Der Algebra-Stammbaum

Die gesamte Algebra ist logisch auf *ein* Ziel hin ausgerichtet: in der Oberstufe sollen *Funktionen* vollständig auf Details (Nullstellen, Minima und Maxima, Wendepunkte, Flächen) hin untersucht werden.
D.h., der Begriff der *Funktion* ist absolut zentral.
Bis dahin ist aber folgender Weg zurückzulegen, wobei jeder Schritt direkt auf dem vorherigen aufbaut (zur Lösung von Gleichungen muß man z.B. Terme umformen können, denn Gleichungen haben die Form $Term_1 = Term_2$):

1. Rechnen mit *Zahlen*, z.B. 3
   - Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$
   - Rechengesetze
2. Rechnen mit *Variablen* (Platzhalter für Zahlen), z.B. x
3. Umformen von *Termen* (Kombinationen aus Zahlen und Platzhaltern), z.B. $3x+2x = 5x$
   - Klammern
   - Rechengesetze (Kommutativ-, Distributiv-, Assoziativgesetz, Binomis)
4. Auflösen von *Gleichungen* nach x, z.B. $3x = 12$
5. Abbildungen und *Funktionen*, z.B. f: $y = 3x - 12$
   - Bestimmen von Eigenschaften von Funktionen

Schriftliches Dividieren

169060 soll durch 428 dividiert werden, also 169060 : 428

169060

1. Schritt: von vorne: 1 ist *kleiner* als 428, also *nicht* durch 428 dividierbar
16 ist *kleiner* als 428, also *nicht* durch 428 dividierbar
169 ist *kleiner* als 428, also *nicht* durch 428 dividierbar
1690 ist *größer* als 428, also durch 428 dividierbar

Es ergibt sich: 428 paßt mindestens 3mal in 1690 rein

2. Schritt: 169060 : 428 = 3 ....

428 • 3 = 1284

3. Schritt: 169060 : 428 = 3 ...
- 1284
406

die nächste Ziffer wird heruntergeholt

4. Schritt: 169060 : 428 = 3 ...
- 1284
4066

erneute Überlegung: 428 paßt mindestens 9mal in 4066

5. Schritt: 169060 : 428 = 39 ...
- 1284
4066

428 • 9 = 3852

6. Schritt: 169060 : 428 = 39 ...
- 1284
4066
- 3852
214

die nächste Ziffer wird heruntergeholt

7. Schritt: 169060 : 428 = 39 ...
- 1284
4066
- 3852
2140

erneute Überlegung: 428 paßt genau 5mal in 2140

8. Schritt: 169060 : 428 = 395
- 1284
4066
- 3852
2140

428 • 5 = 2140

7. Schritt: 169060 : 428 = 395
- 1284
4066
- 3852
2140
- 2140
0

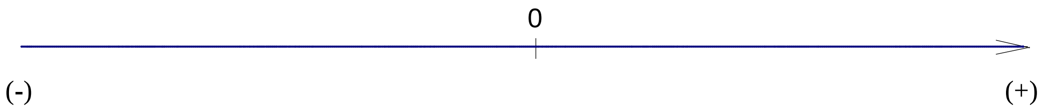
Rest 0 ⇒ die Division ist glatt, d.h. ohne Rest aufgegangen

8. Schritt: Ergebnis 169060 : 428 = 395

Vor- und Rechenzeichen

a) Zahlenstrahl, Vorzeichen und Pfeile

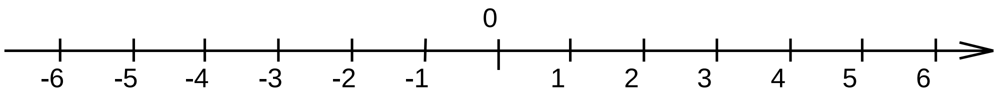
Den Sinn *negativer* Zahlen kann man sich ganz einfach an einem Thermometer klarmachen: es ist doch ein ganz gewaltiger Unterschied, ob es + 25 oder - 25 Grad ist. Irgendwo muß man auch den Nullpunkt hinlegen, um einen *Bezugspunkt* zu haben: + 25 Grad bedeutet ja, daß die Temperatur 25 Grad *über* diesem Nullpunkt liegt, - 25 Grad, daß die Temperatur 25 Grad *unter* dem Nullpunkt liegt (bei unserem Thermometer hat man den Nullpunkt genau dahin gelegt, wo Wasser zu Eis gefriert).
Statt des Thermometers benutzen die Mathematiker einen *Zahlenstrahl*, den man sich auch als querliegendes Thermometer vorstellen kann. Er sieht immer so aus:



Dabei ist wichtig:

1. Es muß *immer* der *Null* bzw. Bezugspunkt festgelegt werden deshalb *immer* dranschreiben!
2. Der Zahlenstrahl geht in *beiden* Richtungen *unendlich* weiter, da man auch beliebig große positive Zahlen (z.B. + 1000) und beliebig kleine negative Zahlen (z.B. - 1000) darstellen möchte.
3. Man hat sich geeinigt, daß rechts vom Nullpunkt die positiven und links vom Nullpunkt die negativen Zahlen liegen sollen. Das macht man durch die *Pfeilspitze in positiver Richtung* deutlich (Pfeilspitze also *immer* nur nach rechts!).

4. Auf dem Zahlenstrahl kann man nun einen beliebigen Maßstab wählen. In der Regel wählt man als Einheit einen Zentimeter. Es ist aber auch jede andere Einheit möglich (an der Tafel z.B. 10 cm). Wichtig ist nur: es darf nur *ein* Maßstab benutzt werden, d.h., die eingetragenen Zahlen müssen *gleichweit* voneinander entfernt liegen. Damit ergibt sich z.B.:



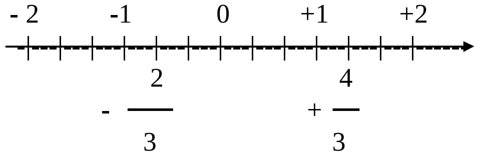
Hier sieht man schon:
5. je weiter eine Zahl *links* liegt, desto *kleiner* ist sie
6. je weiter eine Zahl *rechts* liegt, desto *größer* ist sie
7. liegt eine Zahl a (z.B. 6) *links* von b (z.B. +2), so folgt: $a < b$ (in Worten: a kleiner b bzw. b größer a)

$$-6 < +2$$

Oder $-1000 < 25$

Hier kann man sich nebenbei schnell vertun: beachtet man das Minuszeichen vor -1000 nicht, so hält man das für eine riesige Zahl und meint fäschlich, das müsse doch wohl größer als 25 sein.

Mit diesem Zahlenstrahl können wir nun alle uns bekannten Zahlen graphisch darstellen, also natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$), ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$, also auch negative Zahlen) und rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$, also positive und negative Brüche). Nur ein Beispiel für solche Brüche:



Halten wir sofort fest:

Jede Zahl ist gekennzeichnet durch ein *Vorzeichen*, das zeigt, ob die Zahl links oder rechts des Nullpunktes liegt, also größer oder kleiner als Null ist.
Weil aber das Positive der regelfall und das Negative nur die Ausnahme ist, weil zudem die Mathematiker aber so faul sind, lassen sie das positive Vorzeichen gerne weg. Wir sagen im Alltag ja auch nicht "plus 5 Äpfel". Also bedeutet

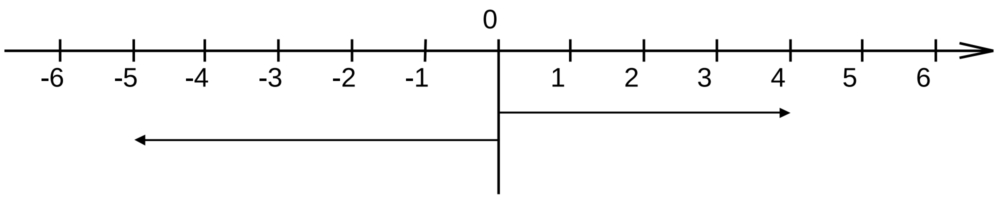
$$5 = +5$$
$$-5 = -5$$

Steht irgendwo also z.B. nur eine 5, so muß man wissen, daß das eigentlich +5 bedeutet, und sich das positive Vorzeichen notfalls *ergänzen*.

Bisher haben wir jede Zahl als einen *Punkt* auf dem Zahlenstrahl dargestellt. Später können wir aber noch eine andere Form der Darstellung gebrauchen, nämlich die *Pfeil*schreibweise:

Jede Zahl läßt sich auch darstellen als ein *Pfeil*, der im *Nullpunkt beginnt* und dessen *Pfeilspitze im zugehörigen Punkt* auf dem Zahlenstrahl endet.

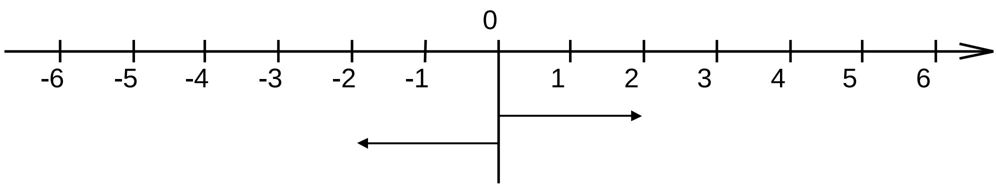
Beispiele dafür seien die Pfeile für -5 und +4:



Wir sehen schon:

1. die Pfeile *positiver* Zahlen zeigen vom Nullpunkt nach *rechts*,
2. die Pfeile *negativer* Zahlen zeigen vom Nullpunkt nach *links*.

Später können wir auch noch folgende Sprechweise gebrauchen: da +2 und -2 *gleichweit* von Null entfernt sind, nur jeweils auf der *anderen* Seite von Null liegen, nennt man sie auch *Gegenzahlen* zueinander. +2 ist Gegenzahl zu -2 und umgekehrt -2 Gegenzahl zu +2 (ebenso 3 zu -3 und -3 zu 3 oder allgemein a zu -a und -a zu a). Schauen wir uns das in Pfeilschreibweise an:



Man sieht: Pfeil und Gegenpfeil unterscheiden sich nur in ihrer (umgekehrten) *Richtung, nicht* aber in der *Länge*.

b) Rechenzeichen und Vorzeichen

Nachdem wir nun mittels des Vorzeichens jede Einzelzahl festlegen können, überlegen wir nun, wie wir mit mehreren solchen Zahlen *rechnen* (also addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren). Dazu müssen wir sofort unterscheiden:

Vor *jeder* Zahl steht ein Vorzeichen: es gehört *direkt* zu ihr dazu und gibt eine ihrer *untrennbaren* Eigenschaften an, ob sie nämlich *positiv* oder *negativ* ist.
Davon unbedingt zu *unterscheiden* sind die Rechenzeichen, die angeben, wie *zwei* Zahlen (von denen jede schon ein Vorzeichen hat) miteinander *verknüpft* werden (d.h. addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert).

Den Unterschied kann man sich gut folgendermaßen klarmachen: ein Faden soll mit einer Stricknadel zu einem Pullover gestrickt werden. *Grundeigenschaft* (sozusagen Vorzeichen) des Fadens ist, daß er aus *Baumwolle* ist. *Grundeigenschaft* (sozusagen Vorzeichen) der Stricknadel ist, daß sie aus *Metall* ist. Diese Grund-eigenschaften bestehen auch dann, wenn Faden und Stricknadel noch *gar nicht* in Berührung kommen, also noch gar nicht gestrickt wird. Aber sie bestehen auch *weiter*, wenn gestrickt wird. Die *Verknüpfung* (sozusagen das Rechenzeichen) drückt aus, wie ich Faden und Nadel *zusammen* benutze, also den Faden *mittels* der Stricknadel zu einem Pullover verstricke.
Das Problem besteht nun darin, daß die Mathematiker aus purer Faulheit für Vor- und Rechenzeichen die *gleichen* Symbole verwenden. Um das auseinanderzuhalten, schreiben wir vorerst immer drunter, was wir meinen:

$\underset{v}{+}\ ,\ \underset{v}{-}$ sind Vorzeichen

$\underset{r}{+}\ ,\ \underset{r}{-}\ ,\ \underset{r}{\bullet}\ ,\ \underset{r}{:}$ sind Rechenzeichen

+ und - können also *sowohl* Rechen- *als auch* Vorzeichen sein, • und : hingegen *nur* Rechenzeichen.

Damit können wir uns daran begeben,
- was die Rechenzeichen eigentlich *bedeuten* sollen und
- *wie* da gerechnet werden soll, aber auch,
- was passiert, wenn bestimmte Vor- und Rechenzeichen *gemeinsam* auftauchen.

c) Rechnen mit ganzen (also auch negativen) Zahlen

1. Zahlen werden durch Pfeile veranschaulicht.
2. Zu jeder Zahl gehört ein Pfeil, der
   a) immer (bei allen Pfeilen) im Ursprung beginnt und
   b) in der Zahl auf dem Zahlenstrahl endet
   (später sind Pfeile allerdings auch parallel zum Zahlenstrahl verschiebbar)
3. Es folgt: positive Zahlen haben nach *rechts* gerichtete Pfeile,
   negative Zahlen haben nach links gerichtete Pfeile.
   Die Pfeile sind immer *parallel zum Zahlenstrahl*.
4. Jede Zahl ist durch einen Pfeil darstellbar
   (nur die Zahl Null hat einen Pfeil der Länge Null, den man nicht *zeichnen* kann)
5. Vorzeichen (dringend von *Rechenzeichen* unterscheiden!)

5a) Jede Zahl hat ein Vorzeichen.

+3 = +3 = 3
v

-3 = -3
v

vorerst so!

5b) Jede Zahl außer der Null ist ganz eindeutig und endgültig positiv oder negativ.

+ 0 = - 0 = ± 0 = 0
v v v

(Die Null ist sozusagen ein Zwitter aus Mann und Frau)

Das Vorzeichen ist also eine unveränderbare, „angeborene“ Eigenschaft.

+ 3 ist eine positive Zahl
v
-3 ist eine negative Zahl
v

(vgl.: dieser Mensch ist von Geburt an und unveränderbar ein Mann)

6. Rechenzeichen stehen hingegen für eine Tätigkeit, die man auf mehrere Zahlen anwendet.
Man kann zwei Zahlen addieren (+), subtrahieren (-), multiplizieren (•) und dividieren (:)
R R R R
(Beispiel für Tätigkeit: ich *verheirate* einen Mann und eine Frau; ihr jeweiliges Geschlecht [Eigenschaft] ändert sich dadurch nicht)
7. Vorzeichen *müssen* auftreten, Rechenzeichen *können* auftreten
(vgl.: der Mann *ist* männlich, ich *kann* ihn schlagen)
8. Es können nie zwei Vorzeichen oder zwei Rechenzeichen *direkt hintereinander* auftauchen
(vgl. ein männlicher Mann oder eine männliche Frau)
v v v v

man einen Mann und Frau nicht gleichzeitig verheiraten *und* scheiden)
R R
9. Pfeile *untereinander*legen, *auf* dem Zahlenstrahl gemeint

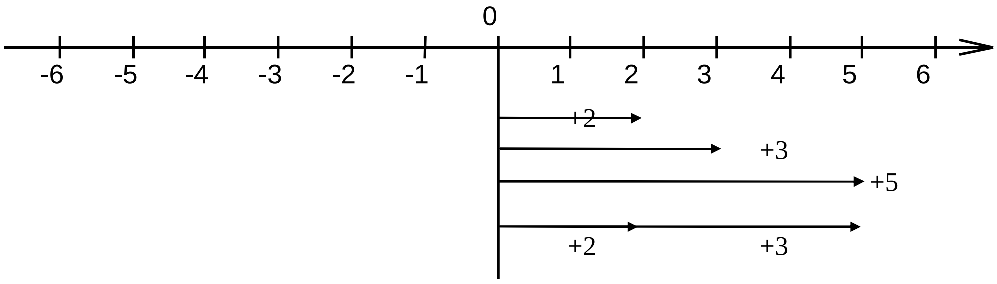
d) Addition von Zahlen

Fangen wir mit dem Einfachsten an: zwei *positive* Zahlen sollen *addiert* werden. Z.B. wollen wir rechnen:

2 + 3 bzw. (+2) + (+3)
r v r v

Wir sehen nebenbei schon: tauchen Vor- *und* Rechenzeichen auf, so trennt man sie durch eine *Klammer*.

Nun weiß natürlich jeder, daß 2 + 3 = 5. Wir wollen es aber dennoch nochmal mit *Pfeilen* darstellen, um schon eine wichtige Eigenschaft der Pfeilrechnung kennenzulernen, die wir später noch gebrauchen können:



Wir sehen: den Ergebnispfeil von +5 können wir auch dadurch erhalten, daß wir die Pfeile von +2 und +3 *hintereinanderlegen*.
Halten wir also sofort allgemein fest:

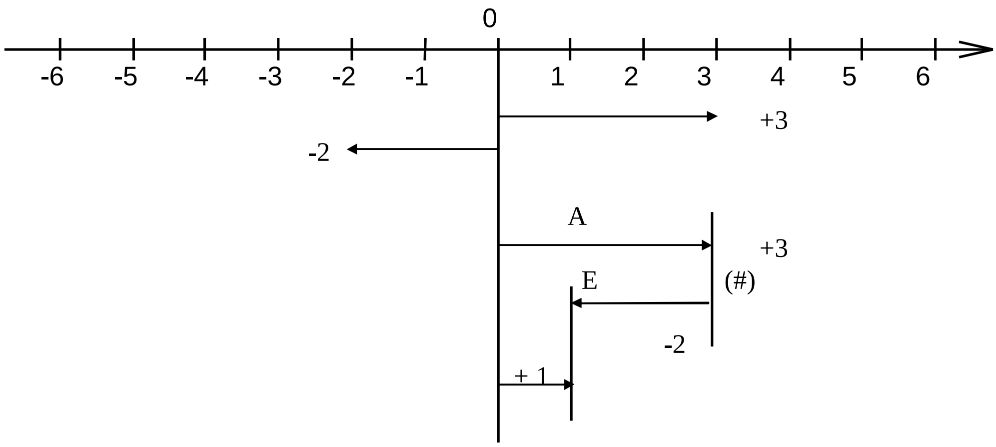
Zwei Pfeile p_1 und p_2 werden addiert, indem man den Anfangspunkt von p_2 in den Endpunkt von p_1 legt. Den Ergebnispfeil p_E erhält man dann, indem man den Anfangspunkt von p_1 mit dem Endpunkt von p_2 verbindet.

Halten wir schon fest: da 2 + 3 = 2 + (+3), können wir statt + + auch einfach + verwenden.
v r r

Oder kurz:

1. + + = + r v r

Nun können wir auch schon eine *negative* Zahl addieren, also z.B. rechnen:
3 + (-2) bzw. (+3) + (-2)
r v v r v
Mit Pfeilen und der Anwendung der Regel erhalten wir:



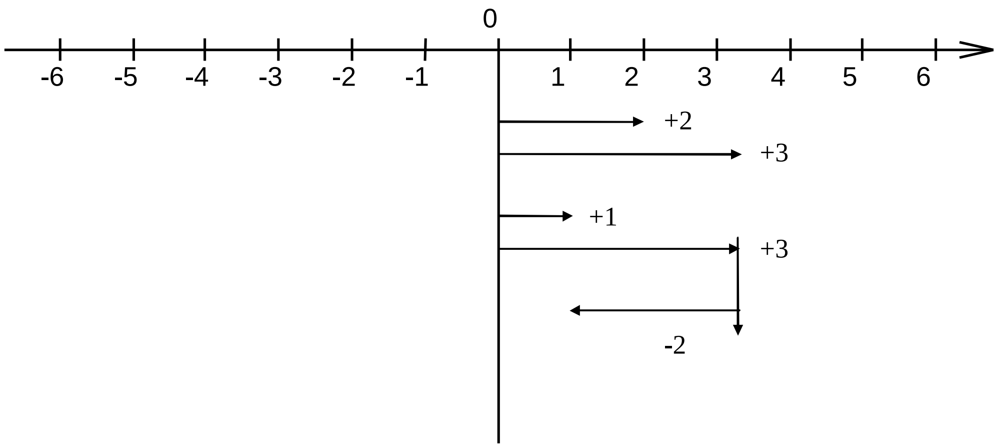
Nachdem wir also die Pfeile von +3 und 2 eingezeichnet haben, haben wir sie in (#) nach obiger Regel *hintereinandergelegt* und erhalten den Pfeil +1, wenn wir den Anfang A des Pfeiles +3 mit dem Ende E des Pfeiles 2 verbinden.

e) Subtraktion von Zahlen

Kommen wir damit zur Subtraktion von Zahlen.

Dazu wieder ein Beispiel, nämlich 3 - 2 bzw. (+3) - (+2)
r v r v

Nun weiß jeder, daß 3 - 2 = 1. Überlegen wir uns daher, wie wir mit *Pfeilen* zu diesem Ergebnis kommen:



Statt +2 zu *subtrahieren*, können wir also ebensogut die *Gegenzahl/den Gegenpfeil* 2 *addieren*.
Oder allgemein:

Ein Pfeil p_2 wird von einem Pfeil p_1 *subtrahiert*, indem man den *Gegenpfeil* von p_2 zu p_1 *addiert*.

Wegen 3 + (-2) = 3 - 2 = 3 - (+2)
r v r r v

können wir weiterhin festhalten: statt + - bzw. - + können wir auch einfach - verwenden.
r v r v r

Oder kurz:

2. + - = - bzw. 3. - + = - r v r r v r

Schauen wir uns nun an, was passiert, wenn ich eine *negative* Zahl *subtrahiere*, z.B. 3 - (-2)
r v

Nun wissen wir bereits: eine Zahl wird *subtrahiert*, indem ich ihre *Gegenzahl addiere*. Statt 3 - (-2) kann ich also auch rechnen: 3 + (+2) = 3 + 2 = 5
r v r v r

Oder allgemein: statt - - können wir auch einfach + verwenden.
r v r

Oder kurz:

4. - - = + r v r

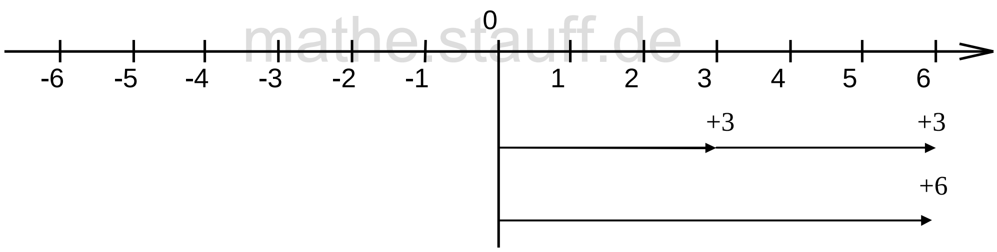
(Das kann man sich leicht merken: - - ist wie eine doppelte Verneinung: wenn es nicht [-] stimmt, daß es nicht [-] regnet, dann regnet [+] es.)

Insgesamt können wir also festhalten:

1. + + = + 2. + - = - 3. - + = - 4. - - = +
 r v r   r v r   r v r   r v r
Oder: zwei *gleiche* Rechen-/Vorzeichen ergeben das Rechenzeichen *Plus*
zwei *verschiedene* Rechen-/Vorzeichen ergeben das Rechenzeichen *Minus*.
Wohl gemerkt: hier werden ein Rechen- und ein Vorzeichen zu einem Rechenzeichen zusammengefaßt (bei der Multiplikation/Division ist das anders!). Das *Vor*zeichen ist dann immer *Plus* und kann *wegfallen*.

f) Multiplikation von Zahlen

Wir fangen wieder mit einer besonders einfachen Rechnung an:
2 • 3 bzw. (+2) • (+3)
 r   v r v
Jeder weiß, daß 2 • 3 = 6. Schauen wir uns das wieder in *Pfeil*schreibweise an, wobei wir bedenken, daß 2 • 3 = 3 + 3.
Solch eine *Addition* können wir aber schon mit Pfeilen durchführen:



Wir stellen also fest:

Ein Pfeil (hier der von +3) wird mit einer positiven Zahl (hier +2) multipliziert, indem man die *Länge* des Pfeils mit der Zahl multipliziert und die *Richtung* beibehält.

Insbesondere erhalten wir: (+2) • (+3) = +6 oder kurz:
 v r v r

1. + • + = +
 v r v v

Wenden wir nun die gerade gefundene Regel für die Multiplikation auf 2 • (-3) bzw. (+2) • (-3) an:
 r v   v r v
der nach links gerichtete Pfeil von -3 wird mit der positiven Zahl +2 multipliziert, indem seine *Länge* (also 3) mit 2 multipliziert wird (es ergibt sich 3 • 2 = 6 als *Länge*), seine negative *Richtung* nach links aber beibehalten wird. Insgesamt erhalten wir also:
(+2) • (-3) = -6
 v r v v

Oder kurz:

2. + • - = - v r v v

Da die Multiplikation kommutativ ist, folgt sofort auch:

(-3) • (+2) = -6
v r v r

oder kurz:

3. - • + = - v r v v

Insbesondere können wir festhalten: -a = (-1) • (+a) = (-1) • a

Halten wir außerdem schon fest:

$(-3) \cdot (+2) = -6 = - \overbrace{[(+3) \cdot (+2)]}^{6}.$

Wir können also das Minus vor der ersten Zahl *rausziehen*.

Bleibt zu überlegen, was das Produkt *zweier negativer* Zahlen sein soll, was also z.B. (-3) • (-2) ist.
v r v

Nun benutzen wir den Trick von eben: wir ziehen das Minus vor der -3 heraus und erhalten

- [3 • (-2)] bzw. - [(+3) · (-2)]
v r v v v r v

Das in der eckigen Klammer können wir aber schon berechnen, denn (+3) • (-2) = -6.
v r v v

Insgesamt erhalten wir also:

(-3) • (-2) = -[(+3) • (-2)] = - [-6] = +6
v r v v v r v v v v

oder kurz: (-3) • (-2) = +6
v r v v

oder:

4. - • - = + v r v v

Wieder können wir zusammenfassen:

1. + • + = + 2. + • - = - 3. - • + = - 4. - • - = + v r v v v r v v v r v v v r v v Oder: bei der Multiplikation ergeben zwei *gleiche* <u>Vor</u>zeichen das <u>Vor</u>zeichen *Plus* zwei *verschiedene* <u>Vor</u>zeichen das <u>Vor</u>zeichen *Minus* Wohl gemerkt: hier werden *zwei* <u>Vor</u>zeichen zu *einem* <u>Vor</u>zeichen zusammengefaßt (bei der Addition ist das anders!)

g) Division von Zahlen

Alle Eigenschaften der Division können wir aus der Multiplikation folgern:

Weil (+2) • (+3) = +6, folgt: (+6) : (+3) = +2
v r v v v r v v
oder kurz:

1. + : + = +
v r v v

Weil (+2) • (-3) = -6, folgt: (-6) : (+2) = -3
v r v v v r v v
oder kurz:

2. - : + = -
v r v v

Weil (-2) • (-3) = +6, folgt: (+6) : (-3) = -2
v r v v v r v v
oder kurz:

3. + : - = -
v r v v

Weil (+2) • (-3) = -6, folgt: (-6) : (-3) = +2
v r v v v r v v
oder kurz:

4. - : - = +
v r v v

Genau wie bei der Multiplikation können wir zusammenfassen:

1. + : + = + 2. + : - = - 3. - : + = - 4. - : - = +
v r v v v r v v v r v v v r v v
Oder: wie bei der Multiplikation ergeben auch bei der Division
zwei *gleiche* Vorzeichen das Vorzeichen *Plus*
zwei *verschiedene* Vorzeichen das Vorzeichen *Minus*

h) Standardverfahren zur Multiplikation/Division

1. Man faßt erst die *beiden* Vorzeichen nach obigen Regeln 1. - 4. zu *einem* Vorzeichen zusammen
2. Man multipliziert/dividiert dann die Zahlen *ohne* Vorzeichen.

