} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ in die Hessesche Normalenform ergibt $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} - 1 = (0\cdot3 + 1\cdot[2]) - 1 = -3 = e$. Damit ist der Abstand zwischen P und g gerade $|e| = 3$.

Der Abstand zweier paralleler *Geraden/Ebenen* voneinander ist einfach berechenbar als der Abstand *eines Punktes* der einen Gerade/Ebene von der anderen *Gerade/Ebene*.

Problemlösungsbeispiel:

Aufgabe: gesucht ist der Abstand zwischen einem Punkt P und der Geraden g durch S und Q.

1. Schritt: Zeichnung: Koordinatensystem, Punkte, g durch S und Q:

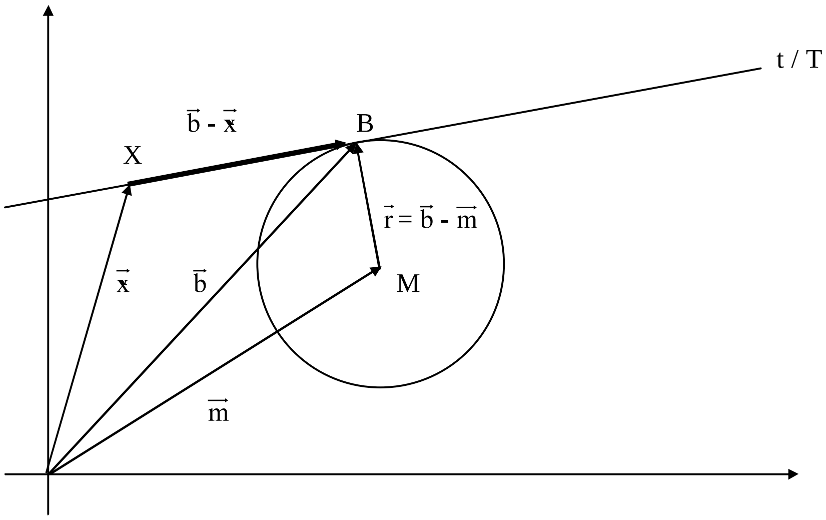


2. Schritt: a) was ist das *Ziel*?
Antwort: Abstand Punkt/Gerade
b) mit welchem *Mittel* erreiche ich das Ziel?
d.h.: *wie* berechnet man den Abstand Punkt/Gerade?
Antwort: durch Einsetzen des *Ortsvektors* von P in die *Hessesche Normalenform* von g

c) was *habe* ich bereits?
Antwort: den Ortsvektor $\vec{p}$ von P
d) was habe ich *noch nicht*?
Antwort: eine Geradengleichung (und schon gar nicht eine Hessesche Normalenform)
e) wie *bekomme* ich eine Geradengleichung für g?
welche *Teil*informationen habe ich denn bereits über g? Wie habe ich g denn *gezeichnet*?
Antwort: g geht durch die beiden Punkte S und Q
$\Rightarrow$ Zweipunkteform g: $\vec{x} = \vec{s} + m\,(\vec{q} - \vec{s})$
f) Ziel *erreicht*?
Antwort: nein, da *Hessesche Normalenform* benötigt (vgl. d)
g) wie *komme* ich von der Zweipunkteform zur Hesseschen Normalenform?
Antwort: erstmal eine *andere* Normalenform, also
*Zweipunkte*form $\to$ Punkt*richtungs*form $\to$ Punkt*normalen*form $\to$ *allgemeine* Normalenform $\to$ *Hessesche* Normalenform
h) Ziel *erreicht*?
Antwort: nein, da *Abstand* zu berechnen (vgl. a/b)
i) alle Mittel dazu *vorhanden*?
Antwort: ja, vgl. c), g)
j) Einsetzen von $\vec{p}$ in Hessesche Normalenform, Abstand = Absolutbetrag.