Beispiele: a) (+2) • (+3) =
+ 2•3 =
+ 6

b) (-10) : (+5) =
- 10:5 =
- 2

c) (+8) : (-2) =
- 8:2 =
- 4

d) (-3) • (-4) =
+ 3•4 =
+ 12

Vorsicht, beliebter Fehler!!!:
Dieses Standardverfahren funktioniert *nicht*, wenn das Rechenzeichen ein Plus oder Minus ist, also *zwei Zahlen addiert oder subtrahiert* werden. Lautet die Aufgabe also z.B. (-2) + (-3), so darf ich auf *keinen* Fall die beiden Minusse vor den Zahlen zu einem Plus zusammenfassen, sondern nur Rechen- und Vorzeichen vor der 3:

völliger Käse wäre also: (-2) + (-3) =
+ 2+3 =
+ 5

richtig hingegen ist: (-2) + (-3) =
-2 - 3 = - 5

i) Rechnen mit komplizierteren Termen

(-3x) • (-4y) rechnet man folgendermaßen:
+ 3•4 • x•y = + 12xy
1. 2. 3.,

also 1. Zusammenfassen der *Vorzeichen*,
2. Multiplikation der *Koeffizienten* (hier 3 und 4),
3. Multiplikation der verbleibenden *Variablen* (hier x und y).

Dann hat man eine klare Bearbeitungs*reihenfolge* und muß nicht alles *gleichzeitig* bedenken.

j) Das "Geh"Verfahren

Weil beim Rechnen mit positiven und negativen Zahlen im Eifer des Gefechts so viele Vertauschungen und Fehler vorkommen, sei hier noch eine andere Veranschaulichung vorgeführt, die man am besten *immer* im Hinterkopf hat.
Bisher haben wir die Rechenverfahren immer anhand von *Pfeil*modellen erklärt. Oftmals ist es jedoch einfacher, sich Aufgaben als "Gehen" vorzustellen.
So bedeutet z.B. 2 - 3 folgendes: vom Anfangspunkt (Ursprung) gehe ich 2 Meter *vorwärts* und dann 3 Meter *rückwärts*. *Insgesamt* bin ich also 1 Meter *rückwärts* gegangen. Also 2 - 3 = - 1.
- 3 + 4 bedeutet: vom Anfangspunkt gehe ich 3 Meter *rückwärts* und dann 4 Meter *vorwärts*. *Insgesamt* bin ich also 1 Meter *vorwärts* gegangen. Also 3 + 4 = 1.
3 • 4 bzw. (+3) • (+4) bedeutet: ich gehe *3mal* je 4 Meter *vorwärts*, also *insgesamt* 12 Meter *vorwärts*. Also 3 • 4 = 12.
3 • (-4) bzw. (+3) • (-4) bedeutet: ich gehe *3mal* je 4 Meter *rückwärts*, also *insgesamt* 12 Meter *rückwärts*. Also 3 • (4) = -12.

(-3) • (-4) bedeutet: ich gehe *3mal* je 4 Meter *rückwärts*, also *insgesamt* 12 Meter *rückwärts*. Wegen des Minus vor der 3 gehe ich diese Strecke aber *nochmals umgekehrt*, also *doch vorwärts*. Also (-3) • (-4) = + 12

Stellenwertsystem

	100.000	10.000	1.000	100	10	1
3 =						3 • 1 3 • 1 3 • 10^0
30 =					3 • 10 3 • 10 3 • 10^1	+ 0 • 1 + 0 • 1 + 0 • 10^0
34 =					3 • 10 3 • 10 3 • 10^1	+ 4 • 1 + 4 • 1 + 4 • 10^0
300 =				3 • 100 3 • 10 • 10 3 • 10^2	+ 0 • 10 + 0 • 10 + 0 • 10^1	+ 0 • 1 + 0 • 1 + 0 • 10^0
342 =				3 • 100 3 • 10 • 10 3 • 10^2	+ 4 • 10 + 4 • 10 + 4 • 10^1	+ 2 • 1 + 2 • 1 + 2 • 10^0
302 =				3 • 100 3 • 10 • 10 3 • 10^2	+ 0 • 10 + 0 • 10 + 0 • 10^1	+ 2 • 1 + 2 • 1 + 2 • 10^0
4.578 =			4 • 1.000 4 • 10 • 10 • 10 4 • 10^3	+ 5 • 100 + 5 • 10 • 10 + 5 • 10^2	+ 7 • 10 + 7 • 10 + 7 • 10^1	+ 8 • 1 + 8 • 1 + 8 • 10^0
4.078 =			4 • 1.000 4 • 10 • 10 • 10 4 • 10^3	+ 0 • 100 + 0 • 10 • 10 + 0 • 10^2	+ 7 • 10 + 7 • 10 + 7 • 10^1	+ 8 • 1 + 8 • 1 + 8 • 10^0
4.008 =			4 • 1.000 4 • 10 • 10 • 10 4 • 10^3	+ 0 • 100 + 0 • 10 • 10 + 0 • 10^2	+ 0 • 10 + 0 • 10 + 0 • 10^1	+ 8 • 1 + 8 • 1 + 8 • 10^0

4.070 =			4 • 1.000 4 • 10 • 10 • 10 $4 \bullet 10^{3}$	+ 0 • 100 + 0 • 10 • 10 $+ 0 \bullet 10^{2}$	+ 7 • 10 + 7 • 10 $+ 7 \bullet 10^{1}$	+ 0 • 1 + 0 • 1 $+ 0 \bullet 10^{0}$
24.983 =		2 • 10.000 2 • 10 • 10 • 10 • 10 $2 \bullet 10^{4}$	4 • 1.000 4 • 10 • 10 • 10 $4 \bullet 10^{3}$	+ 9 • 100 + 9 • 10 • 10 $+ 9 \bullet 10^{2}$	+ 8 • 10 + 8 • 10 $+ 8 \bullet 10^{1}$	+ 3 • 1 + 3 • 1 $+ 3 \bullet 10^{0}$
24.083 =		2 • 10.000 2 • 10 • 10 • 10 • 10 $2 \bullet 10^{4}$	4 • 1.000 4 • 10 • 10 • 10 $4 \bullet 10^{3}$	+ 0 • 100 + 0 • 10 • 10 $+ 0 \bullet 10^{2}$	+ 8 • 10 + 8 • 10 $+ 8 \bullet 10^{1}$	+ 3 • 1 + 3 • 1 $+ 3 \bullet 10^{0}$
724.983 =	7 • 100.000 7 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 $7 \bullet 10^{5}$	+ 2 • 10.000 + 2 • 10 • 10 • 10 • 10 $+ 2 \bullet 10^{4}$	4 • 1.000 4 • 10 • 10 • 10 $4 \bullet 10^{3}$	+ 9 • 100 + 9 • 10 • 10 $+ 9 \bullet 10^{2}$	+ 8 • 10 + 8 • 10 $+ 8 \bullet 10^{1}$	+ 3 • 1 + 3 • 1 $+ 3 \bullet 10^{0}$
700.003=	7 • 100.000 7 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 $7 \bullet 10^{5}$	+ 0 • 10.000 + 0 • 10 • 10 • 10 • 10 $+ 0 \bullet 10^{4}$	+ 0 • 1.000 + 0 • 10 • 10 • 10 $+ 0 \bullet 10^{3}$	+ 0 • 100 + 0 • 10 • 10 $+ 0 \bullet 10^{2}$	+ 0 • 10 + 0 • 10 $+ 0 \bullet 10^{1}$	+ 3 • 1 + 3 • 1 $+ 3 \bullet 10^{0}$
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 $\bullet 10^{5}$	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{4}$	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{3}$	+ • 100 + • 10 • 10 $+ \bullet 10^{2}$	+ • 10 + • 10 $+ \bullet 10^{1}$	+ • 1 + • 1 $+ \bullet 10^{0}$
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 $\bullet 10^{5}$	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{4}$	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{3}$	+ • 100 + • 10 • 10 $+ \bullet 10^{2}$	+ • 10 + • 10 $+ \bullet 10^{1}$	+ • 1 + • 1 $+ \bullet 10^{0}$
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 $\bullet 10^{5}$	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{4}$	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{3}$	+ • 100 + • 10 • 10 $+ \bullet 10^{2}$	+ • 10 + • 10 $+ \bullet 10^{1}$	+ • 1 + • 1 $+ \bullet 10^{0}$
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 $\bullet 10^{5}$	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{4}$	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{3}$	+ • 100 + • 10 • 10 $+ \bullet 10^{2}$	+ • 10 + • 10 $+ \bullet 10^{1}$	+ • 1 + • 1 $+ \bullet 10^{0}$
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 $\bullet 10^{5}$	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{4}$	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 $+ \bullet 10^{3}$	+ • 100 + • 10 • 10 $+ \bullet 10^{2}$	+ • 10 + • 10 $+ \bullet 10^{1}$	+ • 1 + • 1 $+ \bullet 10^{0}$

	100.000	10.000	1.000	100	10	1
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0
=	• 100.000 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10^5	+ • 10.000 + • 10 • 10 • 10 • 10 + • 10^4	+ • 1.000 + • 10 • 10 • 10 + • 10^3	+ • 100 + • 10 • 10 + • 10^2	+ • 10 + • 10 + • 10^1	+ • 1 + • 1 + • 10^0

Das Zehner- und Stellenwertsystem

Man kann sich fragen, ob man unser gängiges Zahlensystem *überhaupt* problematisieren sollte: es ist uns durch lange Gewohnheit so selbstverständlich, daß wir meist automatisch richtig damit rechnen - und uns gar nicht mehr vorstellen können, daß es auch andere, teilweise *schlechtere*, teilweise *genauso gute* Systeme geben könnte. Und vielleicht gar ein noch unbekanntes *besseres*?
Vergleichbar ist das durchaus mit Maßeinheiten: die Engländer haben bis heute enorme Schwierigkeiten, von ihrer (durchaus ausreichenden) Längenmessung in *Fuß* auf die in *Meter* umzusteigen; umgekehrt fällt es vielen Deutschen schwer, die Leistungsangabe eines Autos neuerdings in Kilowatt statt in PS auszudrücken und zu verstehen.
Ja, es könnte die Gefahr bestehen, *glücklicherweise* Selbstverständliches *über*zuproblematisieren: plötzlich beherrscht man dann *nicht mehr*, erscheint einem alles *unklar*, was man bis dahin *problemlos* verstand und anwandte.
Also wieso ein anderes Zahlensystem lernen, wenn unseres doch völlig ausreicht?

Und doch gibt es vier Gründe, sich unser Zahlensystem mal genauer anzuschauen:

1. gewinnt man damit Respekt für die Genialität dieses Systems - und für die Leistung von Generationen von Vorfahren, die es entwickelt haben. Man kann sich ja kaum vorstellen, welche Genialität hinter unserem heutigen Zahlensystem steckt, wenn man es für *selbstverständlich* hält (und alles Geniale für *selbstverständlich* zu halten, sich über *überhaupt nichts mehr* wundern zu können, halte ich ja doch für einen - verständlichen - Kulturschaden). Ja, gerade *weil* es so genial einfach ist, erkennt man nicht mehr die Genialität. Da hilft es vielleicht, sich (unten) die Entwicklung zu diesem System und all seinen vielen genialen Details hin anzuschauen. Vielleicht denkt man dann: „wenn ich ehrlich bin: da wäre ich niemals alleine drauf gekommen“. Statt aber nur so verschüchtert zu werden, erkennt man vielleicht auch: „oh doch, wo ich mir jetzt erstmals Gedanken drüber gemacht habe, kommen in mir auch (nachträgliche) Entdeckerfreude und -stolz auf; ich fühle mich ein bißchen mit der Geschichte des Denkens und der Mathematik verbunden“.
2. eröffnet sich eine Perspektive auf *unser* Zahlensystem, wenn man sich mal *andere* Zahlensysteme anschaut. Wie so oft: das *Fremde* eröffnet einem überhaupt erst eine (Außen-)Perspektive auf das *Eigene*: daß wir Europäer *weiß* sind, wissen wir vielleicht erst seit der Begegnung mit *Schwarzen* aus Afrika.
   Und es hat ja *tatsächlich* andere Zahlensysteme gegeben: etwa das 60er- oder 12er-System der Babylonier: Reste davon haben wir heute noch in der Zeitmessung oder im Dutzend.
3. ergibt sich aber manchmal die *Notwendigkeit*, auf ein anderes Zahlensystem umzusteigen, z.B. auf das Zweiersystem („Strom oder nicht Strom“), mit dem allein Computer arbeiten können. Ein Computer wandelt jede Zahl im Zehnersystem, die wir eingeben, ins Zweiersystem um, rechnet dann mit Zahlen im Zweiersystem und übersetzt das Ergebnis erst am Ende wieder ins Zehnersystem auf der Anzeige. Wer nun aber einen Computer konstruieren und damit das Zweiersystem benutzen will, der tut gut daran, sich die Regeln des gängigen Zehnersystems anzuschauen (weil er die schon beherrscht) und sie dann (evtl. verändert) auf das Zweiersystem zu übertragen.
4. gibt es ein rein *innermathematisch-theoretisches* Interesse, sich andere Zahlensysteme anzuschauen: Mathematiker haben sich immer gefragt: „was ist unverzichtbar und *nur* so möglich, was hingegen ist *beliebig* und genauso gut *anders* möglich?“ Und so haben sie eben festgestellt: im Prinzip ist es schnuppe, ob man im Zweier-, Fünfer- oder Zehnersystem rechnet, ja, man kann *jede* Zahl (z.B. auch - wie die Babylonier es getan haben - 60) als „Basis“ des Systems nehmen. Allerdings: *irgendein* System braucht man tatsächlich, wenn man *überhaupt* zählen und rechnen will, und da sollte man sich (wie auch bei

mathematischen Definitionen) ein besonders *hilfreiches* wählen. Daß sich das *Zehner*system durchgesetzt hat, ist da wohl eher Zufall (?; s.u.). Aber wir werden sehen, daß es unterschiedlich brauchbare Zahlen*schreibweisen* gibt, daß also z.B. unsere heutige Schreibweise der der Römer haushoch überlegen ist.

Ja, die Mathematiker weisen uns überhaupt erst darauf hin, daß vieles nicht „gottgegeben" und unersetzlich ist, sondern pure Gewohnheit, Zufall und Vereinbarung (womit es ja noch nicht schlecht ist). Das zu merken, ist aber geradezu Vorbereitung auf Ideologiekritik.

Ein Beispiel: viele Menschen (also auch Schüler) halten mangels Denkalternativen unsere *Temperaturmessung* für absolut selbstverständlich, ja, sie staunen fast drüber, daß Wasser „ausgerechnet" bei 0^0 friert und bei 100^0 siedet. Als sei es ein unglaublicher Zufall, daß unsere Temperaturmessung und Wasserzustände übereinstimmen, ja, daß das Wasser sich nach unserer Temperaturmessung richte. Dabei wird doch wohl erst *umgekehrt* ein Schuh draus: irgendwann standen die Menschen mal vor der *Wahl*, einen Temperaturnullpunkt festzulegen, und den haben sie dann halt beim *Gefrierpunkt* von Wasser hingelegt.

Nebenbei: zwar hätte man den Nullpunkt auch *woanders* hinlegen können (z.B. an den Punkt, wo Bienenwachs flüssig wird), aber die Wahl von Wasser war schon besonders intelligent, weil es das *überall* gibt und weil zudem der Bereich flüssigen Wassers auch die „menschlichste", am häufigsten anzutreffende Temperatur umfaßt (man also selten mit *negativen* Graden oder sehr *hohen* Temperaturen rechnen muß).

Die nächste Überlegung war dann wohl: „wie groß soll denn nun ein Grad sein, d.h., in welchem *Maßstab* wollen wir messen?" Die zweite geniale Idee - wo man schon beim Wasser war - war dann wohl, 100 Grad (also im Dezimalsystem!) ans *andere* Ende der Zustände von Wasser zu legen, also dahin, wo Wasser *siedet* (von Flüssigkeit in Gas übergeht). „Und dann" - so wird man wohl gedacht haben - „zerlegen wir das Intervall zwischen Gefrierpunkt (0^0) und Siedepunkt (100^0) einfach in 100 *gleich große* Grade.

Die Einteilung in 100 statt z.B. 10 oder 1000 Grade war wohl auch deshalb sinnvoll, weil damit eine hinreichend genaue Differenzierung möglich war.

Man bedenke aber, daß genauso gut *andere* Temperaturskalen denkbar sind, indem man andere *Nullpunkte* wählt (z.B. im englischen Fahrenheitsystem oder den absoluten Nullpunkt der überhaupt tiefsten möglichen Temperatur bei ca. -273^0 Celsius [wobei Celsius die Maßeinheit für *unser* „Wassersystem" ist]) oder auch andere *Maßstäbe* (z.B. kommt es beim Schmelzpunkt von Eisen ja oftmals nicht auf 10 Grad mehr oder weniger an).

Bleiben wir noch kurz beim Temperaturbeispiel: an ihm wird deutlich, daß vieles schlichtweg *unverstanden* ist und oftmals auch *falsch* erklärt wird. (vgl. „der ungläubige Thomas").

Damit aber zurück zu *Zahlensystemen*: das gezeigte *theoretische* Interesse an *allen möglichen* Zahlensystemen ist typisch für Mathematiker: ich wette, sie hatten schon eine Theorie *aller* Zahlensysteme - incl. der Übersetzbarkeit des einen ins andere - parat (indem sie einfach ein *allgemeines* „b" zur Basis nahmen), bevor sie etwa bei Computern *anwendbar* war.

Es gibt durchaus einige Erkenntnisse über die historische Entdeckung und Entwicklung der Zahlensysteme (vgl. etwa das Grundlagenwerk von Iffrath dazu). Aber einerseits will ich hier nicht so ins Detail gehen, andererseits sind in der Mathematikgeschichte oftmals wohl die *Fakten* und *Ergebnisse* erhalten, leider aber nicht die (oft mühsamen und irreführenden) *Wege*, auf denen Menschen „wie du und ich" zu Erkenntnissen gekommen sind. Zudem verbergen sich die „Ursprünge" oftmals hinter dem Grauschleier uralter Geschichte.

Deshalb soll hier eine *fiktive*, aber doch *wahrscheinlich* Geschichte der Zahlenentdeckung versucht werden. Sie geht von der Frage aus: „wenn wir uns heute mal ganz dumm stellen, als würden wir noch nicht die Ergebnisse kennen: wie würden *wir* denn vorgehen, wo würden wir denn anfangen und von da an fortschreiten?"

Dabei interessieren mich durchaus auch die Irrwege und Sackgassen, wie sie sich ja auch in der realen Geschichte zeigen. Respekt vor Mathematik und überhaupt Denkweisen findet man ja überhaupt erst, wenn man die Mühen *und* Aha-Erlebnisse *nachvollzieht*.

Stellen wir uns also mal besonders dumm und vergessen wir alles, was wir schon über Zahlen wissen.
Das kann uns doch nebenbei so schwer gar nicht fallen: die üblichen mathematischen Kenntnisse von „Otto Normalverbraucher“ gehen doch über den Stoff der 7. Klasse (also Zahlen und Grundrechenarten) eh kaum hinaus. Das meine ich gar nicht abwertend: mehr *braucht* „Otto Normalverbraucher“ ja auch nicht. Und wieso sollte er sein Gehirn und Gedächtnis auch mit Unbrauchbarem belasten?
(Und doch: fällt er durch „mathematischen Analphabetismus“ [so John Allen Paulos] nicht doch allzu leicht auf Zahlenbetrug etwa durch Umfragen oder riesige Zahlen herein? Zudem entgeht ihm noch etwas anderes, nämlich der eigentliche Sinn von Mathematikunterricht über die 7. Klasse hinaus: eine besondere Form logischen und strukturierten Denkens sowie - mir hier am wichtigsten - eine Verbundenheit mit den [mathematischen] Entdeckerwegen der Geschichte.)

Der Ursprung der Zahlen wird wohl im simplen *Zählen* bestanden haben: Kuno Neandertaler will abends wissen, ob er denn all seine Auerochsen wieder im Stall hat - und beginnt also zu *zählen*.

Nun steht ihm - so stelle ich es mir vor - zum Zählen (geschweigedenn Rechnen) noch reichlich wenig zur Verfügung: er hat noch nichtmal Zahl*wörter*. Denkbar wäre nun also, daß er folgendes macht: er zählt die Auerochsen anhand seiner *Finger* ab, macht also sozusagen die erste *Zuordnung* der Weltgeschichte: jedem *Auerochsen* wird ein *Finger* zugeordnet. Man bemerke, daß da schon eine ungeheure Abstraktionsleistung hinter steckt: an den Auerochsen und Fingern interessiert nur noch die Anzahl.

Und dann merkt sich Kuno z.B.: ich habe genauso viele Auerochsen wie Finger an meiner linken Hand (nämlich 5). Über 5 kommt er vielleicht noch gar nicht hinaus: erstens braucht er die *rechte* Hand noch, um von jedem seiner Auerochsen auf einen zugehörigen Finger der *linken* Hand zu weisen, zweitens braucht er vielleicht noch den sinnlichen Eindruck, mit dem Zeigefinger der *rechten* gegen den jeweils gerade aktuellen Finger der *linken* Hand zu tippen (wie wir es ja heute teilweise auch noch tun).
Es sei schon darauf hingewiesen, daß die Benutzung der Hände höchst naheliegend und praktisch war: seine Hände hatte Kuno nämlich (anders etwa als einen Bleistift) *immer bei sich*. Vielleicht ist das tatsächlich der Grund, weshalb sich das Zehnersystem und kein anderes durchgesetzt hat: weil der Mensch nunmal 10 und nicht z.B. 8 Finger (an jeder Hand nur 4) hat.
Kommt hinzu: vermutlich war Kuno schon ein wirklich reicher Bauer, wenn er 5 Auerochsen sei Eigen nennen konnte.
Mag sogar sein, daß Kuno so dumm gar nicht war: 5 Auerochsen konnte er noch *ohne* Zählen überschauen - so wie wir heute es ja auch noch schaffen (darauf wird zurückzukommen sein), bis zu 7 Dinge *ohne* Zählen zu überschauen, also spontan zu sagen: „das sind 7“.
Vielleicht sah sich Kuno aber auch noch vor ein anderes Problem gestellt: die gerade erst zu Haustieren gemachten Auerochsen tauchten nicht alle *gleichzeitig* am Stall auf, sondern *nacheinander*. Und nun konnte Kuno ja nicht eine halbe Stunde lang mit erhobenen Fingern rumlaufen (und gleichzeitig die Auerochsen einfangen), sondern sah sich vor die Notwendigkeit gestellt, Zwischenergebnisse zu *notieren* (etwa so, wie es heute der Fall ist, wenn jemand die nacheinander eintröpfelnden Besucher einer Veranstaltung zählt). Vermutlich

wird Kuno dann doch einfach (in Abstraktion der Fingerform?) *Striche* notiert und immer einen *hinzugefügt* haben, wenn ein weiterer Auerochse eingetrudelt oder eingefangen war.
Bisher ist Kuno also bei 5 Fingern bzw. |||||.
Nun hat das System aber seine Grenzen. Angenommen mal, Kunos Auerochsen vermehren sich wie die Karnickel, und irgendwann wird der elfte, zwölfte, dreizehnte usw. geboren und Kuno somit ein „dicker Bur“.
Spätestens beim 6. Auerochsen wird Kuno wohl auch seine *rechte* Hand zur Hilfe nehmen, spätestens beim 11. reichen nichtmal mehr *beide zusammen*.
Nun kann Kuno sich natürlich merken: „zwei Hände voll (also 10) *habe* ich schon abgezählt“ und dann erneut *von vorne* loszählen (nebenbei: dann muß er schon *addieren* können, nämlich das erste und zweite Handergebnis). Das hat aber spätestens bei sehr großen Auerochsenzahlen (z.B. 65) den Nachteil, daß Kuno im Eifer des Gefechts vergessen haben kann, wie oft er bereits seine beiden Hände vollzählig abgezählt hat (war es 5 oder 6 mal?).
Und vielleicht kommt er dann auf die Idee, seinen Knecht Fred Feuerstein zu bitten, anhand seiner (Freds) Finger zu zählen, *wie oft Erwin all seine Finger hochgezeigt hat*. Fred ist dann also eine Art Zwischenspeicher für Kunos Ergebnisse.
Kuno ist dann also für die *Einer* zuständig, Fred für die *vollständigen Zehner*.
Und dann werden die Auerochsen z.B. folgendermaßen abgezählt (statt der Finger mache ich jetzt schon Striche):

<table>
<tr><th>Anzahl der Auerochsen</th><th>Finger, die Kuno hochhält (Einer)</th><th>Finger, die Fred hochhält (Zehner)</th></tr>
<tr><td>3</td><td>|||</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>|||</td><td>|</td></tr>
<tr><td>20</td><td></td><td>||</td></tr>
<tr><td>87</td><td>||||| ||</td><td>||||| |||</td></tr>
<tr><td>99</td><td>||||| ||||</td><td>||||| ||||</td></tr>
</table>

Und damit hat Kuno das „Stellenwertsystem“ erfunden: er selbst ist für die *Einerstellen*, Fred für die *Zehnerstellen* zuständig.

Bevor wir das aber weiterdenken, sei doch nochmal kurz auf die *Schreibweise* eingegangen:
Neun Striche (also |||||||||) sind schon kaum mehr zu überblicken (wie gesagt: auch wir heute schaffen es in der Regel nur, *sieben* gleichförmige Dinge auf einen Blick zu überschauen; vermutlich, weil wir da noch leichte Ordnungen *reinsehen* können, indem wir *gruppieren*: z.B. in |||| ||| oder symmetrisch ||| | |||).
Spätesten bei *sehr großen* Mengen (z.B. |||||||||||||||||||||||, also 23) wird´s dann *völlig* unübersichtlich: allzu schnell übersieht man einen Strich oder fügt einen zu viel an. Und auf einen Blick kann man sowas wie ||||||||||||||||||||||| schon gar nicht mehr übersehen: man ist gezwungen, immer auf´s Neue nachzuzählen.
Eine Alternative habe ich oben schon durchgeführt: statt ||||||||| nämlich ||||| ||||, also die Zerlegung in übersichtliche *Blöcke*. Eine weitere Alternative - wo Kuno schon im Zehnersystem ist - wäre es, jeden 10. Strich größer zu machen, also z.B. für 23 zu schreiben:
|||||||||**|** |||||||||**|**|||.
Und das geht - nebenbei gesagt - auch in *anderen* Zahlensystemen: als Robinson Crusoe alleine auf seiner Insel ist und einen Kalender aufstellen will, ist ihm die Einhaltung der Sonntage sehr wichtig, um nicht im ewigen Einerlei zu leben, und deshalb rechnet er im *Siebener*-System, wobei jeder Sonntag *größer* markiert ist und er zudem (um einen weiteren Rhythmus zu

notieren) jeden Monat und jedes Jahr abgesetzt notiert. Bei ihm sieht die 23 also folgendermaßen aus: ||||||┃||||||┃||||||┃||.

Eine weitere Alternative wenden wir *heute noch oftmals* an: wenn gezählt werden soll, wie viele Leute nach und nach bei einer Veranstaltung eintrudeln, ist unsere übliche Zahlenschreibweise ausnahmsweise höchst unpraktisch (der Zählende kann erstens nicht einfach im *Kopf* mitzählen, weil er sich da allzu schnell mal verzählt - und dann von vorne anfangen müßte; und zweitens kann er auch nicht 234, 235, 236 ... *aufschreiben*, weil das viel zu lange dauern würde). Sondern üblicherweise greift man dann zur Notationsweise ~~||||~~ , zu der immer nur neue Striche bzw. 5er-Päckchen hinzugefügt werden. Und da benutzt man wohl ausnahmsweise das *Fünfer*-System, weil ein 10er-Päckchen der Form ~~|||||||||~~ schon zu unübersichtlich wäre (sind das 9 oder nicht doch nur 8 senkrechte Striche?), 5 aber immerhin die Hälfte von 10 ist, zwei 5er-Päckchen also *doch* unser geläufiges 10er-System ergeben.

Die Strichschreibweise ist also manchmal von Vorteil, oftmals aber, wie wir unten noch sehen werden, viel zu umständlich (nebenbei: die einfachste Zahl, nämlich 1, erinnert ja noch heute an die ursprüngliche Strichschreibweise - und die Finger?).

Aber vielleicht ist es Kuno ja inzwischen aufgefallen, daß (immerhin bis 99) weder von ihm noch von Fred jemals mehr als 9 Finger benützt werden müssen. Und vielleicht bringt ihn das auf den Gedanken der ersten Zahl*wörter*. Also z.B. „kleiner Finger der linken Hand, Ringfinger der linken Hand, ..., Ringfinger der rechten Hand“. Aber weil das noch immer zu lang ist und Kuno inzwischen ja auch gemerkt hat, daß es schnuppe ist, ob es sich um *Auerochsen* oder *Finger* handelt, kommt er vielleicht zu einfacheren Zahlwörtern, die nichtmal mehr zwischen linker und rechter Hand unterscheiden, nämlich schlichtweg „null, eins, zwei, ..., neun“ sowie „zehn“ für eine vollständige Hand.

Der geniale Trick ist dabei die Erfindung der Null: unsere Geschichte mit den Neandertalern stimmt ja von vorne bis hinten nicht, denn erstens war der Neandertaler zu solchen Abstraktionsleistungen noch gar nicht in der Lage, und zweitens kam das Zählen wohl etwa erst vor ca. 6 000 Jahren auf. Und den Geniestreich der Null hat Europa für seine Zahlenschreibweise ja erst im Mittelalter durch die *arabische* Zahlenschreibweise (die wir heute noch benutzen) erhalten: Adam Riese brachte sie nach Europa, und die Null hatten die Araber schon von den *Indern* übernommen.

Die Null ist nämlich tatsächlich etwas ganz Erstaunliches: eigentlich hat sie ja keinen Wert, spricht von nichts. Und wenn Kuno nur 10 Auerochsen gehabt hätte, also mit seinen eigenen beiden Händen ausgekommen wäre, wäre er vermutlich nie auf die Null gekommen: es wäre ihm viel zu selbstverständlich gewesen, bei *keinem* Auerochsen auch *keine* Hand und *keine* Finger zu erheben. Der Kick kam wohl, als der 11. Auerochse hinzukam und Kuno seinen Knecht Fred hinzurufen mußte. Oder genauer: der Kick kam, als Kuno bemerkte, daß er, sobald Fred mitzählte, nichtmal die 10 brauchte: statt daß Kuno all seine 10 Finger hochhielt, konnte er auch alle wieder runternehmen (keinen, also null Finger nochhalten), und nur Fred mußte einen hochhalten. Vielleicht kam Kuno dieser Gedanke ja genau dann, als er zur 11 überging, also für den Bruchteil einer Sekunde sah: ich habe alle Finger wieder unten, aber Freds einer Finger symbolisiert *weiterhin* die 10. Zusätzlich mußte Kuno aber bemerken: es war enorm *wichtig*, daß er selbst *keinen* Finger hochhielt. Sonst nämlich könnte man meinen, nur Fred zähle, also dessen Zehner für *Einer* halten. Es besteht eben auch heute noch ein Riesenunterschied zwischen

10 und 1

Fred Kuno nur Fred

Nullen *in* Zahlen oder an ihrem *Ende* darf man <u>nicht</u> weglassen, obwohl sie eigentlich für nichts stehen: sie sind einzig und allein dazu da, den Stellenwert *vorheriger* Ziffern klarzumachen.

Und wenn Kuno erstmal die Zahl*wörter* hat, kommt er vielleicht auch auf die Idee, für die Zahlen bis Neun kürzere, praktischere *Zeichen* statt *Anhäufungen von Strichen* einzuführen. Die Zahlzeichen (wie auch die Namen) waren da - wie auch heute noch bei Variablen - *beliebig*, d.h., für die 2 hätte Kuno auch ein Θ einführen können (und beispielsweise die Römer haben ja auch tatsächlich eine ganz andere Zahlenschreibweise eingeführt, auf die noch zurückzukommen sein wird: z.B. ein V für unsere 5). Wichtig war wohl allein, daß die Zahlzeichen *schnell* und *einfach* zu schreiben und gut *unterscheidbar* waren. So also etwa mag Kuno auf die Zahlzeichen 0, 1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 gekommen sein.
Das wirklich Geniale war also die Erkenntnis, daß 10 zwar die „Basis“ des (Zehner-)Systems ist (wir werden noch sehen, wie sie immer wieder auftaucht), daß man aber im Höchstfall nur *neun* Finger braucht. Folge ist der merkwürdige, ja, fast paradoxe Umstand, daß es für 10 zwar ein eigenes Zahl*wort*, aber kein eigenes Zahl*zeichen* gibt, sondern dafür eine 1 und eine 0 kombiniert werden.
Man mache sich nochmal klar: da hätte nicht das *Neuner*system gereicht: hätte der Mensch nur 9 Finger (z.B. links 5, rechts 4), so wäre er nur aufs *Neuner*system gekommen, und die höchste benötigte Ziffer wäre die 8 gewesen.
Auch für viele höhere Zehnerpotenzen (100, 1 000, 1 000 000 ...) haben wir - wie für 10 - zwar glücklicherweise keine neuen Zahl*zeichen*, aber doch Zahl*wörter* (genau genommen: für z.B. 10 000 haben wir wieder *kein* neues Wort, sondern die Kombination „zehn-tausend“). Wie wir noch sehen werden, könnte man auch diese höheren Zahlwörter vermeiden, indem man statt „hundert“ „10 hoch zwei“ sagen würde, aber das wäre aus zwei Gründen unpraktisch: erstens hieße dann 120 höchst umständlich „zehn hoch zwei und zwanzig“ (verwechselbar zudem mit „... zweiundzwanzig“ = 22), zweitens würde das bei sehr großen Zahlen zu enormem sprachlichem Chaos führen:

$$100\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{17} = 10^{1\bullet 10^{1} + 7}$$

sprich: „zehn hoch (ein mal 10 hoch 1 und 7)“, wobei die Klammern mitzusprechen wären. Da ist mir doch „hundert Biliarden“ lieber.

Wir heute halten aufgrund alter Gewohnheit das 10er-System wenn schon nicht für das *einzig mögliche*, so doch für das „objektiv“ *einfachste*. Schauen wir uns also mal kurz in einem Exkurs an, was passiert wäre, wenn die Neandertaler und auch wir heute nur *vier* Finger an jeder Hand und somit insgesamt *acht* Finger gehabt hätten (und nie auf die Idee gekommen wären, mit 10 zu rechnen): im selben Augenblick, in dem Kuno vom 8. zum 9. Auerochsen übergehen mußte, brauchte er wieder Fred, und dessen erster hochgehaltener Finger symbolisierte dann nicht mehr 10 (alle Finger Kunos), sondern 8. Auch damit läßt sich wunderbar zählen:

Anzahl der Auerochsen	Finger, die Kuno hochhält (Einer)	Finger, die Fred hochhält (Achter)
3 (= 3 + 0 • 8)	|||	

<table>
<tr><td>9 (= 1 + 1 • 8)</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>22 (= 6 + 2 • 8)</td><td>||||| |</td><td>||</td></tr>
<tr><td>73 (= 1 + 9 • 8)</td><td>|</td><td>||||| ||||</td></tr>
</table>

Das sei hier nicht weitergeführt und zu Ende gedacht. Wichtig ist allein: das Zählen (und auch Rechnen) funktioniert *genauso gut* im *Achter*-System, und Kuno hätte da auch nur Zahlwörter und -zeichen für 0 bis 7 gebraucht. Welches System man wählt, ist letztlich beliebig - und auf die Dauer nur Gewohnheitssache.
Entsprechend ist *jedes* Zahlensystem mit *beliebiger* Höchstgrenze (Basis) möglich, z.B. auch das 12er-System (wie wir es noch vom Dutzend oder Stunden kennen), das 60er-System der Babylonier (vgl. als Reste unsere Minuten und Sekunden), das 2er-System von Computern (die nur mit *Strom* oder eben *nicht* Strom arbeiten können) oder von mir aus auch das 429er-System. Das kleinstmögliche System ist dabei das Zweier-System der Computer (im Einer-System kann man nicht mehr unterscheiden, denn die kleinste und einzige Ziffer wäre 0 bzw. das Hochzeigen *keines* Fingers). Und beispielsweise das 429er-System oder auch das 60er-System ist doch wohl auf die Dauer zu *unpraktisch*, weil man allzu *viele* Zahlzeichen und -namen braucht
(nämlich 428 bzw. 59, also etwa 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ⊗, ⊕, ♣, ♦ ...).
≈10 ≈11 ≈12 ≈13
Es gibt aber auch Nachteile allzu *kleiner* Systeme. Z.B. schreibt sich unsere 23 (im Zehnersystem) im Zweiersystem der Computer 10111. Das hat zwar den *Vorteil*, daß man nur noch die Ziffern 0 (kein Strom) und 1 (Strom) braucht, der *Nachteil* ist aber im alltäglichen Leben, daß die Schreibweise viel zu *lang* ist. Ein Gehalt von 4000 DM im Monat würde im Zweiersystem z.B. 111110100000 sein (naja, immerhin wäre man damit mehrfacher Milliardär - und hätte doch nur *denselben* Geldwert).

Aber zurück zum Zehnersystem: als Kuno zum ersten Mal *mehr* als 10 Auerochsen zu zählen hatte, also mit seinen eigenen Fingern nicht mehr zurecht kam und Fred um Hilfe bitten mußte, werden beide anfangs vermutlich anders als oben dargestellt gezählt haben: vermutlich hat Fred nicht nur die *Zehner*, sondern einfach *weiter* gezählt, also wie Kuno *Einer*. Womit sich folgendes Bild ergab:

<table>
<tr><th>Anzahl der Auerochsen</th><th>Finger, die Kuno hochhält (Einer)</th><th>Finger, die Fred hochhält (Einer)</th></tr>
<tr><td>3</td><td>|||</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>||||| |||||</td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>||||| |||||</td><td>|</td></tr>
<tr><td>19</td><td>||||| |||||</td><td>||||| ||||</td></tr>
<tr><td>20</td><td>||||| |||||</td><td>||||| |||||</td></tr>
</table>

Bei diesem „Einer“-System hätten Kuno und Erwin zusammen höchstens 20 Auerochsen zählen können (beide zeigen alle Finger hoch). Spätestens ab 21 wäre ein dritter, ab 31 ein vierter usw. Mann nötig gewesen. Das aber wäre auf die Dauer höchst unpraktisch geworden: um 100 Auerochsen bloß zu zählen (geschweigedenn einzufangen), hätte man schon 10 Mann gebraucht. Und irgendwann wäre ein Extramann nötig geworden, um wiederum die zählenden Männer zu zählen.
Vielleicht ergab sich aber noch ein ganz anderes Problem: unser genialer Kuno war überhaupt der einzige, der wirklich *zählen* konnte, also für die Einer zuständig. Fred aber war so splitterfaserdumm, daß er nicht *selbstständig weiterzählen* konnte (11, 12, 13 ...), sondern nur

zum „Zwischenspeicher“ taugte: immer, wenn Kuno 10 weitere Auerochsen gezählt hatte, sagte er zu Fred: „und jetzt hebe bitte einen weiteren Finger hochhalten“. Das schaffte Fred grade noch - und notfalls stundenlang.
Wie gezeigt, ist solches Zählen, bei dem Fred nur für die *Zehner* zuständig ist, erheblich praktischer: damit können nur *zwei* Mann, nämlich Kuno und Fred, immerhin 99 bzw. 100 (notfalls sogar 110; Kuno zeigt 10 Einer und Fred 10 Zehner an) Auerochsen zählen.
Wie praktisch das System aber ist, ja, welche Konsequenzen es hat und wie es sich beliebig fortsetzen läßt, haben Kuno und Fred vielleicht erst bemerkt, als der 101ste (bzw. 111te) Auerochse auftauchte: sie haben ihr bereits angewandtes System (Kuno ist für Einer, Fred für Zehner zuständig) einfach *weiter* gedacht und den Hilfsknecht Erwin für die Hunderter zuständig gemacht (Erwin war dermaßen strohdumm, hatte eine dermaßen lange Leitung, daß er höchstens immer nach jeweils 100 einen Finger hochstemmen konnte). Und damit ergibt sich dann:

<table>
<tr><th>Anzahl der Auerochsen</th><th>Finger, die Kuno hochhält (Einer)</th><th>Finger, die Fred hochhält (Zehner)</th><th>Finger, die Erwin hochhält (Hunderter)</th></tr>
<tr><td>3</td><td>|||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>42</td><td>||</td><td>||||</td><td></td></tr>
<tr><td>60</td><td></td><td>||||| |</td><td></td></tr>
<tr><td>99</td><td>||||| ||||</td><td>||||| ||||</td><td></td></tr>
<tr><td>100</td><td></td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>230</td><td></td><td>|||</td><td>||</td></tr>
<tr><td>203</td><td>|||</td><td></td><td>||</td></tr>
<tr><td>999</td><td>||||| ||||</td><td>||||| ||||</td><td>||||| ||||</td></tr>
</table>

Die größte damit darstellbare Zahl ist 999 bzw. 1000 bzw. 1110 (alle drei halten all ihre Finger hoch). Aber ab jetzt ist das System ja wohl klar: ein nächster Mann ist für die 10 000er, der übernächste für die 100 000er zuständig usw.
Und spästens da wird deutlich, wie praktisch dieses Verfahren ist: mit nur 6 Männer kann man bis zu einer Millionen zählen (also bis zu einer Zahl, die Kuno Neandertaler nie gebraucht hätte).

Einer → Kuno
Zehner → Fred
Hunderter → Erwin
Tausender → Hugo
Zehntausender → Arno
Hunderttausender → Kunibert

Und man mache sich klar:

mit diesem System ist tatsächlich (und zwar in äußerster Kurzschreibweise) *jede* Anzahl zu erfassen.

Welcher Fortschritt da vorliegt, wird einem spätestens klar, wenn man die Schreibweise 1.000.000 mit dem *Aufschreiben* von einer Millionen Strichen vergleicht (oder gar dem Hochzeigen von einer Millionen Finger durch Hunderttausend Leute): die Schreibweise 1.000.000 symbolisiert zweifelsfrei exakt eine Millionen, eine millionen *Striche* wären aber nicht nur völlig *unübersichtlich*, sondern auch nur *ein* Strich zu viel oder zu wenig würde *alles* falsch machen. Man bedenke nämlich, daß eine Millionen Striche, hier auf dem Papier gedruckt, über 5000 Zeilen der Form

||

bzw. über 100 Seiten ergäben.

Nun kommt es in der *Strich*schreibweise nun auch wieder nicht so genau, ob es 999 999 oder 1 000 001 Striche sind, der Fehler ist also vernachlässigbar gering. Da nun aber liegt der Nachteil der Kurzschreibweise im *Stellenwert*system: eine *einzige* fehlende Ziffer verändert den Wert *massiv* (etwa auf 1/10)

Aber nochmals zur Schreib- und Sprechweise: bisher hatten wir beispielsweise für die Zahl 24 die Zählweise: Kuno |||| bzw. 4, Fred || bzw. 2. Da wäre es naheliegend, es in genau dieser *Reihenfolge* von links nach rechts zu notieren, also als 42. Und merkwürdigerweise *sprechen* wir es ja auch heute noch so: „4 und 20“ bzw. „vierundzwanzig“. Die Engländer hingegen sind da schon konsequenter: sie sprechen 24 auch als „twenty(=20)four(4)“.

Unsere deutsche Sprechweise ist in der Tat irreführend: vielleicht höre ich erst „vier-„ und schreibe diese Zahl auch schon hin (4). Dann erst höre ich „-undzwanzig“ und muß dann die 2 *vor* die bereits stehende 4 schreiben (24).

Vielleicht ist unsere Sprechweise eine Erinnerung daran, daß „vierundzwanzig“ anfangs *wirklich* von links nach rechts, also 42 *geschrieben* wurde. Das hätte auch genauso gut funktioniert. Die Zahlenschreibweise 258 hätte dann bedeutet: „zwei und fünfzig und achthundert“.

Nur hätte man dann konsequent *immer* von links/klein nach rechts/groß sprechen sollen. Das aber hat man nicht getan, auch nicht im Deutschen: spätestens bei den *Hundertern* gehen wir ja *auch* von links/groß nach rechts/klein über. Z.B. sprechen wir 420 als „vierhundert(und)zwanzig“.

Und dann gibt es noch Mischformen: 421 sprechen wir als

„vierhundert	ein	und	zwanzig“.
Hunderter	Einer		Zehner

Wie gesagt: man hätte die kleinen Zahlen auch ganz links und die großen immer weiter rechts schreiben können. Warum hat man es dann *doch nicht* getan? Vermutlich, weil doch die *großen* Zahlen die *wichtigsten* sind und damit bei unserer Leseweise von links nach rechts auch als *erste* wahrgenommen werden sollen. Angenommen nämlich mal, ich verdiene 3001 DM im Monat. Dann interessiert mich doch vor allem der dicke Batzen, die *Tausender*, und nicht die popelige *eine* Mark am Ende.

Und völlig irreführend wird eine Schreibweise von klein nach groß, wenn man Vor-Kommazahlen einführt.

Auf *eine* Besonderheit der Sprechweise sei allerdings noch eingegangen. Sinnvollerweise würde man doch zählen 11 = ein(sund)zehn, 12 = zwei(und)zehn, 13 = drei(und)zehn, 14 = vier(und)zehn... Erstaunlicherweise haben wir aber für die 11 und die 12 zwar keine Sonder*zeichen* (mehr), aber noch Sonder*worte*, nämlich „elf“ (im Englischen „eleven“) und „zwölf“ (im Englischen „twelve“; ab dann aber sind auch die Engländer wieder konsequent: „thirteen“ = „drei[und]zehn“). Das mögen Verschleifungen sein (elf wie eins, zwölf wie zwei), ist aber vielleicht auch ein Rest des 12er- bzw. Dutzendersystems.

Ähnlich zeigen sich in anderen Sprachen noch Reste *anderer* Zahlensysteme. Z.B. sagen die Franzosen nicht „achtzig ≈ acht mal *zehn*“, sondern „quatrevingt ≈ acht mal *zwanzig*“, was vermutlich der Rest eine *Zwanziger*systems ist.

Was Kuno Neandertaler noch intuitiv gemacht hat, läßt sich dann auch systematisieren:

5 7 2 9 =

$= 5 \bullet 1000 \quad + 7 \bullet 100 \quad + 2 \bullet 10 \quad + 9 \quad =$

$= 5 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \quad + 7 \bullet 10 \bullet 10 \quad + 2 \bullet 10 \quad + 9 \bullet 1 \quad =$

$= 5 \bullet 10^3 \quad + 7 \bullet 10^2 \quad + 2 \bullet 10^1 \quad + 9 \bullet 10^0$

In der letzten Zeile wird nun überdeutlich: wir brauchen zur Darstellung sämtlicher Zahlen nur die Ziffern 0 bis 9 sowie Zehnerpotenzen (vgl. Zehnersystem).
Weiterhin wird deutlich:

5729 ist nur eine enorm einfache Kurzschreibweise für eine *Summe von Zehnerpotenzen*.

Und aufs *Zehner*system sowie *Summen* sind die alten Römer auch schon gekommen. Nur haben sie im Prinzip (in heutiger Zahlenschreibweise) addiert 5729 = 5 + 7 + 2 + 9 (= 23).
Ihr großes Handicap war, daß sie zwar das Zehner*system* hatten und auch in Zehner*potenzen* gedacht haben (Sonderzeichen X für 10, C für 100, M für 1000), daß sie das aber nicht in ihre *Schreibweise* umgesetzt haben. Ihr „Fehler“ bzw. wohl eher ihre Sackgasse war, daß sie zwar z.B. 100 als Zehnerpotenz *erkannt*, aber nicht so *geschrieben* haben: an C für 100 erkennt man nicht mehr die Abstammung von X für 10.
Ein weiterer Nachteil ihres Systems war, daß je nach Schreibweise mal *addiert*, mal *subtrahiert* werden mußte: steht eine kleinere *vor* einer größeren Zahl, so ist die kleinere von der größeren zu *subtrahieren*: I V = 5 *minus* 1 = 4
eins fünf
Steht hingegen eine kleinere *nach* einer größeren Zahl, so ist die kleinere zur größeren zu *addieren*: V I = 5 *plus* 1 = 6
Und nichtmal das war konsequent durchführbar: in C I V
hundert eins fünf

ist 1 *nicht* zum größeren hundert zu addieren, sondern erstmal vom größeren 5 zu *subtrahieren*, und das *Zwischenergebnis* 4 ist zum größeren 100 zu addieren (Endergebnis 104).
Und solches Kuddelmuddel hat fatale Folgen beim Rechnen. Denn angenommen mal, wir wollen 4 und 6, also IV und VI, addieren. Untereinander geschrieben ergäbe das

I	V	= 4
V	I	= 6
IV	VI	

Wobei zu bedenken wäre: steht eine kleinere Zahl *über* einer größeren (linke Spalte), so ist sie zu *subtrahieren*, steht die kleinere *unter* der größeren (rechte Spalte), so ist sie zu *addieren*.
Die Ergebniszeile „IV VI“ ist zudem wenig hilfreich: da steht ja *wieder* unser Anfangsvorhaben, nämlich IV und VI zu addieren. Wir sind also keinen Schritt weiter gekommen.
Noch fataler wird´s bei der Addition von III (3) und V (5). Die können wir nichtmal sinnvoll *untereinander* schreiben:

I I I
  V

Der Nachteil ist hier tatsächlich, daß die Römer für die Zahlen 1 bis 9 keine *Einzel*zeichen hatten, sondern z.B. die 8 als VIII schrieben. Damit kann man Zahlen nicht *untereinander* schreiben.
Und ein weiterer - und vermutlich der zentrale - Nachteil der römischen Zahlenschreibweise: sie hatten keine *Null*. Ihnen blieb also gar nichts anderes übrig, als z.B. für 10 ein *neues* Zeichen (X) einzuführen und für 100 wiederum ein Neues (C)... Sie haben nicht bemerkt, daß

- wie schon gezeigt - ausgerechnet im Zehner*system* paradoxerweise kein Zehner*zeichen* nötig ist.
(Bemerkenswert ist wohl auch noch, daß die Römer vielleicht Reste eines *Fünfer*systems hatten, nämlich ein V für 5, ein L für 50 und ein D für 500; obwohl 50 ja das *zehn*fache von 5 und 500 das *zehn*fache von 50 ist. Vielleicht hatte das aber auch nur denselben Grund wie oben bei den Strichen: 𝍸 𝍸 ist *übersichtlicher* als ||||||||||. Und wir haben ja teilweise heute *auch noch* solche *Zwischen*einheiten, z.B. bei 5-, 50-Pfennig- und 5-Mark-Stücken sowie bei 50- und neuerdings auch bei 500-Mark-Scheinen.: es ist halt *praktischer*, 60 DM mit *einem* Zehn- und *einem* Fünfzigmarkschein [also *zwei* Scheinen] zu bezahlen als mit *sechs* Zehnmarkscheinen.)

Folge der so fatal ungünstigen Schreibweise der Römer war wohl, daß sie nie richtig *rechnen* konnten. Und vielleicht ist ihre gesamte Kultur damit *technisch* stehen geblieben, wo Technik nunmal zentral auf *Mathematik* beruht (für das Stehenbleiben mag es allerdings auch andere, philosophische und Welterfahrungsgründe gegeben haben).