Tangentenformen:

Wieder eine zweidimensionale Zeichung für beide Fälle (für den dreidimensionalen Fall gilt: wir sehen Kugel und Tangentialebene von der Seite, die Ebene also als Gerade):



Dabei seien:

* $\vec{x}$ der Vektor vom Ursprung bis zu einem beliebigen Punkt X auf der *Tangente* t/*Tangentialebene* T,
* $\vec{b}$ der Vektor vom Ursprung bis zum Berührpunkt B von t/T und Kreis/Kugel,
* $\vec{m}$ der Vektor vom Ursprung bis zum Mittelpunkt M des Kreises/der Kugel,
* $\vec{r}$ der Radiusvektor vom Mittelpunkt M bis zum Berührpunkt B. Dann gilt: $\vec{r} = \vec{b} - \vec{m}$ (#)

Grundeigenschaft einer Tangente/Tangentialebene an einen Kreis/eine Kugel ist es, daß sie *senkrecht* zum Radius ist.
Da $\vec{b} - \vec{x}$ *in* der Tangente/Tangentialebene liegt, muß also gelten:

$$\vec{r} \perp (\vec{b} - \vec{x}) \Leftrightarrow \vec{r}\,(\vec{b} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \underset{(\#)}{(\vec{b} - \vec{m}\,)}(\vec{b} - \vec{x}) = 0$$

<u>Tangente-/Tangentialebenenform</u> (an einen Kreis/eine Kugel)
$(\vec{b} - \vec{m}\,)\,(\vec{b} - \vec{x}) = 0$
Tangenten*gerade* nur im 2Dim. (an Kreis), Tangential*ebene* nur im 3Dim. (an Kugel)

Formt man das um in

$$\vec{b}\,\vec{b} - \vec{b}\,\vec{x} - \vec{m}\,\vec{b} + \vec{m}\,\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\vec{m} - \vec{b})}_{\text{Vektor}} \bullet \vec{x} + \underbrace{\vec{b}\,\vec{b} - \vec{m}\,\vec{b}}_{\text{Skalar}} = 0,$$

so sieht man, daß die Tangenten-/Tangentialebenenform eine verkappte *allgemeine Normalenform* ist.

Richtungs-, Normalen-, Kreis-, Kugelformen

	1. Mehrpunkteform
Gerade	g: $\vec{x} = \vec{s} + m \underbrace{(\vec{p} - \vec{s})}_{\vec{r}}$ (S und P auf g)
Geltungsbereich	2- und 3-Dim
Ebene	E: $x = \vec{s} + m \underbrace{(\vec{p} - \vec{s})}_{\vec{r}_1} + n \underbrace{(\vec{q} - \vec{s})}_{\vec{r}_2}$ (P, Q und S in E)
Geltungsbereich	3-Dim.

2. Punktrichtungsform	3. Punktnormalenform
g: $\vec{x} = \vec{s} + m\,\vec{r}$ ($\vec{s}$ Stütz-, $\vec{r}$ Richtungsvektor senkrecht zu $\vec{n}$ aus 3.)	in *allen* Normalenformen Minus! | g: $\vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$ ($\vec{s}$ Stützvektor aus 2., $\vec{n}$ senkr. zu $\vec{r}$ aus 2.)
2- und 3-Dim.	nur 2-Dim.
E: $\vec{x} = \vec{s} + m\,\vec{r}_1 + n\,\vec{r}_2$ ($\vec{s}$ Stütz-, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ Richtungsvektoren, beide senkrecht zu $\vec{n}$ aus 3.)	E: $\vec{n}\,\vec{x} - \vec{n}\,\vec{s} = 0$ ($\vec{s}$ Stützvektor aus 2., $\vec{n}$ senkr. zu $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ aus 2.)
3-Dim.	3-Dim.

4. allgemeine Normalenform	5. Hessesche Normalenform
g: $\vec{n}\,\vec{x} - c = 0$ |:n, evtl. •(1) ($c = \vec{n}\,\vec{s}$ aus 3.)	$\Rightarrow$ g: $\vec{n}^0\,\vec{x} - d = 0$ ($\vec{n}^0$ Einheitsnormalenvektor, $d \geq 0$ Abstand vom Ursprung)
nur 2-Dim.	nur 2-Dim.
E: $\vec{n}\,\vec{x} - c = 0$ |:n, evtl. •(1) ($c = \vec{n}\,\vec{s}$ aus 3.)	$\Rightarrow$ E: $\vec{n}^0\,\vec{x} - d = 0$ ($\vec{n}^0$ Einheitsnormalenvektor, $d \geq 0$ Abstand vom Ursprung)
3-Dim.	3-dim.