Die drei wichtigsten Rechenregeln

	gültige Gesetze	Fehlermöglichkeiten
Kommutativgesetz *Zahlenvertauschungs*gesetz (zwei Zahlen, ein Rechenzeichen, keine Klammer)	$\boxed{a + b = b + a}$ $\boxed{a \bullet b = b \bullet a}$	$a - b \neq b - a$ $a : b \neq b : a$
Assoziativgesetz *Klammerverschiebungs*gesetz (drei Zahlen, eine Rechenart, Klammern)	$\boxed{a + (b + c) = (a + b) + c}$ $\boxed{a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c}$	$a - (b - c) \neq (a - b) - c$ $a : (b : c) \neq (a : b) : c$ Merke: das *Kommutativ*- und das *Assoziativ*gesetz gelten beide nur für die *Addition* und die *Multiplikation*
Distributivgesetz Zahl*verteilungs*gesetz (drei Zahlen, zwei Rechenzeichen [eine Punkt-, eine Strichrechnung], Klammer)	a verteilen (Klammer wird beseitigt) $\longrightarrow$ a *aus*klammern (Klammer entsteht) $\longleftarrow$ $\boxed{a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c}$ $a \bullet (b - c) = a \bullet b - a \bullet c$ $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$ $(b - c) \bullet a = b \bullet a - c \bullet a$ $(b + c) : a = b : a - c : a$ $(b - c) : a = b : a - c : a$ Merke: Strichrechnung immer *in* der *Klammer* bzw. in der *Mitte*, Punktrechnung immer *vor* der Klammer bzw. *außen*	$a \bullet (b + c) \neq a \bullet b + c$ $a \bullet (b - c) \neq a \bullet b - c$ $(b + c) \bullet a \neq b + c \bullet a$ $(b - c) \bullet a \neq b - c \bullet a$ $(b + c) : a \neq b - c : a$ $(b - c) : a \neq b - c : a$ Fehler: a wurde *nur* b oder *nur* c zugeteilt $a : (b + c) \neq a : b - a : c$ $a : (b - c) \neq a : b - a : c$ Merke: das Distributivgesetz gilt für die *Division* nur von *hinten*

Rechenzeichen und Klammern

A) *Ein* Rechenzeichen; das Kommutativgesetz

Angenommen, ein Handwerker nimmt an einem Tag erst 5000 und dann nochmal 3000 DM ein. Abends will er nun aufrechnen, wieviel er *insgesamt* eingenommen hat. Offensichtlich ist es dann dasselbe, ob er die 5000 zu den 3000 DM addiert oder *umgekehrt* die 3000 zu den 5000. Die Summe ist so oder so 8000 DM. Verallgemeinert gilt also:

Die Addition ist *kommutativ* (lat. kommuntari = vertauschen), d.h., es ist egal, in welcher *Reihenfolge* ich addiere. Ich kann die Summanden *vertauschen*:

$$a + b = b + a$$

Zu Deutsch: für die Addition gilt das Vertauschungsgesetz.

Weil nun die Subtraktion die Gegenrechnung zur Addition ist, könnte man vermuten, daß auch sie kommutativ ist. Überlegen wir also an einem Beispiel, ob das stimmt: es ist doch wohl ein gewaltiger Unterschied, ob das Thermometer von + 30^0 um 5^0 auf + 25^0 fällt (30 - 5 = 25) oder ob es von $+5^0$ um 30^0 auf -25^0 (5 - 30 = -25) fällt. Aus diesem einen Gegenbeispiel können wir schon folgern:

Die Subtraktion ist *nicht kommutativ*, d.h., es ist *nicht* egal, in welcher Reihenfolge ich addiere. Ich kann die Terme *nicht* vertauschen:

a - b *ungleich* b - a

Für die Subtraktion gilt *nicht* das Vertauschungsgesetz.

Allerdings kann ich durchaus vertauschen, wenn ich beim Vertauschen das Rechenzeichen *mitnehme*:

$$a - b = -b + a$$
$$300 - 50 = -50 + 300$$

(es bleibt sich im Endergebnis gleich, ob das Thermometer von 30^0 um 5^0 auf $+25^0$ *fällt* oder von 5^0 um 30^0 auf $+25^0$ *steigt*)

Beweis: $a - b = a + (-b) \underset{\text{da Addition kommutativ}}{=} (-b) + a = -b + a$

Egon und Emil haben je 6 Kartoffelsäcke gekauft. Keiner von beiden schafft es, alle 6 auf einmal nach Hause zu tragen. Egon ist stärker und kann deshalb *drei* Säcke auf einmal tragen. Dazu muß er *zweimal* laufen. Insgesamt schleppt er also

beim ersten Mal: SSS
beim zweiten Mal: . SSS
insgesamt : SSS SSS

Emil schafft nur jeweils *zwei* Säcke. Dazu muß er allerdings *dreimal* laufen. Insgesamt schleppt er also:

beim ersten Mal : SS
beim zweiten Mal: SS
beim dritten Mal: . SS
insgesamt : SS SS SS

Man sieht also: es bleibt sich gleich, ob man *zweimal drei* Säcke (2•3) schleppt oder *dreimal zwei* Säcke (3•2). Allgemein folgern wir:

> Die Multiplikation ist *kommutativ* (lat. kommuntari = vertauschen), d.h., es ist egal, in welcher *Reihenfolge* ich multipliziere. Ich kann die Faktoren *vertauschen*:
> $a \cdot b = b \cdot a$
> Für die Multiplikation gilt das Vertauschungsgesetz.

Weil die Division die Gegenrechnung zur Multiplikation ist, könnte man wieder vermuten, daß auch sie kommutativ ist. Aber auch da läßt sich wieder leicht ein Gegenbeispiel finden, nämlich 2:1 und 1 : 2. Wenn ich *zwei* Kuchen an *eine* Person verteile, erhält diese Person *zwei* Kuchen (2:1 = 1), wenn ich hingegen *einen* Kuchen an *zwei* Personen verteile, so bekommt jede nur noch einen *halben* Kuchen (1:2 = $^1/_2$). Also können wir allgemein folgern:

> Die Division ist *nicht* kommutativ, d.h., es ist *nicht* egal, in welcher Reihenfolge ich dividiere. Ich kann die Terme *nicht* vertauschen:
> a : b ungleich b : a
> Für die Division gilt *nicht* das Vertauschungsgesetz.

Insgesamt kann man sich also merken:

> Die einfachen Rechnungen Addition und Multiplikation sind kommutativ, die Gegenrechnungen Subtraktion und Division sind es *nicht*.

B) mehrere Reichenzeichen

Im Kommutativgesetz kommt jeweils nur *ein* Rechenzeichen *einmal* vor (also *ein* Plus oder *ein* Malzeichen). Nun wollen wir uns darum kümmern, was passiert, wenn *ein* Rechenzeichen *mehrfach* vorkommt oder gleichzeitige *mehrere, verschiedene* Rechenzeichen auftauchen. In solch einem Fall muß man sich einigen, in welcher *Reihenfolge* die Rechnung durchgeführt werden soll:

a) *dasselbe* Rechenzeichen kommt *mehrfach* vor

Ein Handwerker hat an einem Tag nacheinander 5000 DM, 3000 DM und 4000 DM eingenommen. Abends will er diese drei Zahlen aufaddieren. Erstaunt stellt er fest, daß das gar nicht auf *einmal* möglich ist, sondern nur so, daß er erst *zwei* Zahlen addiert und zum *Zischenergebnis* nochmals die *dritte*. Ein wenig verunsichert fragt er sich, *welche* der drei er denn zuerst addieren soll (und dann nochmals die dritte). Zu seiner Erleichterung stellt er fest, daß die Reihenfolge *egal* ist:

1. 5000 + 3000 = 8000
   8000 + 4000 = 12 000
2. 5000 + 4000 = 9000
   9000 + 3000 = 12 000
3. 3000 + 4000 = 7000
   7000 + 5000 = 12 000

Wir haben also festgestellt: 5000 + 3000 + 4000 läßt sich gar nicht in *einem* "Abwasch" rechnen, sondern wir müssen klarmachen, in welcher *Reihenfolge* gerechnet werden soll.

Dazu führen wir *Klammern* ein, und können schon als erste Eigenschaft der Klammer festhalten:

Bei *gleichen* Rechenzeichen faßt die Klammer zusammen, was als *erstes* gerechnet werden soll. 5 + (3 + 4) bedeutet also, daß - erst 3 + 4 = 7 zu rechnen und
- dann zum Ergebnis 7 die 5 zu addieren ist.

Mit den Klammern können wir nun die Handwerkeraufgabe von oben so zusammenfassen:
(5000+3000)+4000 = (5000+4000)+3000 =(3000+4000)+5000
Daraus folgt insbesondere:
(5000+3000)+4000 = =(3000+4000)+5000
Und das wiederum ergibt:
Komm.Gesetz
(5000+3000)+4000 = =5000+(3000+4000)
Oder allgemein:

Die Addition ist *assoziativ* (lat. assoziieren = zusammenfassen), d.h., es ist egal, *welche zwei* der drei Zahlen ich *zuerst* addiere, um dann die *dritte* Zahl zum *Zwischenergebnis* zu addieren:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Weil es also egal ist, wie ich die Klammern setze, kann man auch sagen: für die Addition gilt das "*Klammer*vertauschungsgesetz".

Vorteil des Assoziativgesetzes ist es insbesondere, daß damit Rechnungen vereinfacht werden können. Ein Beispiel: $(7 + 4) + 6 = 7 + (4 + 6)$

$\Leftrightarrow \quad 11 \quad + 6 = 7 + \quad 10$

$\Leftrightarrow \quad 17 \quad = \quad 17$

An diesem noch einfachen Beispiel wird klar: die rechte Seite (4 + 6) ist viel einfacher zu rechnen, da 4 + 6 = 10.

Vorsicht:

Die Subtraktion ist *nicht* assoziativ, d.h., es ist *nicht* egal, welche zwei der drei Zahlen ich zuerst subtrahiere, um dann vom Zwischenergebnis die dritte Zahl zu subtrahieren:

$(a - b) - c$ ungleich $a - (b - c)$

Für die Subtraktion gilt *nicht* das "Klammervertauschungsgesetz".

Beispiel: $(4 - 3) - 2 = 1 - 2 = -1$

$4 - (3 - 2) = 4 - 1 = 3$

Die Ergebnisse sind offensichtlich *ungleich*.

Zu berechnen ist das Volumen eines Quaders mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 m. Nun wissen wir zwar, daß man das Volumen berechnet, indem man *alle* 3 Seiten miteinander multipliziert. Aber es ergibt sich wieder das Problem, daß man nicht alle 3 Zahlen *auf einmal* miteinander multiplizeren kann, sondern erstmal nur *zwei* und dann die *dritte* mit dem *Zwischenergebnis*. Damit stellt sich wiederum die Frage, mit *welchen* zwei Zahlen ich *anfangen* soll. Wir stellen aber fest: (3•4)•5 = 60 = 3•(4•5). Auch hier ist es also wieder egal, mit *welchen* Zahlen ich beginne. Wir können also wieder verallgemeinern:

Die Multiplikation ist *assoziativ*, d.h., es ist egal, *welche zwei* der drei Zahlen ich *zuerst* miteinander multipliziere, um dann die *dritte* Zahl mit dem *Zwischenergebnis* zu multiplizieren:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Für die Multiplikation gilt das "*Klammer*vertauschungsgesetz".

Wieder gilt: das Assoziativgesetz macht Rechnungen oftmals einfacher und übersichtlicher. Ein Beispiel:

$$(7 \bullet 5) \bullet 2 = 7 \bullet (5 \bullet 2)$$
$$\Leftrightarrow \quad 35 \bullet 2 = 7 \bullet 10$$
$$\Leftrightarrow \quad 70 = 70$$

Wieder wird am noch ziemlich einfachen Beispiel klar: die rechte Seite (5 •2) ist viel einfacher zu rechnen.

Vorsicht:

Die Division ist *nicht* assoziativ, d.h., es ist *nicht* egal, welche zwei der drei Zahlen ich zuerst durcheinander dividiere, um dann nochmal das Zwischenergebnis durch die dritte Zahl bzw. die dritte Zahl durch das Zwischenergebnis zu dividieren:

(a : b) : c *ungleich* a : (b : c)

Für die Division gilt *nicht* das "Klammervertauschungsgesetz".

Beispiel: (64 : 16) : 2 = 4 : 2 = 2
64 : (16 : 2) = 64 : 8 = 8
Die Ergebnisse sind offensichtlich *ungleich*.

Genau wie beim Kommutativgesetz gilt:

Die einfachen Rechnungen Addition und Multiplikation sind assozitativ, die Gegenrechnungen Subtraktion und Division sind es *nicht*.

b) *verschiedene* Rechenzeichen kommen vor

Während also bisher im Kommutativgesetz nur *ein* Rechenzeichen und im Assoziativgesetz das *gleiche* Rechenzeichen *zweimal* vorkam, beschäftigen wir uns nun damit, was passiert, wenn zwei *verschiedene* Rechenzeichen auftauchen.

Ein Beispiel: in 3 • 5 + 4 kommt offensichtlich *sowohl* ein Mal- *als auch* ein Pluszeichen vor. Wieder lassen sich nicht *beide* Rechnungen, also Multiplikation und Addition, *gleichzeitig* durchführen. Also stellt sich auch wieder die Frage, was da nun als *erstes* gerechnet werden soll:

a) soll erst 3 • 5 = 15 gerechnet und zum Ergebnis 15 die 4 addiert werden (also 15 + 4 = 19),
b) oder soll erst 5 + 4 = 9 gerechnet und das Ergebnis mit 3 multipliziert werden (also 3 • 9 = 27)?

An den Ergebnissen 19 und 27 sieht man schon, daß es *nicht* egal ist, in *welcher Reihenfolge* da gerechnet wird. Also müssen wir uns überlegen, wie man *unmißverständlich* deutlich machen kann, in *welcher* Reihenfolge gerechnet werden soll. Dazu könnte man natürlich wieder *Klammern* verwenden.

a) würde dann lauten: (3 • 5) + 4

b) würde lauten: $3 \cdot (5 + 4)$
Da die Mathematiker nun aber stinkend faul sind, wollen sie sich in einem der beiden Fälle die Klammern sparen und legen daher fest:

Punktrechnung geht vor Strichrechnung (also • und : vor + und - ; dabei sind • und : untereinander ebenso gleichberechtigt wie + und -)

Wenn also bloß $3 \cdot 5 + 4$ da steht, so muß jetzt *erst die* Punktrechnung durchgeführt werden (also $3 \cdot 5 = 15$), und erst *dann* erfolgt die Strichrechnung (also $15 + 4 = 19$).
Nur im Fall b) benützen wir noch die Klammern, um zu zeigen, daß
Nun aber geht es uns um den anderen Fall, daß *trotzdem* zuerst $5 + 4 = 9$ gerechnet werden soll, um erst *dann*
mit 3 zu multiplizieren.
Als zweite Funktion der Klammer lernen wir also:

Eine Klammer wird benutzt, wenn eine Strichrechnung *ausnahmsweise* doch *vor* der Punktrechnung durchgeführt werden soll.

Wenn wir nun die 5 durch ein A und die 4 durch ein B ersetzen, so lauten die Terme
a) $3 \cdot A + B$ bzw.
b) $3 \cdot (A + B)$
Wenn nun A für Apfelsine und B für Birne steht, so läßt sich auch die unterschiedliche *Bedeutung* von a) und b) zeigen:

a) $3 \cdot A + B$ bedeutet z.B.: ich gehe in einen Laden und kaufe *drei* Apfelsinen und *eine* Birne. Da läßt sich offensichtlich nichts vereinfachen, außer vielleicht, daß sich insgesamt vier *Früchte* gekauft habe

b) $3 \cdot (A + B)$ hingegen bedeutet etwas ganz anderes, nämlich z.B.: ich gehe *dreimal* in den Laden und kaufe jedesmal *eine* Apfelsine *und eine* Birne. Anders gesagt:

beim ersten Mal kaufe ich:	A	B
beim zweiten Mal kaufe ich:	A	B
beim dritten Mal kaufe ich:	. A	B
insgesamt habe ich gekauft:	A A A	B B B
also:	3 A(pfelsinen) plus	3 B(irnen)
bzw.:	$3 \cdot A$ +	$3 \cdot B$

Halten wir also schonmal als Gesamtergebnis fest:

$$3 \cdot (A + B) = 3 \cdot A + 3 \cdot B \qquad (\#)$$

Das kann man höchstens noch in einer Beziehung vereinfachen: ich habe insgesamt sechs *Früchte* gekauft und nicht mehr wie in a) vier.
Aber nochmals zur Gleichung $3 \cdot (A + B) = 3 \cdot A + 3 \cdot B$. Sie besagt folgendes: es bleibt sich gleich, ob ich 3 Körbchen kaufe, in denen jeweils ein Apfel *und* eine Birne ist [$3 \cdot (A + B)$], oder ob ich *erst* drei Äpfel und *dann* 3 Birnen kaufe [$3 \cdot A + 3 \cdot B$].

Schauen wir uns auch gleich an, wodurch dieser Unterschied zwischen a) und b) zustande gekommen ist:

in a) hieß es $3 \cdot A + B$, d.h., *nur* das A wurde mit 3 multipliziert (3 Apfelsinen), während es bei *einem* B (einer Birne) blieb

in b) hieß es $3 \cdot (A + B)$. In der Gleichung (#) hatten wir gesehen, daß das bedeutet: *nicht nur* A wird mit 3 multipliziert (3 Apfelsinen), *sondern auch* B (3 Birnen). Im Vergleich mit a) haben wir also genauso viele Apfelsinen (nämlich 3), aber zwei Birnen *mehr* (nämlich 3 statt 1).

Nun können wir die Gleichung (#) verallgemeinern:

> Das Distributivgesetz lautet:
>
> $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
>
> In Worten: ich kann eine Zahl a mit einer Summe (b + c) multiplizieren, indem ich a mit *jedem Summanden* (also b bzw. c) multipliziere und die Ergebnisse $a \cdot b$ und $a \cdot c$ addiere.

Man sieht also: ich kann das a vor der linken Klammer auch auf die *beiden* Summanden b und c *aufteilen* (lat. distribuere = aufteilen).
Genau umgekehrt ist das Distributivgesetz aber viel praktischer: in $a \bullet b + a \bullet c$ muß man *zwei* Multiplikationen und *eine* Addition, also insgesamt *drei* Rechnungen durchführen, in $a \bullet (b + c)$ hingegen nur noch *eine* Addition und *eine* Multiplikation, also nur noch *zwei* Rechnungen. Auch das Distributivgesetz dient also in der Regel der *Vereinfachung* von Rechnungen.
Der Vorteil wird insbesondere an folgendem Beispiel deutlich:

$$7 \bullet (4 + 6) = 7 \bullet 4 + 7 \bullet 6$$
$$\Leftrightarrow 7 \bullet 10 = 28 + 42$$
$$\Leftrightarrow 70 = 70$$

Offensichtlich ist die linke Seite wegen 4 + 6 = 10 erheblich einfacher zu rechnen.
Schauen wir uns nochmal genau an, was sich im Distributivgesetz verändert hat: wegen der Klammer in $a \cdot (b + c)$ muß *erst* addiert und *dann* multipliziert werden. In $a \cdot b + a \cdot c$ gehen hingegen die Punktrechnungen *vor* der Strichrechnung, d.h., hier muß *erst* multipliziert und *dann* addiert werden. Wir haben gesehen, daß sich das *Ergebnis* gleich bleibt.
Aber Vorsicht: *beide* Rechnungen sind nur dann gleich, wenn ich auf der rechten Seite der obigen Gleichung a mit b UND mit c multipliziere. Multipliziere ich hingegen a *nur* mit b, *nicht* aber auch mit c, rechne ich also *fälschlich* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + c$, so habe ich offensichtlich die Aufgabenart a) in die Aufgabenart b) verwandelt. Wir hatten schon gesehen, daß da nicht das Gleiche herauskommt, also *nicht* mit einem Gleichheitszeichen verbunden werden darf. Dieser Fehler sei nur erwähnt, weil es der mit Abstand beliebteste Schülerfehler ist.
Meistens taucht er beim Kürzen von Brüchen auf: dann wird z.B.

$\frac{15x + 30}{15}$ folgendermaßen gekürzt: $\frac{\overset{1}{\cancel{15}}x + 30}{\underset{1}{\cancel{15}}} = \frac{1 \cdot x + 30}{1} = x + 30$

Offensichtlich wurde dabei nur der *erste* Summand im Zähler (also 15x) durch 15 dividiert, *nicht* aber der *zweite* Summand (30). Mittels des Distributivgesetzes läßt sich leicht zeigen, daß das *falsch* ist:

$\frac{15x + 30}{15} = \frac{15 \cdot (x + 2)}{15}$: *Das* aber läßt sich durch 15 kürzen, denn aus einem *Produkt* (im Zähler) darf man kürzen. Wir erhalten

$$\frac{\overset{1}{\cancel{15}} \cdot (x + 2)}{\underset{1}{\cancel{15}}} = \frac{1 \cdot (x+2)}{1} = x + 2$$ als *richtiges* Ergebnis.

Unser erster Versuch war falsch gelaufen, weil wir aus einer Summe (im Zähler) gekürzt hatten, indem wir nur *einen* Summanden gekürzt hatten. Man sagt deshalb auch kurz "Kürzen aus Summen tun nur die Dummen", obwohl das eigentlich nicht ganz richtig ist: ich *darf* aus Summen kürzen, wenn ich *jeden* Summanden kürze.

Von $a \cdot (b + c)$ nach $a \cdot b + a \cdot c$ haben wir die Klammer *beseitigt*.
Nun kann man das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ allerdings auch von rechts lesen oder *umgekehrt*

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ schreiben.

So gesehen wird von links nach rechts a aus $a \cdot b$ und $a \cdot c$ *herausgezogen* und vor eine Klammer gestellt. Die Klammer wird also nicht mehr *beseitigt*, sondern neu *hergestellt*. Man sagt auch: a wird "ausgeklammert".
Wieder Vorsicht:

beim Ausklammern muß man a aus *beiden* Summanden $a \cdot b$ *und* $a \cdot c$ ausklammern.

Es kommt jeweils auf die Aufgabenstellung an: einmal will man Klammern *beseitigen*, das andere Mal will mal ausklammern, also Klammern *herstellen*.

Ohne Herleitung sei gleich erwähnt:

Das Distributivgesetz gilt auch für ein *Minus*:

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Auch hier lassen sich also Klammern beseitigen oder umgekehrt ausklammern.

Das Distributivgesetz gilt *nicht* für die *Division*:

$a : (b + c)$ *ungleich* $a : b + a : c$

z.B. $\underline{4 : (3 + 1)} = 4 : 4 = 1$ *ungleich* $\underline{4 : 3 + 4 : 1} = {}^{4}/_{3} + 4 = 5\,{}^{1}/_{3}$

C) Zusammenfassung der Rechengesetze; Überblick; Erweiterung

Jedes Rechengesetz kann man leicht an einigen Merkmalen erkennen und von den anderen unterscheiden:
1. im Kommutativgesetz kommt nur ein • oder ein + vor, also nur *ein* Zeichen
2. im Assoziativgesetz kommen zwei • oder zwei + vor, also nur *ein* Zeichen, aber *doppelt*
3. im Distributivgesetz kommen • und + bzw. • und - vor, also immer *zwei verschiedene* Zeichen auf einmal, nämlich die *Punktrechnung* • und eine *Strichrechnung*.

Alle drei Gesetze gelten auch für *kompliziertere* Terme, die z.B. auch Variable/Unbekannte enthalten können. Wir müssen nur für a, b bzw. c kompliziertere Ausdrücke einsetzen. So gilt z.B. auch

1. Kommutativgesetz: $a + b = b + a$

$3x + 2y = 2y + 3x$

$$a \cdot b = b \cdot a$$
$$3x \cdot 2y = 2y \cdot 3x$$

2. Assoziativgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$
$$7x + (3y + 4z) = (7x + 3y) + 4z$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
$$7x \cdot (3y \cdot 4z) = (7x \cdot 3y) \cdot 4z$$

3. Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$$17x \cdot (2z + 9y) = 17x \cdot 2z + 17x \cdot 9y$$

Wer den Umgang mit solchen komplizierteren Termen noch nicht beherrscht, schreibe sich (wie eben geschehen) einfach die vollständigen Rechengesetze *darüber*.

III. Vorzeichen, Rechenzeichen und Klammern

Nachdem wir in einem anderen Kapitel den Umgang mit Vor- und Rechenzeichen und hier den Umgang mit Klammern gelernt haben, sollen jetzt *Kombinations*beispiele angeschaut werden.
Bevor wir zu komplizierteren Aufgaben kommen, müssen wir uns noch anschauen, was sich ein Vor-/Rechenzeichen auf das Auflösen einer Klammer bzw. umgekehrt das Ausklammern auswirkt:

1. Was ergibt sich, wenn man in 3•(4 - 5) die Klammer auflöst?
   Schreiben wir es mal ganz ausführlich:
   <+3> • (+4 - [+5])
   Das ist nach dem Distributivgesetz gleich
   <+3>•(+4) - <+3>•[5] oder kurz 3•4 - 3•5
   Bemerkenswert dabei ist: steht vor der 3 ein *Plus*, so ändert sich beim Klammerauflösen *nichts* an den Vorzeichen in der ehemaligen Klammer, also vor 4 und 5.
   Oder gleich allgemein:

> Steht ein *Plus* vor einer Klammer, so ändern sich beim Klammerauflösen *nicht* die Vorzeichen *in* der Klammer.

Ein Spezialfall ist nun + (4 - 5), das wir auch als (+1)•(4 - 5) schreiben können. Mit der eben entwickelten Regel erhalten wir

+ (4 - 5) = (+1) • (4 - 5) = 4 - 5

> Steht also ein nacktes Plus vor einer Klammer (ohne weitere Zahl), so können wir die Klammer einfach *weglassen*.

Umgekehrt können wir positive Zahlen auch problemlos *ausklammern*:

12 - 15 = (+3)•4 - (+3)•5 = (+3)•(4- 5) = 3•(4 - 5)

Auch hier stimmen die Vor- und Rechenzeichen *vor* und *nach* dem Ausklammern überein.

2. Was ergibt sich, wenn man in (-3)•(4 - 5) die Klammer auflöst?
   Schreiben wir es mal ganz ausführlich:
   <-3> • (+4 - [+5])

Das ist nach dem Distributivgesetz gleich

<-3>•(+4) - <-3>•[+5] =

= -3•4 - [- 3•5] =

= -3•4 + 3•5

Bemerkenswert dabei ist: steht vor der 3 ein *Minus*, so drehen sich beim Klammerauflösen die Vorzeichen *in* der ehemaligen Klammer *um*, und zwar auch das "unsichtbare" + vor der 4. Oder gleich alllgemein:

> Steht ein *Minus* vor einer Klammer, so drehen sich beim Klammerauflösen *alle* Vorzeichen *in* der Klammer *um*. Lax gesagt: steht ein Minus vor der Klammer, dreht sich um der *ganze* Jammer.

Ein Spezialfall ist nun -(4 - 5), das wir auch als (-1)•(4 - 5) schreiben können. Mit der eben entwickelten Regel erhalten wir

-(4 - 5) = (-1) • (4 - 5) = -4 + 5

Umgekehrt haben wir beim *Ausklammern* negativer Zahlen darauf zu achten, daß sich die Vorzeichen in der Klammer *umdrehen*.

- 12 + 15 = (-3)•4 -(-3)•5 = (-3)•(4 - 5) = -3•(4 - 5)

Auch hier sind die Vor- und Rechenzeichen *vor* und *nach* dem Ausklammern *umgedreht*.

3. Wie multipliziert man *zwei Klammern* miteinander, also z.B. (2 + 3)•(4 + 5)?

Ganz einfach: wir ersetzen (4 + 5) erstmal durch a und haben dann nur noch da stehen: (2 + 3) • a. Das aber können wir nach dem Distributivgesetz auflösen zu 2•a + 3•a. Wenn wir nun statt a wieder (4 + 5) einsetzen, so erhalten wir

2•(4 + 5) + 3•(4 + 5).

Jedes der Produkte können wir wieder mit dem Distributivgesetz auflösen und erhalten:

2•4 + 2•5 + 3•4 + 3•5,

insgesamt also (2 + 3)•(4 + 5) = 2•4 + 2•5 + 3•4 + 3•5

```
|______|_______|      |     |   |
|__________|________|      |   |
     |___|__________________|   |
     |______|___________________|
```

Oder allgemein (wobei S = Summand, K = Klammer):

(1.S in 1.K + 2.S in 1.K) • (1.S in 2.K + 2.S in 2.K) =
= (1.S in 1.K)•(1.S in 2.K)+(1.S. in 1.K)•(2.S in 2.K) +
+ (2.S in 1.K)•(1.S in 2.K)+(2.S. in 1.K)•(2.S in 2.K)

Kürzer:

> zwei Klammern werden miteinander multipliziert, indem man *jeden* Summanden der ersten mit *jedem* Summanden der zweiten Klammer multipliziert und die sich dabei ergebenden Produkte aufaddieret.

Damit können wir nun auch z.B. lösen:

(-5 + 6) • (7 - 8) =
= (-5)•(+7) + (-5)•(-8) + (+6)•(+7) + (+6)•(-8) =

= -5•7 + [+ 5•8] + [+ 6•7] + [-6•8] =
= -5•7 + 5•8 + 6•7 - 6•8

Was tut man nun, wenn *mehrere* Klammern auftauchen, wie z.B. in 3 + [4•(15 + 8• {13 -2})]?

1. die zusammengehörigen Klammern kann man
   a) in *verschiedener Schreibweise* darstellen, also z.B. wie eben:
      3 [4•(15 + 8• <13- 2>)]
        [ ]
          ( )
             < >
   b) der *Größe* nach staffeln, also z.B.

      3 4• 15 + 8• (13 2)

   Sorgt man nicht dafür, *zusammengehörige* Klammern *gleich* darzustellen, so *vergißt* man schnell welche oder weiß nicht mehr, *welche* zusammengehören.
2. eine Klammernart, die *geöffnet* wird, muß auch wieder *geschlossen* werden, denn eine Klammer muß immer etwas *umfassen*.
3. Klammenarten können sich *nicht übergreifen*, sondern nur *ineinander* liegen.
   Also funktioniert *nicht* 3(4-7•[15-2)],
   |________|
   |_____|
   wohl aber 3(4-7•[15-2])
   | |____| |
   |__________|

4. Wenn man *mehrere* Klammern hat und auflösen will, so kümmere man sich erstmal um *eine* (meist die innerste) Klammer und lasse den Rest vorerst unverändert stehen. Dabei hilft auch:
5. Man schreibe die Umformungen (wenn irgend möglich) genau *untereinander*, so daß auch die jeweiligen *Klammern* untereinan der stehen.

Wenden wir 1. -5. mal auf das Beispiel 3 - [4•(15 + 8• <13 -2>)] an:

3 - [4•(15 + 8• <13 -2>)] Zuerst kümmern wir uns *nur* um < >, die wir mit dem *Distributivgesetz* auflösen. Der Rest wird *unverändert* übernommen:

= 3 - [4•(15 + 8•13 -8•2)] Nun kümmern wir uns *nur* um ( ), die wir wieder mit dem *Distributivgesetz* auflösen. Der Rest wird wieder *unverändert* übernommen:

= 3 - [4•15 + 4•8•13 - 4•8•2] Und erst jetzt nehmen wir [ ] in Angriff. Steht ein Minus vor der Klammer, drehen sich beim Klammerauflösen *alle* Vorzeichen *in* der ehemaligen Klammer *um*:

= 3 - 4•15 - 4•8•13 + 4•8•2

Hinzufügen von Klammern

In der Regel ist es bei der Termumformung unser Ziel, Klammern zu *beseitigen*. Dabei erweist es sich allerdings manchmal als nötig, für eine *Zwischenzeit* Klammern *hinzuzufügen*. Dafür zwei Beispiele:

a) in 3(a + b)(c + d) sollen die Klammern beseitigt werden. Rechnet man das blind runter, so ergibt sich:

3 (a + b)(c + d) =
= 3 ac + ad + bc + bd

Wir halten fest: 3 wird dann *nur* mit ac multipliziert, *nicht* aber mit den *restlichen* Summanden. Und das ist *falsch*!!!

Denn überlegen wir mal, womit 3 im Ausgangsterm 3(a + b)(c + d) multipliziert wird: doch mit der *ganzen* Klammer (a + b), also doch wohl auch mit b. Das war in unserem (falschen) Ergebnis oben aber nicht der Fall. Aus diesem Grund müssen wir vor Auflösen der Klammern in (a + b)(c + d) eine Klammer *hinzufügen*:

3 (a + b)(c + d) =
= 3 [(a + b)(c + d)] =
= 3 [ac + ad + bc + bd] =
= 3ac + 3ad + 3bc + 3bd

Wir sehen: nun wird 3 keineswegs *nur* mit ac, sondern mit *allen* Summanden multipliziert. Außerdem wird deutlich: die Hilfsklammer [ ] taucht nur für wenige Schritte auf und verschwindet dann wieder.

b) Genauso steht der Fall, wenn ein *Minus* vor den Klammern steht: wir haben zu rechnen:

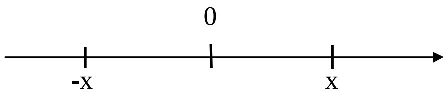
- (a + b)(c + d) =
= - [(a + b)(c + d)] =
= - [ac + ad + bc + bd] =
= - ac - ad - bc - bd

Folgerung:

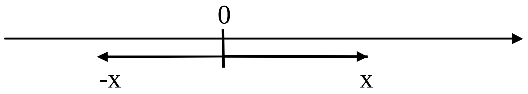
Bei der Vereinfachung eines *Produkts* zweier Klammern sind Hilfsklammern einzufügen, sobald vor dem Produkt eine Zahl ungleich 1 oder ein Minus (oder beides) steht.

Beträge:

Die - x und x repräsentierenden *Punkte* auf dem Zahlenstrahl sind *gleichweit* vom Ursprung O entfernt, nur einer *rechts* und der andere *links* davon:



Die -x und x repräsentierenden *Pfeile* sind *gleichlang*, nur zeigt der eine nach rechts, der andere nach links:



Definiert man nun

$\|x\|$ = <u>Betrag</u> <u>von</u> <u>x</u> ("|" = Betragsstrich) als die *Länge* des zu x gehörenden Pfeils (und Längen sind ja immer positiv), so gilt: a) $\|x\| = x$ für $x > 0$, d.h. für positive Zahlen sind Zahl und Betrag der Zahl *gleich* b) $\|x\| = x$ für $x < 0$, d.h. für positive Zahlen ist der Betrag die *Gegenzahl* der Zahl

Beispiele:
zu a): die *Zahl* 3 hat einen (nach rechts gerichteten) Pfeil der *Länge* 3 , also $|3| = 3$
$|x| = x$
zu b): die *Zahl* -3 hat einen (nach links gerichteten) Pfeil der *Länge* +3 = -(-3), also $|-3| = -(-3) = +3$
$|x| = -x$

Man muß sich eben nur daran erinnern: das *Negative* -(-x) einer bereits *negativen* Zahl x ist wieder *positiv*.

Vorverweis:

Mit den Betragsstrichen kann man auch die Fallunterscheidung beim Wurzelziehen vereinfachen:

$$x^2 = 2 \quad | \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}$$

(denn $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ *und* $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$)

Brüche/Dezimalzahlen

Dezimalzahlen haben die Form

...abcde,fghijk...

wobei die Ziffern a ... k $\in$ {0;1;2;3;4;5;6;7;8;9} sind, also die üblichen *Ziffern* des Dezimalsystems. Deshalb heißen sie ja auch Dezimalzahlen. Wie im Dezimalsystem üblich, entscheidet nicht nur die *Ziffer* ihren Wert, sondern auch ihre *Stellung* in der Gesamtzahl. Z.B. bedeutet die 2 in 20 etwas ganz anderes als die 2 in 200.

Ausführlich: 2 0 = $2 \cdot 10 + 0 \cdot 1$ 2 0 0 = $2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1$

Unser Zahlensystem aus Dezimalzahlen ist also eine höchst praktische Abkürzung für *Summen*. Jeder Einzelsummand (z.B. eben $2 \cdot 100$) ist Vielfaches einer *10er-Potenz* (denn z.B. $100 = 10^2$, $10 = 10^1$, $1 = 10^0$). Und auf eben solchen 10er-Potenzen baut das ganze Dezimal- = Zehnersystem auf (während z.B. das ebenso mögliche 3er-System auf 3er-Potenzen aufbaut).

Nun gibt es aber nicht nur Einer, Zehner, Hunderter ..., sondern auch Zehntel, Hundertstel, Tausendstel ... Sie sind alle *kleiner* als 1 und bieten so die Möglichkeit, auch Zahlen *kleiner* als 1 auszudrücken bzw. Zahlen *zwischen* ganzen Zahlen. Ein Beispiel:

3275,19803 =

= 3 2 7 5 , 1 9 8 0 3 =

$$= 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1 \quad + 1 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot \frac{1}{1000} + 0 \cdot \frac{1}{10000} + 3 \cdot \frac{1}{100000}$$

Es läßt sich also schon sagen: alles, was nach dem Komma kommt, ergibt zusammen weniger als 1, die Nachkommastellen sorgen also nur noch für *kleine* Veränderungen. Daraus folgt:

$$3275 < 3275{,}19803 < 3276$$

Allgemeiner:

3	2	7	5	,	1	9	8	0	3
Tausender	Hunderter	Zehner	Einer		Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	Zehntausendstel	Hunderttausendstel
1000	100	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$

Merke: 1. *Vor* dem Komma kann das ebenso weitergehen (Zehntausender, Hunderttausender ...) wie *hinterm* Komma (Millionenstel, Zehnmillionenstel ...)

2. Eintel = $\frac{1}{1}$ kann es nicht geben, weil 1:1 = 1 und somit Ein*tel* dasselbe wie Ein*er* sind.

Noch kurz zur Sprechweise: 3275,19803 spricht man nicht

„dreitausendzweihundertfünfundsiebzig Komma <u>neunzehntausendachthundertdrei</u>“, sondern

„dreitausendzweihundertfünfundsiebzig Komma <u>eins neun acht null drei</u>“

Diese Sprechweise ist besonders dann günstig, wenn nach dem Komma noch sehr *viele* Stellen folgen und man sie auf Anhieb noch gar nicht übersieht.

Merke: die natürlichen Zahlen sind *auch* Dezimalzahlen, weil sich z.B. 23 auch schreiben läßt als 23,0. Mathematischer ausgedrückt: die Menge der natürlichen Zahlen ist eine *Teilmenge* der Dezimalzahlen (das Umgekehrte gilt *nicht*: *nicht* jede Dezimalzahl ist auch eine natürliche Zahl; z.B. ist 0,5 = $\frac{1}{2}$ eindeutig *keine* natürliche Zahl).

> Vorsicht: wie schon gesehen, ist es sehr wichtig, an welcher *Stelle* eine Ziffer auftaucht. Man darf also keineswegs welche weglassen. Wie wir bei 20 und 200 gesehen haben, auch keine *Nullen* (obwohl die doch scheinbar keinen Wert haben): Nullen sorgen nämlich dafür, daß andere *Ziffern* auf andere *Stellen* verschoben werden.
> Nullen darf man nur weglassen, wenn sie *vor* allen anderen oder *nach* allen anderen Ziffern stehen. Z.B.
> 000000000000000000203040,050607000000000000000000 =
> = 203040,050607

> Insbesondere merke: 1. Kommas können nur *in* Dezimalzahlen auftauchen, nicht vor oder hinter ihnen.
> Unmöglich ist also 2, oder ,5.
> Richtig ist hingegen 2,0 oder 0,5.
> 2. In Dezimalzahlen darf nur *ein* Komma auftauchen.

Die Dezimalzahlen haben (vorerst mal) vor allem einen Vorteil: mit ihnen lassen sich die Lücken auf dem Zahlenstrahl zwischen den natürlichen Zahlen beliebig eng füllen (und dennoch bleiben „klitzekleine“ *Lücken* über: die irrationalen Zahlen, die erst in der 9. Klasse drankommen; s.u.).. Denn man erinnere sich: die natürlichen Zahlen liegen auf dem Zahlenstrahl noch immer *isoliert*, nämlich im *Abstand 1* und *dazwischen nichts*.

> Bei der Längeneinheit 1m gilt z.B.: 3 , 1 0 7 m =
> = 3 m + 1 dm + 0 cm + 7 mm

$$1\cdot\frac{1}{10} + 9\cdot\frac{1}{100} + 8\cdot\frac{1}{1000} + 0\cdot\frac{1}{10000} + 3\cdot\frac{1}{100000}$$

Wie wir bei

3275,19803 =

= 3 2 7 5 , 1 9 8 0 3 =

$$= 3\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 7\cdot 10 + 5\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{10} + 9\cdot\frac{1}{100} + 8\cdot\frac{1}{1000} + 0\cdot\frac{1}{10000} + 3\cdot\frac{1}{100000} \quad \text{(A)}$$

schon gesehen haben, ist die *Dezimalzahl* in der ersten Zeile nur eine kompliziertere Schreibweise für eine *Bruch*rechnung in der letzten Zeile. Dezimalzahlen und Brüche scheinen also sehr eng zusammenzuhängen.
Das wird deutlicher, wenn wir die Zeile (A) mal weiterrechnen:

$$3\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 7\cdot 10 + 5\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{10} + 9\cdot\frac{1}{100} + 8\cdot\frac{1}{1000} + 0\cdot\frac{1}{10000} + 3\cdot\frac{1}{100000} =$$

$$= 3275 + \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} =$$

$$= \frac{3275}{1} + \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} =$$

Hauptnenner 100000, Erweiterung aller Brüche auf diesen Hauptnenner

$$= \frac{327500000}{100000} + \frac{10000}{100000} + \frac{9000}{100000} + \frac{800}{100000} + \frac{3}{100000} =$$

$$= \frac{327519803}{100000}$$

Insgesamt also $32751{,}19803 = \dfrac{327519803}{100000}$ (B)

Diesem Beispiel kann man also (scheinbar) entnehmen: Dezimalzahlen und Brüche sind im Prinzip *dasselbe*, sehen nur völlig anders *aus*.
Damit stellt sich als erstes die Frage: wieso *beide* einführen, wenn sie anscheinend sowieso *dasselbe* sind? Die Antwort ist ganz einfach: mal ist die eine, mal die andere Schreibweise günstiger:

a) will ich jemandem sagen, er möge eine 1 m lange Latte *halbieren*, so ist doch sicherlich die Ausdrucksweise $\frac{1}{2}$ = ein*halb* günstiger;
b) möchte ich ihm hingegen sagen, er soll die Latte bei 50 cm durchschneiden, so ist 0,5 günstiger;
c) wie wir noch sehen werden, ist manchmal die Bruchschreibweise viel angenehmer als die Dezimalschreibweise, z.B. im Falle $\frac{1}{3}$ = 0,33333333333333333333333333333333333333...;
d) mit solch hinter dem Komma unendlichen Dezimalzahlen läßt sich außerdem grundsätzlich nicht *rechnen*;
e) Brüche lassen sich kaum auf dem Zahlenstrahl einzeichnen; wo z.B. liegt halbwegs exakt $\frac{1}{3}$ Meter? Bei Dezimalzahlen hatten wir hingegen oben schon gesehen, wie leicht sie auf dem Zahlenstrahl eintragbar sind;
e) zuguterletzt: Taschenrechner sind zu dumm für *Brüche* und können nur mit (endlichen!) *Dezimalzahlen* rechnen.

Aus all den Beispielen geht hervor:

Bei Brüchen/Dezimalzahlen ist
1. manchmal ist die eine, manchmal die andere Schreibweise günstiger;
2. Man muß gegebenenfalls die eine in die andere Schreibweise *übersetzen* können. Dazu weiter unten.

Nun ist es allerdings ein Irrtum, zu meinen (wie oben vermutet), Brüche und Dezimalzahlen seien *exakt* dasselbe bzw. jeder Bruch lasse sich in eine Dezimalzahl und jede Dezimalzahl in einen Buch übertragen. Genau genommen gilt nämlich:

- *jeder* Bruch läßt sich in eine exakt gleichwertige Dezimalzahl übertragen,
- umgekehrt geht das aber nur *manchmal*, nicht *immer*.

Um hier genauer zu unterscheiden, müssen wir allerdings noch ganz kurz den Begriff der „Periode“ einführen.

Man nennt eine Dezimalzahl „periodisch", wenn ab einer bestimmten Stelle hinter dem Komma ohne Ausnahme immer wieder *dieselbe* Ziffernfolge auftritt. Die kann man dann auch durch einen Strich drüber abkürzen. Beispiele:

$0{,}33333333333333333333333\ldots = 0{,}\overline{3}$ sprich: Null Komma Periode 3

$257{,}14\ 835\ 835\ 835\ 835\ 835\ 835\ldots = 257{,}14\overline{835}$

sprich: zweihundertsiebenundfünfzig Komma eins vier Periode acht drei fünf

Der Begriff „Periode" taucht also auf, *bevor* sie losgeht, damit sofort klar ist, ab *wann* sie losgeht.

Mit dem Begriff der Periode können wir nun (ohne Beweis) feststellen:

Jede rationale Zahl (aus der Menge $\mathbb{Q}$) läßt sich gleichberechtigt darstellen
- entweder als <u>Bruch</u> aus ganzen Zahlen
- oder als hinter dem Komma *entweder* endliche oder *periodische* <u>Dezimalzahl</u>.

Völlig aus diesem System raus fallen also Dezimalzahlen, die hinter dem Komma *weder* endlich *noch* periodisch sind. Die lassen sich auf Anhieb schwer vorstellen und doch ganz einfach konstruieren, z.B.

0,10 100 1000 10000 100000 ....

Solche Dezimalzahlen sind *keine* rationalen Zahlen und somit auch *nicht* in Brüche übersetzbar. Üblicherweise sind sie erst Stoff der 9. Klasse (wenn wurzeln durchgenommen werden). Weil sie *nicht* rational sind, nennt man sie auch „*un*-" bzw. lateinisch „*ir*rationale" Zahlen.

Kurz gesagt: wir können - *ausnahmslos alle* Brüche in Dezimalzahlen übersetzen
- und alle *entweder* endlichen *oder* periodischen Dezimalzahlen in Brüche.

Wie man nun das eine in das andere übersetzt, sei im folgenden nach und nach behandelt. Erst zur

<u>Übersetzung von Brüchen in Dezimalzahlen, weil das *immer* geht:</u>

1. Es liegt einer <u>Zehnerbruch</u> vor, d.h. im *Nenner* steht eine nackte *Zehnerpotenz* (1, 10, 100, 1000 ...).
   Wie wir dem Beispiel (B) entnehmen können, ist das ganz einfach:

$$\frac{327519803}{1\underline{00000}} = 32751{,}\underline{19803}$$

   Man schreibt die Zahl des Zählers einfach ab und nimmt genauso viele *Nachkommastellen*, wie der Nenner *Nullen* hatte.
   Ein anderes, etwas schwieriges Beispiel (weil man da noch einige Nullen *hinzufügen* muß):

$$\frac{23}{1\underline{0000}} = 0{,}\underline{0023}$$

2. Es liegt <u>kein Zehnerbruch</u> vor, aber der vorliegende Bruch läßt sich problemlos <u>auf einen Zehnerbruch erweitern oder kürzen</u> (worauf man dann wie in 1. weiter verfahren kann). Beispiel:

$\frac{7}{5}$ = $\frac{1}{10}$ = 1,4

Erweiterung mit 2 1.

3. Es liegt <u>kein</u> Zehnerbruch vor, und eine Erweiterung/Kürzung auf einen Zehnerbruch ist entweder

   a) <u>nicht/schlecht sichtbar</u> (z.B. bei $\frac{1}{64}$) oder

   b) überhaupt <u>nicht möglich</u> (z.B. bei $\frac{1}{3}$).

   Welcher der beiden Fälle vorliegt, kann einem dann nebenbei schnuppe sein!

Da hilft dann nur noch die *schriftliche Division* (und die hilft ausnahmslos *immer*!). Dafür müssen wir uns aber ansehen, wie man neuerdings *ohne Rest* dividieren kann.

Ein einfaches Beispiel sei $\frac{1}{64}$ bzw. 1: 64 bzw. 1,000000000 : 64.

Diese Division war bisher überhaupt nicht möglich (64 paßt nicht in 1 rein). Und doch weiß jeder, daß die Rechnung durchaus *sinnvoll* ist, wenn man etwa einen großen Kuchen an 64 Personen verteilt.
Wir verfahren nun bei der schriftlichen Division genauso weiter wie auch schon bisher üblich, nur daß wir neuerdings auch *Nachkommastellen* herunter holen. Dabei ist nur *unbedingt* zu beachten:

> sobald ich die *erste* Nachkommastelle herunter hole, muß ich auch <u>sofort</u> im *Ergebnis* ein Komma setzen (sonst vergißt man es allzu schnell). Ab dann wird wie gewohnt weiter gerechnet (weitere Kommas tauchen in Dezimalzahlen ja nicht auf).

Beispiel: $\frac{1}{64}$ = 1: 64 = 1,000000000 : 64 = 0,015625

```
  ↓
1 0
    ↓
1 00
-   64↓
     360
   - 320↓
      400
    - 384↓
       160
     - 128↓
        320
      - 320
          0
```

Kurz gefaßt $\frac{1}{64}$ = 0,015625.

Hier wird schon deutlich: die Rechnung dauert zwar ziemlich lange, geht aber *ohne Rest* auf (erkenntlich an der 0 ganz unten). Wir haben als Ergebnis also eine *endliche* Dezimalzahl.

Merke: immer wenn (irgendwann) der *Rest Null* auftaucht, ist das Dezimalzahlergebnis *endlich*.

Wie sich bei der Rechnung zeigte, haben wir vorsorglich viel zu viele Nullen hinter die 1 geschrieben. Da man aber nie im Voraus weiß, wieviele Nullen man braucht, läßt man sie auf die Dauer sowieso alle weg und *denkt* sie sich nur noch.
Wir wissen schon: wenn man einen Bruch in eine Dezimalzahl überführt, kommt entweder eine endliche oder eine *periodische* Dezimalzahl heraus. Auch für letzteres ein Beispiel:

$$\frac{1}{3} = 1{,}000 : 3 = 0{,}33....$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ 1\,0 \\ \underline{-\ \ 9}\downarrow \\ 10\ ... \end{array}$$

Hier wird deutlich: es taucht *immer wieder* und bis in alle Ewigkeit der Rest 1 und nichts anderes auf. Durch Herunterholen einer weiteren Null wird daraus *immer* 10, und in 10 ist die 3 *immer* 3mal enthalten. Die Rechnung geht also *unendlich weiter*. Wir erhalten *nie* den Rest 0 (womit das Ergebnis endlich würde), sondern eine 3 nach der anderen. Das Ergebnis ist also 0,3333333333333333... bzw. $0{,}\overline{3}$, also *periodisch*.
Noch ein weiteres Beispiel für die Periode, das ein bißchen schwieriger ist:

$$\frac{17}{990} = 17:990 = 17{,}0000000 : 990 = 0{,}0171717\ ... = 0{,}0\overline{17}$$

$$\begin{array}{lr} & \downarrow \\ \text{(D)} & 17\,0\downarrow \\ & 17\,00 \\ & \underline{-\ \ 9\,90}\downarrow \\ & 7\,100 \\ & \underline{-\ 6\,930} \\ \text{(E)} & 170\ .... \end{array}$$

Nun erscheint in Zeile (E) derselbe Rest wie in Zeile (D). Um das zu sehen, muß man allerdings sehr aufmerksam und rechenfaul sein. Das Wiedererscheinen *desselben* Rests bedeutet aber doch: ab da geht dieselbe Rechnung von *vorne* los, und es tauchen im Ergebnis immer wieder nur Einsen und Siebenen auf, das Ergebnis wird also *periodisch*.

Merke: sobald *derselbe* Rest ($\neq 0$) *wie schonmal vorher* auftaucht, weiß man
1., *daß* die Dezimalzahl periodisch (und nicht endlich) ist;
2., *welche* Periode vorliegt (alle Ergebnis-Ziffern seit dem *ersten* Auftauchen desselben Rests)

Wie oben schon gesagt: das Ergebnis solch einer Division ist *immer* eine hinter dem Komma *endliche* oder *periodische* Dezimalzahl.

Aus Brüchen werden in Dezimalschreibweise *immer* hinter dem Komma endliche oder periodische Zahlen. Eine *andere* Möglichkeit (nämlich weder endlich noch periodisch) gibt es - glücklicherweise - nicht.

Übersetzung von Dezimalzahlen in Brüche, was *nicht* immer, sondern nur *manchmal* geht:

Wie oben schon gesehen: das geht nur, wenn die Dezimalzahl *endlich* oder *periodisch* hinter dem Komma ist. Das festzustellen, ist aber gar nicht so einfach, wenn die Dezimalzahl z.B. erst nach der 100sten Stelle endlich ist, dort erst periodisch wird oder eine sehr lange Periode hat. In solch einem Fall hält man sie gerne *fälschlich* für *weder* endlich *noch* periodisch. Da muß man also sehr genau aufpassen.

Betrachten wir also die *möglichen* Fälle:

3. die Dezimalzahl ist endlich: die Umformung funktioniert dann wie in 1., nur *umgekehrt*:

$$32751{,}19803 = \frac{327519803}{100000}$$

Man schreibt die Ziffern der Dezimalzahl (nur *ohne* Komma) in den *Zähler* und setzt in den *Nenner* eine Zehnerpotenz, die genauso viele *Nullen* hat, wie die Dezimalzahl *Nachkommastellen* hatte.

4. von den periodischen Dezimalzahlen seien hier nur diejenigen betrachtet, die vor dem Komma eine *Null* haben und hinter dem Komma „reinperiodisch“ sind, d.h., bei denen die Periode *direkt hinter dem Komma* beginnt (wohlgemerkt: alle anderen periodischen Dezimalzahlen lassen sich *auch* in Brüche verwandeln, das ist aber oftmals sehr rechenaufwendig).

Also: $0,\ 687\ 687\ 687\ ... = 0,\overline{687}$ *ist* reinperiodisch,

$0{,}1\ 687\ 687\ 687\ ... = 0{,}1\overline{687}$ ist *nicht* reinperiodisch.