6. Tangente/Tangentialebene an Kreis/Kugel (verkappte Punktnormalenform)		7. Kreis/Kugel
t: $\vec{r}\,(\vec{b} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{m})(\vec{b} - \vec{x}) = 0$ ($\vec{b}$ Berührpunkt-, $\vec{m}$ Mittelpunkt-, $\vec{r}$ Radiusvektor)	Kreis	K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ $\vec{m}$ Mittelpunktsvektor, r Radius
nur 2-Dim.		nur 2-Dim.
T: $\vec{r}\,(\vec{b} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{m})(\vec{b} - \vec{x}) = 0$ ($\vec{b}$ Berührpunkt-, $\vec{m}$Mittelpunkt-, $\vec{r}$ Radiusvektor)	Kugel	K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ $\vec{m}$ Mittelpunktsvektor, r Radius
3-Dim.		3-Dim.

In all diesen Geraden/Ebenen-/Kreis-/Kugelgleichungen gilt:
a) die $\vec{x}$ sind Vektoren, die
- im *Ursprung* beginnen und
- auf der Gerade/Ebene/Kreis/Kugel *enden*.

D.h., daß nur ihre *End*punkte die Gerade/Ebene(Kreis/Kugel) bilden, aber nicht, daß die Vektoren *selbst* auf der Geraden/in der Ebene/auf dem Kreis/der Kugel liegen.

b) Geraden-/Ebenen-/Kreis-/Kugelgleichungen werden von *allen* $\vec{x}$ erfüllt, die im *Ursprung* beginnen und auf der *Geraden/Ebene/*dem *Kreis*/der *Kugel* enden. D.h., daß die Lösungsmenge *unendlich groß* ist und daß die Gleichungen *nicht eindeutig* nach *einem* $\vec{x}$ auflösbar sind, sondern daß man nur *Spezialfälle* ausrechnen kann (z.B.: welches $\vec{x}$ mit der x-Koordinate 0 endet auf g/E/K?).

Alle Geraden-/Ebenengleichungen sind *ineinander überführbar* (man bedenke dabei immer: Lotvektoren stehen senkrecht auf Richtungsvektoren und umgekehrt).
Ausnahme!!!: 3-dimensionale Geradengleichungen in Zweipunkte-/Punktrichtungsform sind *nicht* in Normalenform darstellbar.
Man beachte insbesondere: die Hessesche Normalenform ist ein *Spezialfall* der allgemeinen Normalenform, braucht also nicht erst in diese überführt zu werden.

Liste möglicher Beziehungen:
(man beachte: Tangenten/Tangentialebenen sind auch nur Geraden/Ebenen)

1. Punkt/Gerade (Ebene, Kreis, Kugel)
   der Punkt X liegt genau dann auf g (E, K), wenn sein Ortsvektor $\vec{x}$ dort endet, wenn also $\vec{x}$ die Gleichung von g (E, K) erfüllt
2. Gerade/Gerade:
   - $g_1 = g_2$
   - parallel
   - Schnittpunkt
   - windschief (nur im 3-Dim)
3. Gerade/Ebene:
   - g in E
   - g parallel zu E
   - g schneidet E in Schnittpunkt
4. Ebene/Ebene:
   - $E_1 = E_2$
   - parallel
   - Schnittgerade
5. Gerade/Kreis bzw. Ebene/Kugel:

- g/E Passante (*kein* gemeinsamer Punkt)
- g/E Tangente (Berührpunkt *einziger gemeinsamer* Punkt, alle anderen Punkte von g/E *außerhalb* von K)
- g/E Sekante: a) g schneidet Kreis in *zwei* Punkten,
  b) E schneidet Kugel in einem *Kreis*

Fallunterscheidungen nach:
a) in 2. - 4. (Nicht-)*Kollinearität* bzw. *Komplanarität* der *Rich tungsvektoren*,
b) Untersuchung auf *gemeinsame Punkte*. Mögliche Untersuchungen:
A) Stützvektor des einen auf dem anderen endend?
B) Gleichsetzung zweier Punktrichtungsformen,
C) Einsetzung einer Punktrichtungs in eine Punktnormalenform.

Abi-Musteraufgaben: Vektorgeometrie

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sowie die Kugel K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right]^2 = 169$.

1) Zeige, daß E eine Tangentialebene von K ist, und gib die Koordinaten des Berührpunkts B an.

2) Die Ebene E_1 geht durch den Mittelpunkt M von K und ist senkrecht zu g.

a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S_1 von g und E_1 .
[Ergebnis: $S_1 = (8|4|-4)$]

b) Untersuche mit Hilfe von S_1, wie g zu K liegt.

3a) Zeige, daß E_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lotebene zu $\vec{m}$ (Ortsvektor des Kugelmittelpunkts) durch den Ursprung ist.

b) Weise nach, daß sich E_2 und K schneiden.

c) Bestimme für den Schnittkreis k von E_2 und K den Radius r_k und Mittelpunkt M_k (Skizze!)

Lösung:

zu 1): α) E ist genau dann eine Tangentialebene von K, wenn der Abstand zwischen E und K *gleich* dem Kugelradius $r = \sqrt{169} = 13$ ist.
Dazu berechnen wir den Abstand der Ebene E vom Mittelpunkt M(4|1|8) der Kugel bzw. umgekehrt den Abstand von M(4|1|8) von der Ebene E.

I) Differenzvektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Später wichtige Anmerkung: $\vec{d}$ zeigt von M zur Ebene (dem Berührpunkt B) *hin*.

II) $\vec{d}$ muß senkrecht auf *beiden* Richtungsvektoren von E stehen, d.h. das Skalarprodukt mit ihnen muß 0 sein:

$$a)\ 0 = \vec{d} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -19 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$= -61 + 25r - 9s$

b) $0 = \vec{d} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -19 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -19 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= 49 - 9r + 10s$

c) Beide Bedingungen aus a) und b) müssen gleichzeitig gelten, also:

$\begin{cases} 0 = -61 + 25r - 9s \\ 0 = 49 - 9r + 10s \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $r = 1 \wedge s = -4$

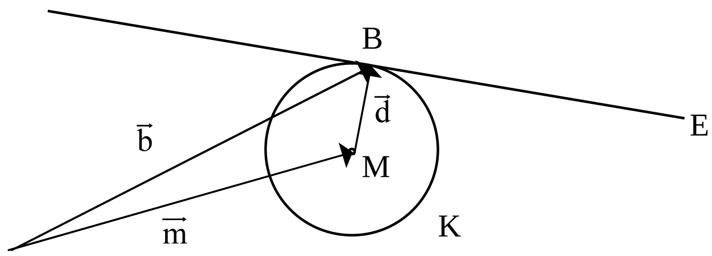
Lösen des Gleichungssystems

$r = 1$ und $s = -4$ in $\vec{d} = \begin{pmatrix} -19 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eingesetzt ergibt

$\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$, und die Länge dieses Vektor ist in der Tat 13.

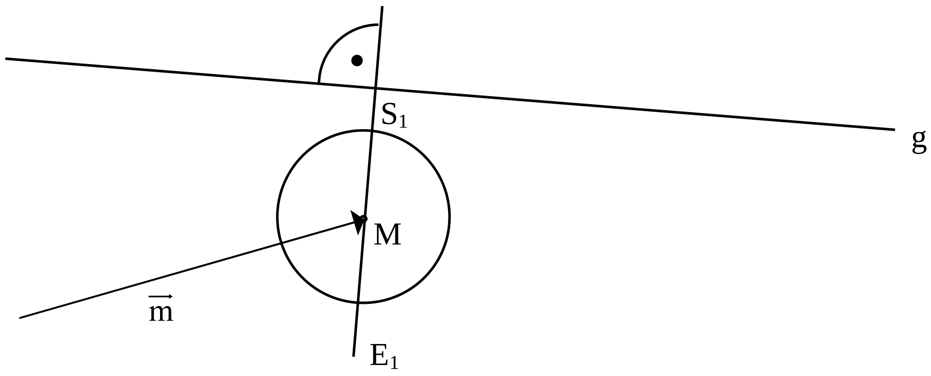
E ist also tatsächlich Tangentialebene zu K.