Die Methode für *reinperiodische* Zahlen ist ganz einfach (als Begründung führe man mal die schriftliche Division 687:999 durch):

$$0{,}\overline{687} = \frac{687}{999}$$

Man schreibt einfach die Periodenziffern in den *Zähler* und genauso viele Neunen in den *Nenner*.

Rechnen mit Dezimalzahlen

Nachdem wir uns nun mit Dezimalzahlen (sowie ihren Beziehungen zu Brüchen) auskennen, können wir uns nun darum kümmern, wie mit Dezimalzahlen *gerechnet* wird, wie man also *zwei Dezimalzahlen* (und mehr) addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Es liegen also *dieselben* Rechnungsarten vor wie schon bei natürlichen Zahlen und Brüchen. Außerdem *funktionieren* die Rechnungen bei Dezimalzahlen glücklicherweise *fast genauso* wie bei natürlichen Zahlen (nur mit der *neuen* kleinen Schwierigkeit des *Kommas*). Das ist auch gar kein Wunder, wo die natürlichen Zahlen ja eine *Teilmenge* der Dezimalzahlen sind. Wenn wir mit *Dezimalzahlen* rechnen wollen, gibt uns zudem die *Bruchrechnung* hilfreiche Tips - und Bruchrechnungsregeln sollte man ja längst beherrschen.
Schwierigkeiten ergeben sich beim Rechnen mit Dezimalzahlen, die hinterm Komma *unendlich* sind. Dazu ein Beispiel:

$$
\begin{array}{rcr}
\frac{1}{3} = & & 0{,}3333333333333333333333333... \\
+\ \frac{1}{3} = & & +\ 0{,}3333333333333333333333333... \\
+\ \frac{1}{3} = & & \underline{+\ 0{,}3333333333333333333333333...} \\
\hline
1 & & 0{,}9999999999999999999999999...
\end{array}
$$

Zum Linken: ist doch wohl klar: wenn ich einen Kuchen in drei Teile (Drittel) schneide und sie hinterher wieder aufaddiere (alle wieder zusammenfüge), kommt der *ganze* Kuchen vom Anfang (1) raus.

Zum Rechten: In Analogie zur Addition natürlicher Zahlen könnte man auf die Idee kommen (wie sonst sollte man addieren?), mit der Addition der *letzten* Ziffern anzufangen. Und da ergibt sich als Summe 9. Das geht nach vorne hin so weiter, so daß sich 0,9999999999999999999... ergibt.

Nun dürfen aber zwei Additionen in verschiedenen *Schreibweisen* nicht verschiedene *Ergebnisse* ergeben (in der Mathematik müssen möglicherweise verschiedene *Wege* immer zum gleichen *Ziel* führen!). Da aber das *linke* Ergebnis *einleuchtend* war, muß das *rechte falsch* sein.

Worin lag nun der Fehler der rechten Addition? Es gibt nur zwei mögliche Erklärungen:

1. Werden Dezimalzahlen vielleicht anders (nicht mit der letzten Ziffer beginnend) addiert als natürliche Zahlen? Dann müßte dafür eine *Sonderregel* eingeführt werden, die *anders* funktioniert als bei natürlichen Zahlen. Sowas aber haben Mathematiker höchst ungern: sie wollen alles möglichst nach *einer* Regel rechnen. Zudem wäre eine Sonderregel höchst unangenehm, weil natürliche Zahlen ja *auch* Dezimalzahlen sind: man bräuchte dann ja für einige Dezimalzahlen andere Rechenregeln als für andere. Noch schlimmer: vielleicht bräuchten wir eine *dritte* Regel, um *natürliche* Zahlen und *andere* Dezimalzahlen zu addieren.
2. und somit die viel bessere Erklärung: wir *haben* in der Rechnung oben rechts ja gar nicht mit den *letzten* Ziffern begonnen: die Zahlen waren *periodisch*, und da *gibt es keine* letzten Ziffern! Nochmals anders gesagt:

Weil es bei hinter dem Komma unendlichen (u.a. periodischen) Dezimalzahlen *keine letzten Ziffern gibt* und wir somit auch nicht mit diesen *losrechnen* können, wird *überhaupt nicht* mit solchen Dezimalzahlen gerechnet. Umgekehrt: ab jetzt wird nur noch mit hinter dem Komma *endlichen* Dezimalzahlen gerechnet.
(Nebenbei: damit fallen auch alle *weder* endlichen *noch* periodischen Dezimalzahlen weg, also all diese höchst unangenehmen Zahlen, die nicht in *Brüche* übersetzbar sind; s.o.).

Damit aber zu den einzelnen Rechnungen:

1. *Addition* von Dezimalzahlen

Sei funktioniert *genauso* wie bei natürlichen Zahlen, nur daß man das *Komma* mit übernehmen muß.

Wichtig: man achte drauf, daß die Kommas der beiden zu addierenden Zahlen *exakt untereinander* stehen und das Ergebniskomma *genau darunter* kommt (Ergebniskomma nicht vergessen!)

Insbesondere ist zu empfehlen, das Ergebniskomma *vorweg* (also *vor* aller Rechnung) hinzuschreiben. Dann kann man es nicht mehr vergessen, ab da aber addieren, als handelte es sich um natürliche Zahlen.

Beispiele:

$$\begin{array}{rl} & 2\ \ 0{,}34\ _{(0)} \\ + & _{(0)}\ 1{,}52\ \ 3 \\ \hline & 2\ \ 2{,}86\ \ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 104\ \ 0\ _{(,0\ 0\ 0)} \\ + & _{(000)}\ \ 0\ \ ,023 \\ \hline & 104\ \ 0\ \ ,023 \end{array}$$

(Die Nullen in Klammern und Kommas sind eigentlich überflüssig und sollen nur zeigen, daß man sie sich zwecks Addition hinzudenken kann)

2. *Subtraktion* von Dezimalzahlen

Genauso funktioniert die Subtraktion. Deshalb nur *ein* Beispiel (wieder auf die Kommas *untereinander* und das im *Ergebnis* achten!):

$$\begin{array}{rr} & 245{,}98 \\ - & 14{,}27 \\ \hline & 231{,}71 \end{array}$$

3. *Multiplikation* von Dezimalzahlen

Ein Beispiel: Erna klaut im Laden 2,5 Packungen, in denen jeweils 1,5 Schokoladen sind. Wieviele Schokoladen (nicht Packungen!) hat sie dann geklaut? Gesucht ist also das Ergebnis von 2,5 · 1,5.

Hier lassen wir uns nun von der Bruchrechnung helfen: $2{,}5 = \frac{5}{2}$ und $1{,}5 = \frac{3}{2}$.

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \bullet 3}{2 \bullet 2} = \frac{15}{4} \underset{\text{Erweitern mit 25}}{=} \frac{375}{100} = 3{,}75$$

Also: 2,5·1,5 = 3,75 (A)

Erinnern wir uns nun, wie natürliche Zahlen multipliziert werden, so erhalten wir:

25 · 15 =375 (B)

Nun schreiben wir uns mal die Zeilen (A) und (B) direkt übereinander:

2,5 · 1,5 = 3,75 (A)
2 5 · 1 5 = 3 75 (B)

Daraus kann man entnehmen:

Dezimalzahlen werden in zwei Schritten miteinander multipliziert:
1. Man multipliziert sie noch *ohne* Berücksichtigung der Kommas *wie natürliche Zahlen*.
2. Man fügt das Komma im Ergebnis *nachträglich* folgendermaßen hinzu: das Ergebnis hat *genauso viele* Nachkommastellen wie die beiden zu multiplizierenden Zahlen *zusammen*.

Beispiel: 3,5	· 2,75	= 9,625
1 Nachkommastelle	2 Nachkommastellen	1+2 = 3 Nachkommastellen

Vorsicht: bei der *Addition* und *Subtraktion* (und nebenbei auch bei der *Division* unten) sollte man *vor* der Rechnung an das Komma denken, bei der *Multiplikation* hingegen *nach* der Rechnung (und das vergißt man doch allzu gerne)!

4. *Division* von Dezimalzahlen

Was mag 1,5:2,5 bedeuten und ausgerechnet ergeben?

Auch da lassen wir uns wieder von der bereits bekannten Bruchrechnung helfen:

$$1{,}5:2{,}5 = \frac{1{,}5}{2{,}5}$$

Aber stop! Da stehen ja nun im Zähler/Nenner gar keine *natürlichen* Zahlen mehr, und sowas war doch gar nicht erlaubt!
Vorweg müssen wir also was Neues durchnehmen:

$$\frac{1{,}5}{2{,}5} \quad = \quad \frac{15}{25}$$

Erweiterung mit 10

Mit $\frac{15}{25}$ haben wir im Zähler/Nenner also doch wieder *natürliche* Zahlen, also einen der üblichen Brüche.
Halten wir also fest:

stehen im Zähler/Nenner eines Bruches *hinter dem Komma endliche Dezimalzahlen*, so lassen sich die Brüche so erweitern, daß im Zähler/Nenner *natürliche* Zahlen vorliegen, insgesamt also übliche Brüche. Ab jetzt sind im Zähler/Nenner also auch hinter dem Komma endliche Dezimalzahlen erlaubt.

Schauen wir uns damit nochmal unser Anfangsproblem an:

$$1{,}5:2{,}5 = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{15}{25} = 15:25$$

oder kurz: 1,5:2,5 = = 15:25

Wir stellen also fest: die Division von *Dezimalzahlen* läßt sich in die von *natürlichen* Zahlen überführen. Und das geht nach folgendem System:

Zwei Dezimalzahlen werden folgendermaßen dividiert: 1. man verschiebt in *beiden* zu dividierenden Dezimalzahlen das Komma solange *gleichweit* nach hinten, bis *beide* Zahlen zu *natürliche* Zahlen werden (das entspricht einer Erweiterung des *Bruchs* mit *derselben* Zehnerpotenz; oben z.B. 10) 2. man dividiert wie üblich die *natürlichen* Zahlen.

Beispiel: 17,4 : 0,0048 =
= 17 4$_{(,0)}$: 0,048 =
= 1740 $_{(,0)}$: 0,48 = insgesamt Komma in *beiden* Zahlen um 4 nach hinten
= 17400 $_{(,0)}$: 4,8 =
= 174000 $_{(,0)}$:48 $_{(,0)}$ = 3625

<u>*Zusammenfassend* zum Rechnen mit Dezimalzahlen:</u>

Addition/Subtraktion/Multiplikation/Division von *Dezimalzahlen* funktionieren exakt genauso (nach denselben Rechenverfahren) wie die von *natürlichen* Zahlen, nur daß man zusätzlich *sehr genau* auf die *Kommas* achten muß!

Bruchrechnung

Aus Platzgründen wird hier immer nur anhand *eines* konkreten Beispiels eine Regel entwickelt. Daraus folgt:

1. Beweise fehlen, denn durch ein *einziges* oder *wenige* Beispiele läßt sich nichts *allgemein* beweisen
2. *ein* Beispiel kann vielleicht einen Sachverhalt *veranschaulichen*, aber keine *Übung* an *vielen* Beispielen ersetzen.

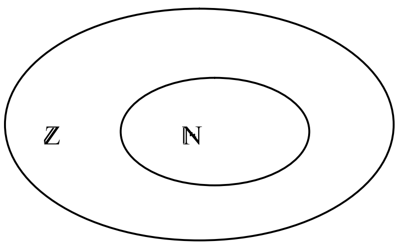
Die Übungsbeispiele kann man sich aber in beliebiger Anzahl selbst erstellen, indem man beliebige Brüche addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, und zwar immer aufs Neue und solange, bis man's im Schlaf kann.

a) Was sind Brüche?

Schauen wir dazu kurz in die Mathematikgeschichte zurück: wenn man Gegenstände abzählt, kommt man schnell zu den Zahlen 1, 2, 3, 4 usw. Weil sie so naheliegend sind und man sich gar keine anderen Zahlen vorstellen konnte, hat man sie einfach als "natürliche" Zahlen oder auch als Menge $\mathbb{N}$ bezeichnet. Wie wir sehen werden, hat man später feststellen müssen, daß es doch noch andere Zahlen gibt, die man aber "unnatürlich" fand (genau genommen war es allerdings so, daß man die natürlichen Zahlen erst so genannt hat, als man feststellen mußte, daß es auch noch andere [die "unnatürlichen"] gibt).

Es gibt ein schönes Beispiel dafür, wie man die "unnatürlichen" Zahlen entdeckt haben könnte: ein englischer Physiker namens Fahrenheit (1686-1736) wollte mal den Nullpunkt des Thermometers festlegen und benutzte dazu nicht wie Celsius den Gefrierpunkt von Wasser, sondern die tiefste Temperatur, die er jemals *erlebt* hatte. Kaum hatte er das passende Thermometer angefertigt, fiel die Temperatur *noch* tiefer. Was tun? Entweder mußte Fahrenheit seinem Thermometer einen *neuen*, tieferen Nullpunkt verpassen - oder "negative" Gradstriche unterhalb des Nullpunktes einführen. Ersteres schied aus, denn dann hätte Fahrenheit ja jedesmal, wenn es noch kälter wurde, sein Thermometer neu einstellen müssen. Also ließ er auch "negative" Grade zu. So gibt es in der Menge der "ganzen" Zahlen nicht nur die positiven Zahlen 1, 2, 3, 4 usw., sondern immer auch ihre *Gegenzahlen* -1, -2, -3, -4 usw. "Ganz" wurden diese Zahlen später genannt, weil sie (nach Kürzen) nicht "gebrochen", also keine Brüche sind.

Wir sprechen auch kurz von der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, wobei $\mathbb{Z} = \{0;\ 1;\ -1;\ 2;\ -2\ ...\}$ ist. Daran sieht man schon, daß $\mathbb{N}$ eine *Teil*menge von $\mathbb{Z}$ ist, denn jede Zahl aus $\mathbb{N}$ kommt auch in $\mathbb{Z}$ vor. Die Umkehrung gilt *nicht*: -2 ist in $\mathbb{Z}$, aber nicht in .



Glücklicherweise gelten für die natürlichen und die ganzen Zahlen die gleichen Rechenregeln (man muß sich nur mit Vorzeichen auskennen).

Wer dann allerdings meinte, endgültige *alle* Zahlen zu kennen, war bald wieder blamiert (merke: man sollte niemals behaupten, daß man bereits *alles* weiß). Schon bald fand man nämlich die *Bruch*zahlen, die man sofort wieder "rationale" Zahlen taufte, weil man meinte, diese Zahlen seien rational = vernünftig und alle anderen Zahlen seien irrational = unvernünftig. Hier sei nur erwähnt, daß sich auch das wieder als Irrtum herausgestellt hat:

es gibt tatsächlich noch andere als rationale Zahlen (z.B. - wie man in der 9. Klasse lernt - die "Wurzel aus 2").
Mit diesen Bruchzahlen bzw. "rationalen Zahlen" wollen wir uns im folgenden beschäftigen.
Wenn man einen Kuchen an zwei Personen verteilt (wobei jede gleichviel bekommt), so bekommt zwar jeder *ein* Kuchenstückchen, aber keinen *ganzen* Kuchen mehr. Nun interessiert es uns reichlich wenig, wieviele Kuchenstückchen jeder von beiden bekommt (natürlich eins), sondern wieviel vom *Gesamt*kuchen. Jeder von beiden bekommt nun mehr als 0 (gar nichts) und weniger als 1 Kuchen. Wir brauchen also eine Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt.
Das kann aber keine natürliche oder ganze Zahl sein (also aus $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$), denn da befinden sich zwischen 0 und 1 keine weiteren Zahlen.
Offensichtlich gibt es also zwischen den natürlichen bzw. ganzen Zahlen noch eine ganze Menge *anderer* Zahlen.
Aber zurück zu unserem Kuchenproblem. Wir suchten eine Zahlenschreibweise dafür, wieviel jeder der beiden von dem Kuchen bekommt. Man hat sich dazu auf zwei Möglichkeiten geeinigt:

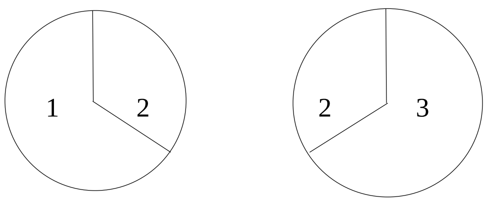
1. Entweder schreibt man einfach auf, was man da gerade *getan* hat:

   $\frac{1}{2}$ bedeutet, daß ich 1 Teil (Kuchen) an 2 Empfänger verteilt habe.

Sowas nennt man einfach auch *Bruch*, weil ja ein Kuchen in zwei Teile "zerbrochen" wurde.

2. Oder man benutzt die sogenannte "Dezimal(bruch)"-Schreibweise 0,5.
   (Von Dezimalschreibweise spricht man, wenn hinter dem *Komma* noch Zahlen auftauchen und von "Dezimal" sprechen wir, weil wir ja im Dezimal- = Zehnersystem rechnen)

Hier sei schon erwähnt, daß meistens *beide* Schreibweisen möglich sind: *fast* jede Dezimalzahl kann ich auch als Bruch schreiben und umgekehrt *jeden* Bruch als Dezimalzahl (vgl. Kapitel „Dezimalzahlen/Brüche“).
Zwei Schreibweisen hat man eingeführt, weil jede ihre Vor- und Nachteile hat. Darauf werden wir noch zurückkommen.
Teile ich eine Zahl durch eine andere Zahl, so ergibt sich als Ergebnis wiederum eine Zahl, nämlich eine Bruchzahl.
Um das genauer formulieren zu können, müssen wir noch zwei Bezeichnungen einführen. Die wollen wir aber wieder aus einem Beispiel herleiten: diesmal wollen wir *zwei* Kuchen an *drei* Personen verteilen:



Offensichtlich bekommt die 1. Person einen großen Teil des 1. Kuchens und die 3. Person einen großen Teil des 2. Kuchens. Nur bei der 2. Person ergeben sich Probleme: sie bekommt *sowohl* einen Teil des 1. *als auch* einen Teil des 2. Kuchens, und zwar $\frac{1}{3}$ vom 1. Kuchen und $\frac{1}{3}$ vom 2. Kuchen. Insgesamt bekommt sie also (wie die beiden anderen Personen auch) *zwei Drittel* bzw.

$$\frac{2}{3} = 2 \bullet \frac{1}{3}$$

Dabei ist es egal, ob die Drittel aus nur *einem* oder *beiden* Kuchen stammen: um die beiden Kuchen zu verteilen, müssen wir *jeden* von beiden erstmal in Drittel zerschneiden,

von denen jede Person dann zwei bekommt. Dabei ist es völlig schnuppe, aus *welchem* Kuchen eine Person Kuchenstückchen bekommt. Es ist durchaus - wie bei unserer zweiten Person - möglich, daß sie ein Drittel aus dem ersten und ein Drittel aus dem zweiten Kuchen bekommt.
Aus diesem Grund nennen wir die 3 im linken Bruch *unter* dem Bruchstrich *Nenner*: er *benennt* die *Größe* der *gleichen* Teile (hier Drittel), in die wir ein Ganzes zerschneiden. Die 2 *über* dem Bruchstrich heißt *Zähler*: er *zählt* die *Anzahl* der Teile (Drittel), die jede Person bekommt. Oder allgemein:

In einem Bruch $\frac{z}{n}$ nennt man die Zahl z *über* dem Bruchstrich Zähler, während man die Zahl n *unter* dem Bruchstrich *Nenner* nennt.
Der *Nenner* gibt an, in *wie viele gleich große* Teile ein Ganzes zerlegt wird.
Der *Zähler* gibt an, *wie viele von diesen Teilen* zusammengefaßt werden.

Beispiel: 7 Kuchen sollen an 9 Personen verteilt werden. Dann bekommt jede der Personen $\frac{7}{9}$, und das bedeutet: ich zerteile jeden einzelnen Kuchen in *Neuntel* und gebe jeder Person davon *sieben* Stück.
Mit den neuen Bezeichnungen können wir nun ganz korrekt definieren, was wir unter Bruchzahlen verstehen wollen:

Bruchzahlen oder auch "rationale" Zahlen (Mengenbezeichnung $\mathbb{Q}$) nennen wir all diejenigen Zahlen, die sich als $\frac{z}{n}$ schreiben lassen, wobei der Zähler z und der Nenner n *ganze* Zahlen sein müssen.

(Im folgenden werden wir sogar für Zähler und Nenner nur *natürliche* Zahlen verwenden.)
Lebenswichtige Ausnahme: im Nenner darf *keine Null* stehen, denn durch Null kann man nicht teilen!!! (Beim Versuch, durch Null zu teilen, muß einem regelmäßig vor Schrecken das Gebiß rausfallen)

Warum darf man niemals durch Null teilen?: angenommen ich habe einen Kuchen und möchte ihn an *niemanden* (= 0 Personen) verteilen. Mathematisch ausgedrückt: $\frac{1}{0}$
Das ist schlichtweg blödsinnig, weil der Kuchen ja irgendwo bleiben muß. Wenn ich ihn nämlich an niemanden verteile, bleibt er bei mir. Und dann habe ich ihn ja *doch* an jemanden verteilt, nämlich an *mich*.

Beispiele: $\frac{7}{9}$ ist eine Bruchzahl, weil der Zähler (7) und der Nenner (9) *ganze* Zahlen sind.

$\frac{4{,}1}{3{,}9}$ ist (vorerst) *keine* Bruchzahl, da im Zähler und Nenner keine *ganzen* Zahlen stehen.

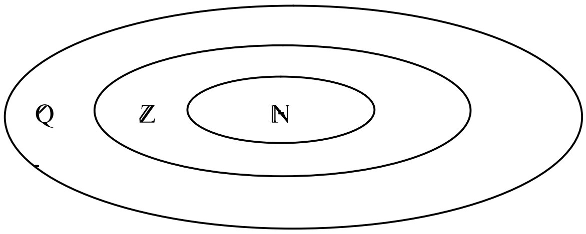
(vorweg: durch Erweiterung mit 10 erhält man $\frac{41}{39}$, und das ist *doch* ein Bruch)

Wir hatten oben schon festgestellt, daß die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) eine Teilmenge der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) sind. Schauen wir uns nun deren Verhältnis zu den rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) an: ich nehme eine beliebige Zahl aus $\mathbb{Z}$, z.B. 3. Nun kann ich 3 auch schreiben als $\frac{3}{1}$, also als Bruch. Daraus folgt: jede Zahl aus $\mathbb{Z}$ ist auch als Bruch schreibbar und somit auch eine rationale Zahl bzw. aus $\mathbb{Q}$. .

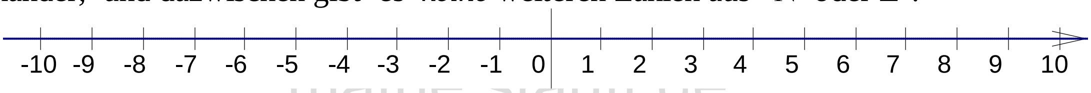
Die Umkehrung gilt wieder *nicht*: so ist z.B. $\frac{1}{2}$ ein Bruch, aber sicherlich *keine ganze* Zahl.

Insgesamt können wir also folgern:

$$\mathbb{N} \underset{\text{Teilmenge von}}{\subset} \mathbb{Z} \underset{\text{Teilmenge von}}{\subset} \mathbb{Q}$$



Stellt man $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ auf dem Zahlenstrahl dar, so liegen die Zahlen im Abstand 1 zueinander, und dazwischen gibt es *keine* weiteren Zahlen aus $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$:



Bei $\mathbb{Q}$ ist das ganz anders: die Zahlen aus $\mathbb{Q}$ liegen auf dem Zahlenstrahl *unendlich dicht* nebeneinander. Wollte man alle einzeichnen, so ginge das nur mit einem durchgehenden Strich (wir werden allerdings in der 9. Klasse noch lernen, daß es dazwischen *dennoch* klitzekleine *Lücken* [die irrationalen Zahlen] gibt). Damit ist deutlich: zwar gibt es schon *unendlich viele* natürliche/ganze Zahlen, aber noch sehr viel *mehr* rationale Zahlen (denn wir wissen ja bereits: in $\mathbb{Q}$ sind alle Zahlen aus $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ enthalten, aber noch sehr viel mehr). Damit aber ist klar, daß in einer Matheaufgabe viel eher Brüche als natürliche/ganze Zahlen auftauchen werden. Und daraus wiederum folgt, daß man sehr gut mit Brüchen rechnen können muß.

b) Erweitern und Kürzen

8 Kuchen sollen an 4 Personen verteilt werden. Dann bekommt jede Person $\frac{8}{4}$ Kuchen. Das ist offensichtlich Kuchen. Das ist offensichtlich dasselbe, als wenn ich gleich jeder der Personen *zwei ganze* Kuchen gebe. Also gilt:

$$\frac{8}{4} = 2 = \frac{2}{1} \text{ bzw. } \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

Also können Brüche, die völlig unterschiedlich *aussehen*, doch *gleich* sein (ein und dieselbe Zahl). Die Frage ist, wie man diese Gleichheit *rausbekommen* kann. Am Beispiel sehen wir: teile ich den *Zähler* 8 des *linken* Bruchs durch 4, so erhalte ich den *Zähler* 2 des *rechten* Bruchs. Gleiches gilt für die *Nenner*: teile ich den *Nenner* 4 des *linken* Bruchs ebenfalls durch 4, so erhalte ich den *Nenner* 1 des *rechten* Bruchs:

$$\frac{8}{4} \xrightarrow[:4]{:4} \frac{2}{1}$$

Damit können wir schon eine Regel aufstellen:

Ein Bruch wird *gekürzt*, indem man den *ganzen Zähler* und den *ganzen Nenner* durch *dieselbe* Zahl *teilt*. Dabei verändert sich nicht der *Wert* des Bruches.
Oder hübsch mathematisch:
$\frac{z}{n} = \frac{z:p}{n:p}$, wobei p ungleich Null (denn durch Null darf man nicht teilen).

Im obigen Beispiel können wir auch umgekehrt vorgehen: indem wir *Zähler und Nenner* des *rechten* Bruchs mit 4 *multiplizieren*, ergibt sich der linke Bruch:

$$\frac{8}{4} \xleftarrow[\bullet 4]{\bullet 4} \frac{2}{1}$$

Damit haben wir schon die nächste Regel:

Ein Bruch wird *erweitert*, indem man den *ganzen Zähler* und den *ganzen Nenner* mit der *gleichen* Zahl *multipliziert*. Dabei verändert sich nicht der *Wert* des Bruchs.
Oder hübsch mathematisch:
$\frac{z}{n} = \frac{z \bullet p}{n \bullet p}$, wobei p ungleich Null (sonst wird der Nenner Null, also durch Null geteilt)

Wichtig!:
1. Zähler <u>und</u> Nenner müssen *dividiert/multipliziert* werden.
2. Zähler und Nenner müssen mit *derselben* Zahl multipliziert/durch die gleiche Zahl dividiert werden.
3. der *ganze* Zähler bzw. *ganze* Nenner muß mit der Zahl multipliziert/durch sie dividiert werden.

Um den Sinn dieser Forderung zu zeigen, müssen wir ein etwas schwierigeres Beispiel wählen: gegeben

sei der Bruch $\frac{6+9}{3} = \frac{15}{3} = 5$

Angenommen, ich möchte den *linken* Bruch durch 3 kürzen und teile dazu im Zähler *nur die 6* durch 3
und im Nenner die 3 durch 3. Dann ergäbe sich

$$\frac{6+9}{3} = \frac{2+9}{1} = \frac{11}{1} = 11$$

Das aber ist offensichtlich *falsch*, nämlich ungleich 5. Der Fehler lag offensichtlich darin, daß ich nicht den *gesamten* Zähler (incl. der 9), sondern nur einen *Teil* (nämlich die 6)

durch 3 geteilt habe. Im Zähler stand eine *Summe*, und davon darf man offensichtlich nicht nur *Teile* kürzen. Daher sagt man als Merkregel auch flapsig: "Kürzen aus Summen (und Differenzen) tun nur die Dummen". (Ein sehr beliebter Schülerfehler)
Anders steht es mit *Produkten*: teile ich in

$\frac{2 \bullet 6}{2} = \frac{12}{2} = 6$ den *linken* Bruch oben *und* unten durch 2, so ergibt sich $\frac{6}{1} = 6$, und das ist *richtig*.

Diagonales Kürzen von Brüchen:

Ein Beispiel:

$$\frac{45}{56} \bullet \frac{21}{55} \overset{\text{Bruchmultiplikation}}{=} \frac{45 \bullet 21}{56 \bullet 55} \overset{\text{Kommutativgesetz im Zähler}}{=} \frac{21 \bullet 45}{56 \bullet 55} \overset{\text{Bruchmultiplikation}}{=} \frac{21}{56} \bullet \frac{45}{55} \overset{\text{Kürzen des 1. Bruchs durch 7, des zweiten durch 5}}{=} \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{9}{\cancel{56}}} \bullet \frac{\overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{11}{\cancel{55}}} = \frac{3}{8} \bullet \frac{9}{11} \overset{\text{Bruchmultiplikation}}{=} \frac{3 \bullet 9}{8 \bullet 11} \overset{\text{Multiplikation im Zähler bzw. Nenner}}{=} \frac{27}{88}$$

Kürzer:

$$\frac{45}{56} \bullet \frac{21}{55} = \frac{45 \bullet 21}{56 \bullet 55} = \frac{45 \bullet 21}{56 \bullet 55} = \frac{\overset{9}{\cancel{45}} \bullet \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{8}{\cancel{56}} \bullet \underset{11}{\cancel{55}}} = \frac{9 \bullet 3}{8 \bullet 11} = \frac{27}{88}$$

Diagonales Kürzen durch 5 bzw. 7

Vorsicht: dieses diagonale Kürzen funktioniert *nur* bei *reiner* Multiplikation im Zähler und Nenner! Es funktioniert *nicht*, wenn im Zähler und/oder Nenner *Plus*- bzw. *Minus*zeichen auftauchen!

c) Größe von Brüchen

Wir hatten oben sowohl die Bruch- als auch die Dezimalbruchschreibweise eingeführt, und es war schon angedeutet worden, daß beide jeweils Vor- und Nachteile haben. Mit einem besonderen Nachteil der *Bruch*schreibweise wollen wir uns im folgenden beschäftigen (auf den Nachteil der Dezimalbruchschreibweise werden wir noch später kommen):
Brüche sind manchmal arg unübersichtlich: man ahnt oftmals kaum ihre *Größenordnung*. So hatten wir z.B. gesehen, daß $\frac{8}{4}$ dasselbe ist wie $\frac{2}{1}$ bzw. 2. Was 2 ist, weiß nun jeder, aber bei $\frac{8}{4}$ ist es *nicht* auf Anhieb klar, wie groß diese Zahl ist. Oder wer sieht schon, daß $\frac{329}{19}$ die ganz einfache Zahl 17 ist? Oder: ist $\frac{7839}{4122}$ eigentlich eine große oder kleine Zahl? Hier sieht

man nebenbei schon den Vorteil der *Dezimal*schreibweise: $\frac{7839}{4122}$ ist in Dezimalschreibweise ungefähr 1,9 bzw. fast 2. Darunter kann sich jeder sofort was vorstellen. Noch ein Beispiel: hättest Du von einem leckeren Kuchen lieber $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$? Um die Größenordnung eines Bruches zu erahnen, reicht es oftmals, nur eine *ungefähre* Vorstellung zu haben. Da muß man sich mit *Abschätzungen* zu helfen wissen. So ist z.B. $\frac{1001}{502}$ fast dasselbe wie $\frac{1000}{500} = 2$.
Kleine Vorbemerkung:

alle folgenden Überlegungen beziehen sich erstmal nur auf Brüche, bei denen Zähler *und* Nenner *positiv* sind.

Ist der Zähler *größer* als der Nenner, so ist die Zahl *größer* als 1.

Z.B. $\frac{5}{4} = 1{,}25$. Verteile ich 5 Kuchen auf 4 Leute, so bekommt jeder ein bißchen *mehr* als einen Kuchen.

Ist der Zähler *kleiner* als der Nenner, so ist die Zahl *kleiner* als 1.

Z.B. $\frac{4}{5} = 0{,}8$. Verteile ich 4 Kuchen auf 5 Leute, so bekommt jeder ein bißchen *weniger* als einen Kuchen.

An den Beispielen $\frac{5}{4} = 1{,}25$ und $\frac{4}{5} = 0{,}8$ sieht man schon:

Zähler und Nenner sind *nicht austauschbar,* die Division ist *nicht kommutativ*.

Oftmals interessiert es einen auch, wie sich zwei Brüche *zueinander* verhalten. Ist also z.B. $\frac{2}{5}$ kleiner oder größer als $\frac{3}{5}$? In beiden Fällen ist offensichtlich ein Kuchen in 5 Stücke zerschnitten worden, von denen ich entweder 2 oder 3 bekomme. Offensichtlich bekomme ich mehr, wenn ich 3 Stücke erhalte. Die
Merkregel lautet deshalb:

(A) Haben zwei Brüche den *gleichen Nenner*, so ist der mit dem *größeren* Zähler *größer* als der mit dem *kleineren*.

Benutzt man das Zeichen < in der Bedeutung "kleiner als", so gilt also z.B.:
$\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{5}{5} < \frac{6}{5} \ldots$, aber ebenso $\frac{2}{37} < \frac{3}{37} < \ldots < \frac{39}{37} < \ldots < \frac{503}{37}$.
Nun gehen wir umgekehrt vor: was passiert bei *gleichem Zähler* und *sich veränderndem Nenner*? Ist z.B. $\frac{1}{4}$ größer oder kleiner als $\frac{1}{5}$? Machen wir uns das wieder an einem

Kuchen klar: offensichtlich bekomme ich mehr, wenn der Kuchen nur an *vier* Personen verteilt wird als wenn er auf 5 verteilt wird. Also ist $\frac{1}{4}$ *größer* als $\frac{1}{5}$, und wir können als Merkregel aufstellen:

(B)
Haben zwei Brüche den *gleichen Zähler*, so ist der mit dem *kleineren* Nenner *größer* als der mit dem *größeren*.

Benutzt man das Zeichen > in der Bedeutung "größer als", so gilt also z.B.:
$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} \ldots$, aber ebenso $\frac{37}{2} > \frac{37}{3} > \ldots > \frac{37}{39} > \ldots > \frac{37}{503}$

Bevor wir nun aber zum Vergleich zweier Brüche kommen, bei denen *weder* Zähler *noch* Nenner gleich sind, schauen wir uns noch ein besonderes Verfahren an: gegeben seien die beiden einfachen Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$. Viertel und Sechstel zu vergleichen ist aber nun fast so, als sollte man einen Supercomputer mit einem billigen Taschenrechner vergleichen: sie haben scheinbar reichlich wenig miteinander zu tun. Unser Vergleich mit den Rechnern zeigt aber schon einen Ausweg: Supercomputer und Taschenrechner sehen zwar völlig verschieden aus, bestehen aber im Prinzip aus den gleichen Untereinheiten, nämlich sogenannten Chips, nur daß der Supercomputer *massenhaft* solcher Chips enthält, während der Taschenrechner mit *einem* oder ganz *wenigen* auskommt. Entsprechend können wir uns fragen, ob es eine *Untereinheit* gibt, die *sowohl* in $\frac{1}{4}$ *als auch* in $\frac{1}{6}$ vorkommt, nur eben verschieden *oft*.

Das Problem bei $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ besteht doch darin, daß sie verschiedene *Nenner* haben. Schön wäre es, wenn wir es erreichen könnten, beide Brüche so umzuschreiben, daß sie den *gleichen* Nenner haben (solch einen gemeinsamen Nenner zweier Brüche nennen wir auch "Hauptnenner"). Dann können wir mit (A) einfach entscheiden, welcher größer ist. Wenn wir uns nun an die Erweiterung erinnern, so lautet die Frage: können wir $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ jeweils so erweitern, daß beide hinterher den *gleichen* Nenner haben? Gesucht ist also eine Zahl, die sowohl Vielfaches von 4 als auch Vielfaches von 6 ist. Dazu gibt es zwei besonders einfache Möglichkeiten:

1. man sucht das *kleinste gemeinsame Vielfache* von 4 und 6, und das ist 12, also das Dreifache von 4 bzw. das Doppelte von 6. (Die Methode, solch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches zu *finden*, soll hier nicht erklärt werden.)
2. man multipliziert einfach 4 und 6 miteinander und erhält 24, also das Sechsfache von 4 bzw. das Vierfache von 6.

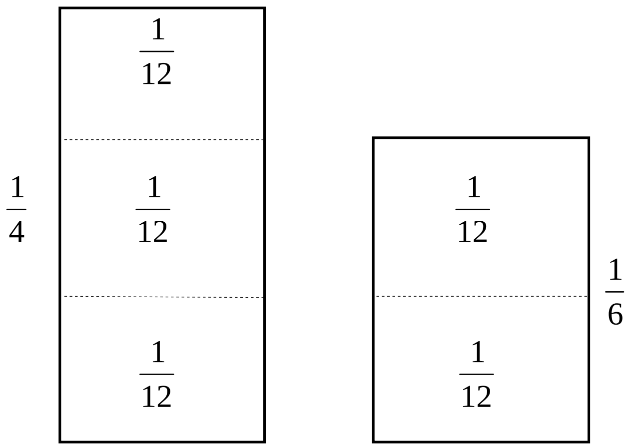
Mit 1. nehmen wir hier mal 12 als Hauptnenner. Um $\frac{1}{4}$ mit dem neuen Hauptnenner 12 zu erhalten, müssen wir (wie immer oben *und* unten) mit 3 erweitern, also

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \bullet 3}{4 \bullet 3} = \frac{3}{12}$$

Entsprechend müssen wir $\frac{1}{6}$ mit 2 erweitern, um den neuen Hauptnenner 12 zu erhalten:

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \bullet 2}{6 \bullet 2} = \frac{2}{12}$$

Insgesamt haben wir also tatsächlich eine Untereinheit gefunden, die sowohl in $\frac{1}{4}$ als auch in $\frac{1}{6}$ vorkommt, nämlich das *Zwölftel*. In $\frac{1}{4}$ kommt es *dreimal*, in $\frac{1}{6}$ *zweimal* vor. Also ist $\frac{1}{4}$ nach (A) *größer* als $\frac{1}{6}$.



Mit diesem Hauptnenner-Verfahren können wir uns nun auch dem Vergleich von Brüchen zuwenden, bei denen *weder* Zähler *noch* Nenner gleich sind. Dazu schauen wir uns nochmal das Beispiel oben an, ob man lieber $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ eines Kuchens hat, ob also $\frac{2}{3}$ *größer* oder *kleiner* als $\frac{3}{4}$ ist. Hauptnenner von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ ist z.B. 12, denn das ist das Vierfache des 1. Nenners (also von 3) und das Dreifache des 2. Nenners (also von 4). Wir müssen also $\frac{2}{3}$ mit 4 erweitern und $\frac{3}{4}$ mit 3 und erhalten

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \bullet 4}{3 \bullet 4} = \frac{8}{12} \text{ bzw. } \frac{3}{4} = \frac{3 \bullet 3}{4 \bullet 3} = \frac{9}{12}$$

(Nebenbei: wir haben wieder $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ in *gleichgroße* Untereinheiten, nämlich *Zwölftel* zerlegt.)

Insgesamt folgt also

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \underset{\text{mit (A)}}{<} \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{bzw. kurz} \quad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

Oftmals interessiert einen allerdings überhaupt nicht, welche *Größenordnung* ein Bruch hat. Z.B. mit $\frac{5}{82}$ kann ich wochenlang rechnen (addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren), ohne auch nur einen blassen Schimmer von seiner Größenordnung zu haben.

d) Bruchaddition

Nachdem Erwin $\frac{2}{3}$ Kuchen gegessen hat, hat er noch immer Hunger und ißt deshalb nochmals $\frac{3}{4}$ Kuchen.

Wieviel hat er dann insgesamt gegessen? Dazu müssen wir 2/3 und 3/4 addieren, also $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ rechnen.
Wieder besteht das Problem darin, daß wir scheinbar unvergleichbare Teile zueinander addieren sollen. Aber wir kennen ja schon das Verfahren, mittels *Erweiterung* beider Brüche auf einen *Hauptnenner* zu bringen. Hauptnenner ist hier z.B. wieder 12. Also müssen wir den ersten Bruch mit 4, den zweiten mit 3 erweitern und erhalten:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \bullet 4}{3 \bullet 4} + \frac{3 \bullet 3}{4 \bullet 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12}$$

Die letzte Addition ist aber ganz einfach: wenn ich erst 8 Zwölftel gegessen habe und dann nochmal 9 Zwölftel, so habe ich insgesamt 8 + 9 = 17 Zwölftel gegessen. Ich kann also oben weiterrechnen:

$$\ldots = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$$

Daraus können wir als allgemeine Merkregel herleiten:

Zwei Brüche werden *addiert*, indem man sie
1. mittels Erweitern auf einen gemeinsamen *Hauptnenner* bringt und dann
2. die neuen *Zähler addiert* und
3. den Haupt*nenner* unverändert *beibehält*.
   (haben beide Brüche schon den gleichen Nenner, so fällt 1. natürlich weg)

Im Grunde verwandelt sich also die *Bruch*addition in eine ganz einfache *Zähler*addition. Die Zähler sind aber ganz gewöhnliche *natürliche* Zahlen, und die können wir seit langem addieren.

Vorsicht: *nicht* auch die Nenner addieren!

e) Bruchsubtraktion

Erwin hat sich ganz voreilig $\frac{3}{4}$ des Kuchens geschnappt, muß aber auf Anweisung seiner Mutter schleunigst $\frac{2}{3}$ des *Gesamt*kuchens (also nicht nur von seinem Teil) zurückgeben.

Wieviel behält er dann? Dazu müssen wir 3/4 und 2/3 subtrahieren, also $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ rechnen.

Wir verfahren genauso wie bei der Addition, suchen also zuerst wieder den *Hauptnenner*. Auch hier ist er wieder 12, d.h., daß wir den ersten Bruch mit 3, den zweiten mit 4 erweitern müssen:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3 \bullet 3}{4 \bullet 3} - \frac{2 \bullet 4}{3 \bullet 4} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12}$$

Die letzte Subtraktion ist aber wieder ganz einfach: wenn ich erst 9 Zwölftel nehme und dann 8 Zwölftel zurückgeben muß, so behalte ich 9 - 8 = 1 Zwölftel. Ich kann also oben weiterrechnen:

$$\ldots = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}$$

Daraus können wir als allgemeine Merkregel herleiten:

Zwei Brüche werden *subtrahiert*, indem man sie
1. mittels Erweitern auf einen gemeinsamen *Hauptnenner* bringt und dann
2. die neuen *Zähler* subtrahiert und
3. den Haupt*nenner* unverändert *beibehält*.
(haben beide Brüche schon den gleichen Nenner, so fällt 1. natürlich weg)
Im Grunde verwandelt sich also die *Bruch*subtraktion in eine ganz einfache *Zähler*subtraktion. Die Zähler sind aber ganz gewöhnliche natürliche Zahlen, und die können wir seit langem subtrahieren.
Vorsicht: *nicht* auch die Nenner subtrahieren!

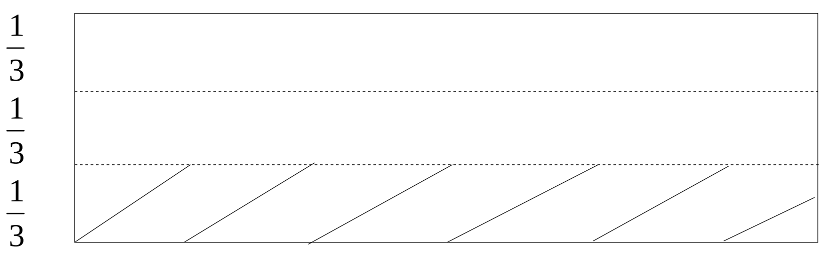
f) Bruchmultiplikation

Diesmal hat Erwin $\frac{1}{3}$ des Kuchens stibitzt, und er soll $\frac{1}{5}$ zurückgeben. Seine Mutter verlangt aber nicht, daß er $\frac{1}{5}$ des *Gesamt*kuchens zurückgibt, sondern er soll $\frac{1}{5}$ von seinem geklauten *Teil*, also von $\frac{1}{3}$ zurückgeben. Die Frage ist: wieviel vom *Gesamt*kuchen gibt er dann zurück (und wieviel vom Gesamtkuchen darf er behalten)?
Das ist offensichtlich eine Bruch*multiplikation*: Erwin soll nicht das Doppelte bzw. 2-fache seines Kuchenteils abgeben (das wäre $2 \cdot \frac{1}{3}$), sondern das $\frac{1}{5}$-fache seines $\frac{1}{3}$.

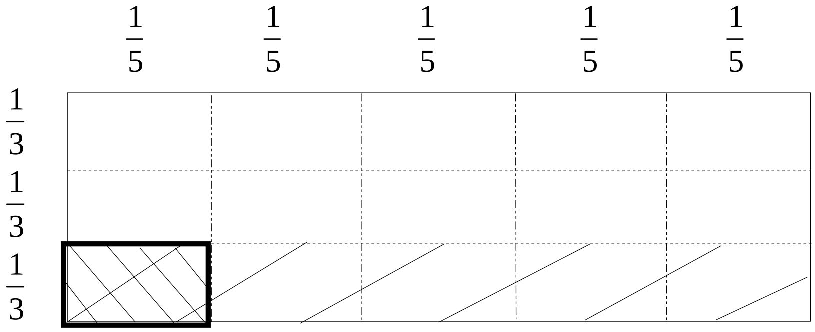
Gesucht ist also das Ergebnis von

$$\frac{1}{5} \bullet \frac{1}{3}$$

Um das zeichnerisch anschaulich zu machen, stellen wir den Kuchen ausnahmsweise mal rechteckig dar. Den Teil, den Erwin geklaut hat, schraffieren wir so:



Von dem nun schraffierten Stück soll Erwin 1/5 zurückgeben. Dieses Zurückzugebende schraffieren wir so:



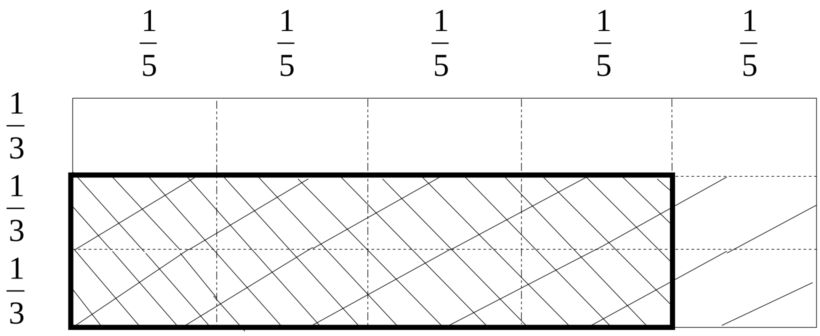
Insgesamt sind wir folgendermaßen vorgegangen: wir haben den Kuchen erst waagerecht gedrittelt und jedes dieser Drittel nochmals senkrecht gefünftelt. Erst besteht der Kuchen also aus drei Teilen, und wenn ich jedes dieser Teile nochmals in fünf Teile zerlege, habe ich den Kuchen insgesamt in $3 \cdot 5 = 15$ Teile zerlegt. Das Ergebnis ist also $\frac{1}{15}$:

$$\frac{1}{5} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Halten wir sofort fest:
(A) der neue *Nenner* ergab sich als *Produkt* der beiden alten Nenner.
Nun wollen wir die Aufgabe leicht verändern: Erwin hat *zwei* Drittel stibitzt, und er soll davon *vier* Fünftel zurückgeben.
Gesucht ist also das Ergebnis von

$$\frac{4}{5} \bullet \frac{2}{3}$$

Zeichnerisch ergibt sich:



Rechnerisch können wir folgendermaßen vorgehen: Erwin hat das Doppelte von oben geklaut, und er muß davon im Vergleich mit oben das Vierfache zurückgeben. Also muß er insgesamt

$2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2 \bullet 4}{15} = \frac{8}{15}$ zurückgeben.

Ergebnis von oben

Wieder halten wir fest:
(B) der neue *Zähler* ergab sich als *Produkt* der beiden alten Zähler.
Mit (A) und (B) zusammen können wir als allgemeine Merkregel aufstellen:

Zwei Brüche werden miteinander *multipliziert*, indem man

1. die *Zähler miteinander multipliziert* und
2. die *Nenner miteinander multipliziert* und
3. die Ergebnisse von 1. durch das von 2. dividiert

$$\frac{m}{n} \bullet \frac{p}{q} = \frac{m \bullet p}{n \bullet q}$$

Im Vergleich mit der Bruchaddition und Bruchsubtraktion fällt auf:

a) man muß bei der Bruchmultiplikation vorher *nicht* auf einen Hauptnenner bringen: der ergibt sich bei der Bruchmultiplikation ganz *automatisch*.

b) Im Grunde verwandelt sich also die *Bruch*multiplikation in eine ganz einfache *Zähler- und Nenner*multiplikation. Die Multiplikation verlagert sich also - im Gegensatz zur Addition und Subtraktion - nicht nur in den *Zähler*, sondern auch in den *Nenner*. Zähler und Nenner sind aber ganz gewöhnliche natürliche Zahlen, und die können wir seit langem miteinander multiplizieren.

g) Bruchdivision

Wie für *ganze* Zahlen soll auch für *Brüche* gelten: teilt man eine Zahl (ungleich Null) durch sich selbst, so kommt 1 heraus, also $x : x = 1$

Ist nun $x = \frac{a}{b}$ --- , so bedeutet das $\frac{a}{b} \boxed{: \frac{a}{b}} = 1$ (A)

Mit der Bruch*multiplikation* können wir schon berechnen:

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{b}{a} = \frac{a \bullet b}{b \bullet a} = \frac{a \bullet b}{a \bullet b} = 1 \text{ oder kurz } \frac{a}{b} \boxed{\bullet \frac{b}{a}} = 1 \quad \text{(B)}$$

Vergleicht man nun (A) mit (B), so bemerkt man anhand des Umrahmten:

(C) die *Multiplikation* mit $\frac{b}{a}$ bewirkt das gleiche wie die *Division durch* $\frac{a}{b}$

$\frac{b}{a}$ nennt man auch "Kehrwert" von $\frac{a}{b}$ und erhält man, indem man Zähler und Nenner *vertauscht*.

Damit lautet (C) allgemein:

Ein 1. Bruch wird durch einen 2. Bruch *dividiert*, indem man den 1. Bruch mit dem *Kehrwert* des 2. Bruchs *multipliziert*.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c}$$

Merke:

1. die Bruch*division* ist also durch eine Bruch*multiplikation* ersetzbar, und die beherrschen wir ja schon;
2. nur vom *zweiten* Bruch, durch den geteilt wird, wird der Kehrwert genommen, *nicht* aber vom ersten Bruch;
3. c muß *ungleich* Null sein, da sonst durch Null geteilt wird.

Beispiele: 1. $\frac{4}{3}:\frac{5}{7}=\frac{4}{3}\bullet\frac{7}{5}=\frac{4\bullet 7}{3\bullet 5}=\frac{28}{15}$

2. $3:\frac{5}{7}=\frac{3}{1}:\frac{5}{7}=\frac{3}{1}\bullet\frac{7}{5}=\frac{3\bullet 7}{1\bullet 5}=\frac{21}{5}$

3. $\frac{5}{7}:3=\frac{5}{7}:\frac{3}{1}=\frac{5}{7}\bullet\frac{1}{3}=\frac{5\bullet 1}{7\bullet 3}=\frac{5}{21}$

Anmerkung: z.B. $\frac{4}{3}:\frac{5}{7}$ kann man auch als *Doppelbruch* $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{7}}$ schreiben. Damit wird dann genauso gerechnet wie in 1.

Aber Vorsicht!: man mache den Hauptbruchstrich in der Mitte *erheblich* länger als die beiden Bruchstriche oben und und unten, weil sonst unklar bleibt, daß der *gesamte* obere Bruch durch den *gesamten* unteren Bruch geteilt wird. Wenn das nicht klar ist, kann es zu schlimmen Fehlern kommen.

Z.B.: Was ist mit

$\begin{array}{c}36\\ \hline 6\\ \hline 3\end{array}$ gemeint? $\dfrac{\frac{36}{6}}{3}$ oder $\dfrac{36}{\frac{6}{3}}$?

Denn es gilt

$$\dfrac{\frac{36}{6}}{3}=\dfrac{6}{3}=2 \quad \text{und} \quad \dfrac{36}{\frac{6}{3}}=\dfrac{36}{2}=18$$

Es ist also offensichtlich *nicht* schnuppe, was der Hauptbruchstrich ist, sondern es kommen *völlig* unterschiedliche Ergebnisse raus.

Man gewöhne sich früh an: Gleichheitszeichen gehören auf die Höhe des *Haupt*bruchstrichs, und die Rechnungen von Unterbruchstrichen werden immer vor denen von Überbruchstrichen bearbeitet.

Teilbarkeit

Eine *ganze* Zahl a nennt man "glatt" durch x teilbar, wenn das *Ergebnis* von a:x wieder eine *ganze* Zahl ist.

Eine ganze Zahl ist glatt teilbar durch
a) 2, wenn die *Endziffer* durch 2 teilbar, also "gerade" (0, 2, 4, 6, 8) ist
b) durch 3, wenn auch ihre *Quersumme* (die Summe all ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist

c) durch 4, wenn ihre Hälfte durch 2 teilbar ist
d) durch 5, wenn ihre *Endziffer* eine 0 oder eine 5 ist
e) durch 6, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist
f) durch 10, wenn ihre Endziffer eine 0 ist (zum Teilen läßt man dann einfach die letzte 0 weg).