ß) Bestimmung von B:



$\vec{b} = \vec{m} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B = (0|4|-4)$

zu 2):



α) E_1 geht durch M, also ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ als Stützvektor von E_1 verwendbar.

ß) E_1 ist orthogonal zu g $\Leftrightarrow$ die Richtungsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ von E sind orthogonal zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ von g $\Leftrightarrow \vec{r}_1 \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{r}_2 \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. Zwei solche orthogonale Vektoren sind $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

α), ß) $\Rightarrow E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

zu 2a): $g = E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

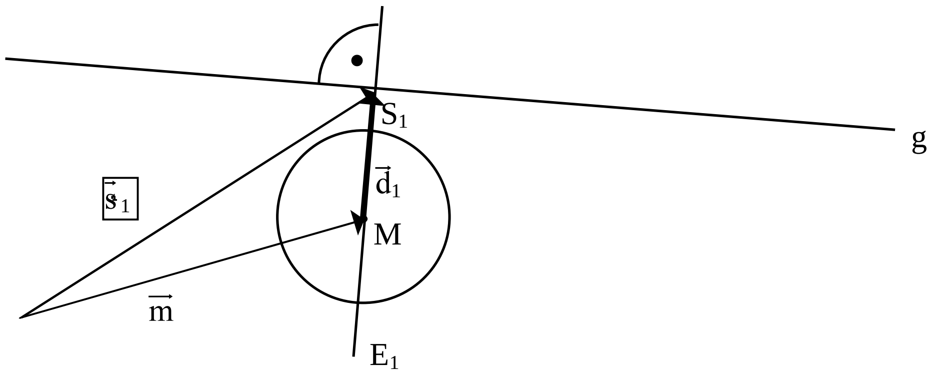
$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} 2 + 3t = 4 + 4r & | -4 - 3t \\ -4 + 4t = 1 - 3r + 2s & | -1 - 4t \\ -8 + 2t = 8 - 4s & | -8 - 2t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} -2 = 4r - 3t \\ -5 = -3r + 2s - 4t \\ -16 = - 4s - 2t \end{array} \right. \underset{\text{Lösung des Gleichungssystems}}{\Leftrightarrow} r = 1 \wedge s = 3 \wedge t = 2$$

Einsetzen von t = 2 in die Geradengleichung ergibt $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1 = (8|4|-4)$

zu 2b):



α) g *schneidet* K genau dann (g ist Sekante), wenn S_1 *innerhalb* von K liegt ⇔ der Abstand zwischen S_1 und M ist *kleiner* als 13

ß) g *berührt* K genau dann (g ist *Tangente*), wenn S_1 auf K liegt ⇔ der Abstand zwischen S_1 und M ist *gleich* 13

γ) g geht an K genau dann *vorbei* (g ist Passante), wenn S_1 *außerhalb* von K liegt ⇔ der Abstand zwischen S_1 und M ist *größer* als 13

Gesucht ist also in allen Fällen der Abstand zwischen S_1 und M, d.h. die Länge d_1 des Vektors $\vec{d}_1$

$\vec{d}_1 = \vec{s}_1 - \vec{m} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 13 \Rightarrow$ der Fall ß) liegt vor, d.h. g ist Tangente von K

(es sei erwähnt, daß hiermit die Planskizze nachgebessert werden könnte: g ist nicht - wie noch in der Planskizze - *Passante*, sondern *Tangente* der Kugel K)

zu 3a): α) E_2 ist Lotebene zu $\vec{m}$ ⇔ $\vec{m}$ senkrecht zu *beiden* Richtungsvektoren von E_2 ⇔ das Skalarprodukt von jeweils einem Richtungsvektor von E_2 mit $\vec{m}$ ist Null.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

ß) E_2 geht durch den Ursprung ⇔ der Ursprungs- = Nullvektor ist eine Lösung der Ebenengleichung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 0 = -4 + a - 2b \\ 0 = 8 + 4a \\ 0 = 1 - a + b \end{array} \right. \underset{\text{Lösen des Gleichungssystems}}{\Leftrightarrow} a = -2 \wedge b = -3$$

Es gibt also eindeutige a und b, also geht E_2 durch den Ursprung.

zu 3b): E_2 und K schneiden sich ⇔ der Abstand zwischen E_2 und M ist < 13 (Kugelradius). Nun wissen wir aber bereits: E_2 geht durch den Ursprung und ist senkrecht zu $\vec{m}$ ⇒ der Abstand zwischen E_2 und K ist gleich der Länge m des Vektors $\vec{m}$. Es ergibt sich m = 9.

Weil also der Abstand zwischen E_2 und dem Kugelmittelpunkt M *kleiner* als der Kugelradius ist, *schneidet* E_2 die Kugel K, und zwar in einem Kreis k:

zu 3c): Wir zeichnen K sowie E_2 mit all den Informationen, die wir schon über E_2 gewonnen haben, d.h. insbesondere:

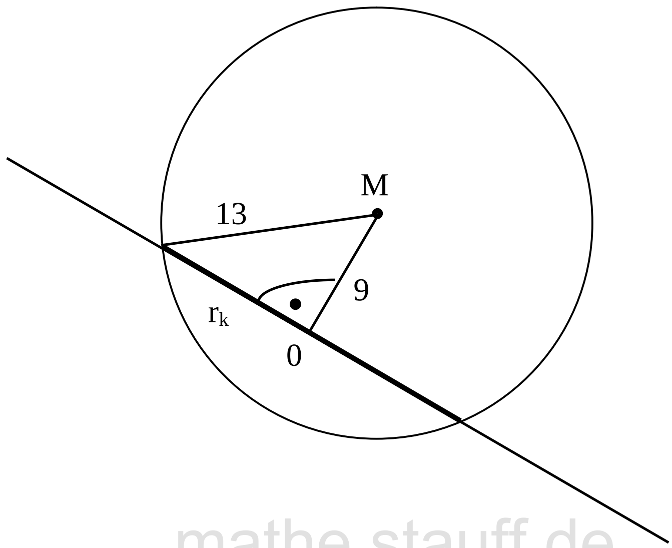
α) E_2 geht durch den Ursprung 0

ß) E_2 ist senkrecht zu $\vec{m}$ (dem Vektor vom Ursprung zu M)

γ) der Abstand zwischen E_2 und M ist 9

ε) der Kugelradius ist 13

Dicker eingezeichnet sei der Kreis k (hier von der Seite gesehen):



Halten wir schonmal fest: Mittelpunkt des Kreises k ist der Ursprung.

Auf das in der Zeichnung entstehende rechtwinklige Dreieck ist der Pythagoras anwendbar, und damit ergibt sich $r_k = \sqrt{13^2 - 9^2} = \sqrt{88}$.

Es sei darauf hingewiesen, daß in der Aufgabenstellung *nicht* nach der Kreisgleichung gefragt ist - die auch (obwohl wir r und M kennen) gar nicht aufstellbar wäre: wir kennen nur Kreisgleichungen im *Zwei*dimensionalen, der hier vorliegende Kreis k liegt aber „quer“ im *Drei*dimensionalen.

Vektorgeometrie kann uns hier also sowieso nicht weiter helfen, und gerade deshalb ist der Rücksprung in die *nicht*-vektorielle, normale Geometrie (Pythagoras) nötig.

Der letzte Teil ist ein typisches Beispiel für eine „schwierigere“ Abi-Aufgabe: er ist nun wahrhaft nicht schwierig, sondern mit bloßem Mittelstufenstoff zu bewältigen; man muß aber erstmal drauf kommen, muß aus der Not (vektorielle Nicht-Berechenbarkeit) eine Tugend zu machen wissen.