Abschätzen von Brüchen/Überschlagsrechnung

"Überschlagen" hat hier nicht dieselbe Bedeutung wie etwa, wenn sich ein Auto in einer Kurve überschlägt. Vielmehr besagt es, daß man kurz mal durch *Rundung* abschätzt, welchen Wert ein Bruch *ungefähr* annimmt. Wohlgemerkt: dabei kommt natürlich nicht der *exakte* Wert raus, sondern nur ein *ungefährer*, der einem klarmacht, welche *Größenordnung* der Bruch hat. Dazu ein Beispiel:

$$\frac{9 \bullet 21 + \frac{52}{97}}{33} \quad \text{(A)}$$

Wir beginnen mit 9•21. 9 liegt sehr nahe an 10, also kann der Fehler nicht allzu groß sein, wenn wir stattdessen <u>10</u>•21 rechnen. Das nun aber kann jeder (210). Aber weil wir bei 10 mit *zu viel* multipliziert haben, können wir den Fehler teilweise dadurch korrigieren, daß wir nicht mit 21, sondern mit der sehr nahe dadranliegenden Zahl *20*, also einer *zu kleinen* Zahl multiplizieren. Also gilt:

$$9 \bullet 21 \approx 10 \bullet 20 = 200 \qquad \text{(B)}$$

Wir können schonmal festhalten: in Wirklichkeit ist 9•21 = 189. Wenn wir also durch Rundung laut (B) 200 erhalten, so beträgt der Fehler nur 11 bzw. ca. 6 % von 189.
Schauen wir uns als nächstes den Bruch 52/97 an. Viel lieber als mit 52 würden wir doch mit <u>50</u> rechnen (der Fehler beträgt dann "nur" 2 bzw. gegenüber der 52 nur ca. 4 %).
Ähnliches können wir mit dem Nenner machen: viel lieber als mit 97 rechnen wir doch mit der einfacheren Zahl <u>100</u> (wobei der Fehler nur 3 ist bzw. gegenüber der 97 nur ca. 3 %).
Wenn wir also annähern

$$\frac{52}{97} \approx \frac{50}{100}$$

so bemerken wir, daß der neue Zähler genau halb so groß ist wie der neue Nenner. Das aber galt annähernd schon bei $\frac{52}{97}$.

Wir erhalten:

$$\frac{52}{97} \approx \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \qquad \text{(C)}$$

Wir können wieder festhalten: in Wirklichkeit ist $\frac{52}{97} \approx 0{,}5360825$. Mit (C) haben wir also einen Fehler von "nur" 0,360825 gemacht, also von etwa $\frac{3}{10}$.

Schauen wir uns nun den gesamten Zähler des Ausgangsbruches an: mit (B) und (C) erhalten wir:

$$9 \bullet 21 + \frac{52}{97} \approx 200 + \frac{1}{2} = 200{,}5$$

Auch das können wir runden, indem wir $\frac{1}{2}$ einfach weglassen. Denn statt 200,5 erhalten wir dann 200, womit der Fehler nur ca. $\frac{1}{4}$% (von ca. 200) beträgt. Halten wir also fest:

$$9 \bullet 21 + \frac{52}{97} \approx 200 + \frac{1}{2} \text{ bzw. } 9 \bullet 21 + \frac{52}{97} \approx 200 \qquad \text{(D)}$$

Schauen wir uns an, wie groß der Fehler inzwischen insgesamt geworden ist. In Wirklichkeit ist

$$9 \bullet 21 + \frac{52}{97} \approx 189{,}53608.$$

Der Fehler gegenüber (D) ist also 200 - 189,53608 ≈ 10,463918, was etwa 6 % von 189,53608 sind.
Mit (D) erhalten wir für den gesamten Ausgangsbruch:

$$\frac{9 \bullet 21 + \frac{52}{97}}{33} \approx \frac{200}{33}$$

Nun ist 33 schon sehr nah an $33{,}\overline{3}$, und das ist wiederum genau ein Sechstel von 100. Also gilt

$$\frac{9 \bullet 21 + \frac{52}{97}}{33} \approx \frac{200}{33} \approx 6 \qquad \text{(E)}$$

In Wirklichkeit ist aber

$$\frac{9 \bullet 21 + \frac{52}{97}}{33} \approx 5{,}7435176$$

Unser Fehler in (E) betrug also etwa 6 - 5,7435176 = 0,2564824 oder etwas mehr 2 Zehntel bzw. etwa 4 % von 5,7435176.
Trotz mehrfacher Rundungen haben wir erstaunlicherweise gegenüber dem exakten Wert nur einen *minimalen* Fehler gemacht. Das lag unter anderem daran, daß wir nicht *wild*, sondern ganz *überlegt* gerundet haben (nämlich so, daß sich Fehler teilweise gegenseitig ausglichen).

Bei der Multiplikation 9•21 hatten wir gesehen: wenn wir 9 auf 10 *vergrößern* und 21 auf 20 *verkleinern*, gleicht sich das gegenseitig fast aus: angenommen, ein Junge bekommt 9 Monate lang 21 DM Taschengeld pro Monat, insgesamt also 9•21 DM = 189 DM. Bekommt er nun einen Monat *länger* Taschengeld (also 10 Monate lang), dafür aber pro Monat *weniger* (nämlich 20 DM), so gleicht sich das fast aus: in den ersten 9 Monaten bekommt er 9•20 DM = 180 DM, verdient also gegenüber der ersten Taschengeldregelung 189 DM - 180 DM = 9 DM zu *wenig*. Das aber macht er durch den 10. Monat wett, denn mit ihm zusammen erhält er 10•20 DM = 200 DM, also sogar 11 DM *mehr* als nach der ersten Regelung.
Halten wir also fest:

bei der Multiplikation zweier Zahlen ist die Näherung besonders gut, wenn die *eine* Zahl *vergrößert* und die *andere* *verkleinert* wird. (Gleiches gilt nebenbei für die *Addition*)

Stellt sich gleich die Frage, ob das bei der *Division* (Brüchen) genauso funktioniert. Schauen wir uns dazu ein Beispiel an, und zwar den Ausgangsbruch $\frac{5}{3}$. Wir erhöhen den Zähler um 1 und verringern gleichzeitig den Nenner um 1, erhalten also $\frac{6}{2}$. Nun ist $\frac{5}{3} \approx 1{,}6666$ und $\frac{6}{2} = 3$, der entstehende Unterschied also ganz erheblich (die Näherung ist fast doppelt so groß). Woran liegt das? Das wird schnell klar, wenn man sich eine ganz einfache Anwendung ausdenkt:

a) 5 Kuchen sollen an 3 Menschen verteilt werden. Dann erhält jeder von ihnen $\frac{5}{3}$ bzw. ungefähr 1,6666 Kuchen.

b) 6 Kuchen sollen an 2 Menschen verteilt werden. Dann erhält jeder von ihnen $\frac{6}{2} = 3$ Kuchen.

Im Fall a) werden also *weniger* Kurchen an *mehr* Menschen verteilt als im Fall b). Es ist offensichtlich, daß damit jeder Mensch in a) erheblich *weniger* bekommt als in b). Oder man könnte auch sagen: Fall a) ist erheblich ungerechter für jede der Personen.
Es deutet sich aber schon eine Lösung an: wenn überhaupt *mehr* Menschen da sind, dann muß es auch *mehr* Kuchen geben, um diese auf die Menschen zu verteilen. Oder mathematisch: wenn der *Nenner* (Menschen) *vergrößert* wird, muß auch der *Zähler* (Kuchen) *vergrößert* werden.

Eine bessere Näherung für den Ausgangsbruch $\frac{5}{3}$ wäre es also, wenn wir den Zähler um 1 *und* den Nenner um 1 vergrößern würden. Wir erhielten dann $\frac{6}{4} = 1{,}5$. Das aber liegt tatsächlich erstaunlich nah an $\frac{5}{3} \approx 1{,}6666$.

Ebenso denkbar: wenn wir *weniger* Kuchen haben, dürfen wir ihn auch nur auf *weniger* Menschen verteilen. Oder mathematisch: wenn der *Zähler* (Kuchen) *verkleinert* wird, muß auch der *Nenner* (Menschen) *verkleinert* werden: eine weitere brauchbare Näherung für den Ausgangsbruch $\frac{5}{3}$ wäre es also, wenn wir den Zähler um 1 *und* den Nenner um 1 verkleinern würden. Wir erhielten dann $\frac{4}{2} = 2$. Auch das liegt schon relativ nah an $\frac{5}{3} \approx 1{,}6666$.
Halten wir also fest:

> bei der *Division* zweier Zahlen ist die Näherung besonders gut, wenn *beide Zahlen vergrößert* (verkleinert) werden. (Gleiches gilt nebenbei für die *Subtraktion*)

Die Regel gilt besonders bei *sehr großen* Zahlen. Angenommen also, wir wollen $\frac{97}{1998}$ berechnen. Wir vergrößern den Zähler auf 1000 *und* den Nenner auf 2000 und erhalten $\frac{1000}{2000} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. In Wirklichkeit ist $\frac{97}{1998} \approx 0{,}498999$. Der Fehler durch Näherung ist also etwa $0{,}5 - 0{,}498999 = 0{,}001001$, d.h. etwa ein Tausendstel. (Ebenso wenig bewirken leichte Rundungen bei der *Multiplikation/Addition* sehr großer Zahlen.)
Daß Rundungen bei großen Zahlen nicht viel ändern, läßt sich ebenfalls leicht veranschaulichen: ob ich nun 997 Kuchen an 1998 oder 1000 Kuchen an 2000 Personen

verteile, bleibt sich fast gleich: jeder bekommt etwa $\frac{1}{2}$ Kuchen: die paar Kuchen bzw. Esser mehr ändern kaum mehr was.

Die "Binomis"

Unter allen Termumformungen gibt es eine ganz bestimmte Art, die sich sehr vereinfachen läßt.
Erinnern wir uns dazu aber vorerst mal, wie man zwei *Klammern* miteinander multipliziert. Das geht so, daß man jeden Summanden der einen Klammer mit jedem Summanden der anderen multipliziert und diese Produkte dann aufaddiert. Oder an einem allgemeinen Beispiel:

$$(a + b)\bullet(c + d) = a\bullet c + a\bullet d + b\bullet c + b\bullet d \quad (\#)$$

Uns interessieren nun ganz besonders solche Fälle, in denen sehr *ähnliche* Klammern miteinander multipliziert werden, und zwar

1. $(a + b) \bullet (a + b)$ Die beiden Klammern sind völlig gleich; zwischen den Zahlen a und b steht ein *Plus*zeichen.
2. $(a - b) \bullet (a - b)$ Wieder sind die Klammern völlig gleich, nur steht jetzt zwischen den Zahlen a und b ein *Minus*zeichen.
3. $(a + b) \bullet (a - b)$ Die Klammern unterscheiden sich nur dadurch, daß zwischen den Zahlen a und b einmal ein *Plus*- und einmal ein *Minus*zeichen steht.

Für 1. - 3. gilt also:
sie haben *gemeinsam*, daß in jedem Fall in den *zwei* Klammern die gleichen *zwei* Zahlen a und b auftauchen (also nicht mehr wie in Gleichung (#) *vier* Zahlen a, b, c und d). Man spricht wegen dieser doppelten Zweiheit auch von "Binomis", denn lateinisch "bi" = zwei und "nomen" = Wort, Gegenstand.

Der einzige *Unterschied* zwischen 1., 2. und 3. besteht in den Strich-Rechenzeichen:
in 1. haben wir die Kombination + + ,
in 2. haben wir die Kombination - - ,
in 3. haben wir die Kombination + - (bzw. durch Kommutativgesetz - +)
Damit haben wir alle möglichen Strichrechnungskombinationen.

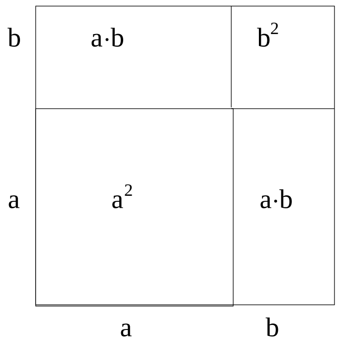
Schauen wir uns nun nacheinander genauer 1. - 3. an:

1. $(a + b)^2 = (a + b)\bullet(a + b) \underset{(\#)}{=} a\bullet a + a\bullet b + b\bullet a + b\bullet b \underset{\text{Komm.Ges.}}{=} a\bullet a + a\bullet b + a\bullet b + b\bullet b = a^2 + 2ab + b^2$

oder kurz:

1. binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Diese binomische Formel (wie die beiden folgenden) läßt sich also (wenn man sie z.B. vergessen hat) mit der Gleichung (#) herleiten. *Kennt* man die binomische Formel aber erstmal, so erspart sie die langwierige Rechnung mit (#).
Das ist wieder mal typisch für Mathematiker: sie führen eine Formel nur dann ein, wenn sie bei der Anwendung auf zigtausend Fälle auf die Dauer mehr Zeit spart als ihre Herleitung erfordert.
Die Bedeutung der 1. binomischen Formel kann man sich sehr gut auch grafisch klarmachen:



Das *Gesamt*quadrat mit den Seitenlängen a+b hat die Fläche $(a + b)^2$. Es setzt sich aus den vier *Teil*quadraten bzw. -rechtecken mit den Flächen $a\bullet b$, $a\bullet b$, a^2 und b^2 zusammen. Also gilt $(a + b)^2 = a\bullet b + a\bullet b + a^2 + b2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. $(a - b)^2 = (a - b)\bullet(a - b) \underset{(\#)}{=} a\bullet a - a\bullet b - b\bullet a + b\bullet b \underset{\text{Komm.Ges.}}{=} a\bullet a - a\bullet b - a\bullet b + b\bullet b = a^2 - 2ab + b^2$

oder kurz:

<u>2. binomische Formel</u> $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b)\bullet(a - b) \underset{(\#)}{=} a\bullet a - a\bullet b + b\bullet a - b\bullet b \underset{\text{Komm.Ges.}}{=} a\bullet a - a\bullet b + a\bullet b \;\; b\bullet b = a^2 - b^2$

oder kurz:

<u>3. binomische Formel</u> $(a + b)\bullet(a - b) = a^2 - b^2$

Fassen wir 1. - 3. nochmals zusammen:

1. Binomi: $(a + b)^2 = (a + b)\bullet(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ 2. Binomi: $(a - b)^2 = (a - b)\bullet(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ 1. Binomi: $\underline{(a + b)\bullet(a - b)} = a^2 \quad - b^2$ | nicht quadratisch schreibbar

Wichtig!: anhand dieses Schemas mache man sich doch nochmal allgemein und detailliert die Gemeinsamkeiten und Unterschiede klar, weil da *allzu schnell* Verwechslungen vorkommen:
Gemeinsamkeiten:

a) in 1., 2. und 3. kommen rechts a^2 und b^2 vor.
b) a^2 hat in allen drei Fällen das Vorzeichen *Plus* (nicht jedoch b^2)
c) in 1. und 2., nicht aber in 3. kommt in der Mitte noch das sogenannte *"gemischte" Glied* 2ab vor.

Vorsicht, beliebte Fehlermöglichkeit: in 1. und 2. wird gerne das gemischte Glied vergessen, so daß der komplette Quatsch erscheint: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ bzw. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$.

Offensichtlich wurde bei diesem Fehler folgendermaßen gedacht: die Quadratzahl hinter der Klammer wurde einfach auf die beiden Summanden verteilt.
Hier sei schon darauf hingewiesen, daß dieser Fehler nicht ganz aus der Luft gegriffen ist. Bei der *Multiplikation/Divi sion* gilt nach den Potenzgesetzen tatsächlich $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ bzw. $(a:b)^2 = a^2:b^2$, darf also die Quadratzahl verteilt werden.
Wieder mal muß man also Addition/Subtraktion einerseits und Multiplikation/Division andererseits scharf trennen.

d) in 1. und 2., wieder aber nicht in 3. steht vor dem b^2 ein *Plus*. (in 3. steht vor b^2 ein *Minus*).

e) bei jedem Teilterm a^2, 2ab und b^2 taucht eine 2 auf, allerdings bei a^2 und b^2 als *Exponent*, bei 2ab aber als *Koeffizient*.

Der wichtigste Unterschied:

in 1. wird das gemischte Glied 2ab *addiert*: das + in $(a + b)^2$ setzt sich durch.

in 2. wird das gemischte Glied 2ab *subtrahiert*: das - in $(a - b)^2$ setzt sich durch.

Aber Vorsicht, beliebter Fehler!!!: vor dem b^2 steht dennoch auch hier ein *Plus*. Grausig falsch sind also:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$ oder

$(a - b)^2 = a^2 + 2ab - b^2$

Anwendungen:

Wir wollen nun mal mit konkreten Termen arbeiten. Dabei ist (nicht nur für den Anfänger) zu empfehlen, sich den allgemeinen Binomi mit Buchstaben immer drunterzuschreiben:

A)

$(3x + 4y)^2$

| |

$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ (1. Binomi)

$= (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (4y) + (4y)^2 =$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

B)

$(3z - 2y)^2 =$ (2. Binomi)

| | .

$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$= (3z)^2 - 2 \cdot (3z) \cdot (2y) + (2y)^2$

$= 9z^2 - 12zy + 4y^2$

C)

$(5a + 4c) \cdot (5a - 4c) =$

| | | |

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ (3. Binomi)

$= (5a)^2 - (4c)^2 =$

$= 25a^2 - 16c^2$

Insbesondere an Beispiel C) wird klar: man muß sich frühzeitig daran gewöhnen, daß die a und b in den binomischen Formeln auch mal *andere* Zahlen/Unbekannte sein können.

D)

Bisher haben wir die Binomis immer "von links nach rechts" benutzt, um Klammern zu *beseitigen*. Insbesondere bei quadratischen Gleichungen werden wir aber sehen, daß es durchaus zweckmäßig sein kann, Klammern umgekehrt erst wieder *herzustellen*, also die Binomis "von rechts nach links" zu benutzen.

Am Beispiel des 2. Binomi: man sollte also nicht nur wissen, daß $(a - b)^2$ gleich $a^2 - 2ab + b^2$ ist, sondern umgekehrt auch a^2 $2ab + b^2$ wieder in $(a - b)^2$ überführen können.

Ein Beispiel anhand des 2. Binomi:

Der Term $25x^2 - 70xy + 49y^2$ erinnert spätestens auf den zweiten Blick an den 2. Binomi:

1. ist $25x^2 = (5x)^2$
2. steht vor 70xy ein *Minus*, was eben sehr an den *zweiten* Binomi erinnert
3. sieht 70xy sehr nach einem gemischten Glied aus, da x *und* y vorkommen
4. ist $49y^2 = (7y)^2$

(Aber Vorsicht: wie wir im Zusammenhang quadratischer Funktionen sehen werden, muß *Ähnlichkeit* zum Binomi noch lange nicht bedeuten, daß auch *wirklich* und in *allen* Details einer vorliegt. Da muß man dann eventuell mittels „quadratischer Ergänzung“ erst für einen vollständigen Binomi *sorgen*.)

Wenden wir also schonmal 1. und 4. an:

$$25x^2 - 70xy + 49y^2 = \qquad \text{(I)}$$
$$(5\,x)^2 - 70xy + (7\,y)^2$$

Nennen wir nun 5x = a und 7y = b, so erhalten wir:

$$(5\,x)^2 \; -70xy + (7\,y)^2$$
$$a^2 \qquad\qquad + \; b^2$$

Wenn nun aber tatsächlich der 2. Binomi vorliegen sollte (was ja nicht sein *muß*), so müßte 70xy das gemischte Glied 2ab sein. Und in der Tat gilt mit a = 5x und b = 7y:

$$2 \bullet \; a \; \bullet \; b \; =$$
$$2 \bullet (5\,x) \bullet (7\,y) = 70xy$$

Insgesamt haben wir also erreicht:

$$(5x)^2 - 70xy + (7y)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = \qquad \text{(2. Binomi)}$$
$$= (5\,x - 7\,y)^2 \qquad \text{(II)}$$

Insgesamt haben wir von (I) nach (II) also erreicht:

$$25x^2 - 70xy + 49y^2 = (5\,x - 7\,y)^2, \qquad \text{(III)}$$

also den 2. Binomi von rechts nach links benutzt und eine Klammer *hergestellt*.

Letzteres sei doch schonmal als allgemein wichtige Erkenntnis festgehalten:

normalerweise wollen wir ja Klammern zur Vereinfachung *beseitigen*. In der Gleichung (III) zeigt sich aber, daß der *rechte* Ausdruck (trotz oder gerade wegen der Klammern) erheblich übersichtlicher ist als der *linke*. Dazu waren aber *neue* Klammern nötig. Manchmal sind also Ausdrücke *mit* Klammern einfacher.

E)

Besonders wichtig wird die (Klammer-)*Herstellung* binomischer Formeln bei quadratischen Gleichungen (s. dort) und deren Nullstellenberechnung, also bei $ax^2 + bx + c = 0$, weil da *nur* mittels Umformung zum Binomi (und „quadratischer Ergänzung“) Lösungen gefunden werden können.

Dreisatz

Der sogenannte Dreisatz ist eine beliebte Anwendung der Termumformung, aber auch der linearen Gleichungen.
Fangen wir mit letzterem an: wenn wir in ein Geschäft gehen, um Milch zu kaufen, so gehen wir davon aus, daß doppelt (dreimal) soviel Milch auch doppelt (dreimal) so viel kostet (wenn man man von Mengenrabatt absieht). Mathematisch: wir gehen davon aus, daß die Zuordnung Literzahl(x)/Preis(y) "proportional" ist, also die Form y = mx hat.
Angenommen also, ein Liter Milch kostet 1,30 DM. Dann ergibt sich:

- 1 L Milch kostet $1{,}3\text{ DM} \cdot 1 = 1{,}30\text{ DM}$
- 2 L " kosten $1{,}3\text{ DM} \cdot 2 = 2{,}60\text{ DM}$
- 3 L " " $1{,}3\text{ DM} \cdot 3 = 3{,}90\text{ DM}$

oder allgemein: - x L " " $y = 1{,}3\text{ DM} \cdot x$
Wir haben also die *proportionale* Gleichung $y = 1{,}3\text{ DM} \cdot x$ gefunden. Allgemein:

Proportionale Gleichungen haben die Form $y = m \cdot x$

Der Dreisatz basiert nun darauf, funktioniert aber im Grunde viel einfacher:
Gehen wir dazu von einem einfachen Beispiel aus: gegeben seien drei Informationen (deshalb "*Drei*satz"):

1. 3 Liter Milch kosten
2. 3,90 DM. Wieviel kosten dann
3. 2 Liter Milch?

Gesucht ist also anhand der *gegebenen drei* Werte (3 L; 3,90 DM; 2 L) ein *vierter*, noch *unbekannter* Wert (der *Preis* von 2 Litern Milch).
Nun sei x der (ebenfalls noch unbekannte) Preis von *einem* Liter Milch.
Damit können wir aber schon die Informationen 1. und 2. mathematisch umschreiben zu

3	• x	= 3,90 DM
Anzahl der Liter	Preis von *einem* L.	Preis von *drei* L.

Bevor wir uns nun mit der 3. Information (den 2 Litern) beschäftigen, wählen wir als Standardverfahren, erstmal *ein* x, also hier den Preis von *einem* Liter Milch, zu berechnen. Wir sind sowas aus dem Alltag durchaus gewohnt: in der Regel interessiert uns nicht, was 3 Liter Milch kosten, sondern wir ziehen den Standardwert (Preis von *einem* Liter) vor, um nicht immer umrechnen zu müssen.
Um aber nun herauszufinden, was *ein* Liter Milch kostet (x), wenden wir eine typische Termumformung an:

$$3 \cdot x = 3{,}90 \quad |:3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1{,}30$$

Zwischenergebnis: *ein* Liter Milch kostet 1,30 DM.
Nun können wir endlich Information 3. einbringen und den 4. Wert (den Preis von *zwei* Litern Milch) berechnen:

$$x = 1{,}30 \quad |\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = 2{,}60$$

Gesamtantwort: *zwei* Liter Milch kosten 2,60 DM.

Äquivalenzumformungen

1. Kommentare/Texte

Oftmals wird bei Umformungen und Folgerungen eine Art "Katalysator" gebraucht (in der Chemie ist ein Katalysator ein Hilfsmittel, das bei der Stoffumwandlung hilft). Wollen wir z.B. $(4x + 3y)^2$ ausrechnen, so benützen wir als Hilfsmittel den 1. Binomi:

$$(4x + 3y)^2 = (4x)^2 + 2\cdot(4x)\cdot(3y) + (3y)^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad \text{(A)}$$

oder kurz

$$(4x + 3y)^2 \underset{\text{1. Binomi}}{=} (4x)^2 + 2\cdot(4x)\cdot(3y) + (3y)^2$$

oder noch kürzer (wenn der Binomi vorher schonmal aufgeschrieben und mit (A) bezeichnet worden ist):

$$(4x + 3y)^2 \underset{\text{(A)}}{=} (4x)^2 + 2\cdot(4x)\cdot(3y) + (3y)^2$$

Welches Hilfsmittel man also benutzt, mache man durch einen *Text* klar oder dadurch, daß man das Hilfsmittel (oder einen Verweisbuchstaben) *unter* das entsprechende Gleichheitszeichen (oder Folgerungszeichen schreibt). Solche Kurzkommentare erleichtern nicht nur dem *Leser* (Lehrer) die Arbeit, sondern helfen einem auch *selbst*: wenn man etwa am Ende einer langen, kaum mehr überschaubaren Rechnung bemerkt, daß das Ergebnis nicht stimmen kann und man sich also verrechnet haben muß, weiß man durch diese Kurzkommentare immer, was man an jeder Stelle eigentlich gewollt/benutzt hat.

2. Folgerungen/Äquivalenzen:

Bei der Definition der "Sätze" war gesagt worden, daß sie aus bereits Bekanntem gefolgert werden, und zwar nach dem "Wenn/ Dann"-Schema. Ein Beispiel:

wenn es regnet, *dann* ist die Straße naß

oder mathematisch abgekürzt:

es regnet $\Rightarrow$ Straße ist naß

(gesprochen: es regnet, daraus folgt: Straße ist naß)
Bevor Einwände kommen: wenn die Straße überdacht ist, gilt die Folgerung natürlich nicht. Aber das sind Spitzfindigkeiten, mit denen wir uns hier nicht beschäftigen wollen.
Viel interessanter ist die Frage, ob auch die *Umkehrung* gilt, also

es regnet $\Leftarrow$ Straße ist naß

bzw.

Straße ist naß $\Rightarrow$ es regnet.

Das ist offensichtlich *keine* logische Folgerung, denn
a) die Straße kann noch naß sein, nachdem es bereits *aufgehört* hat zu regnen,
b) Ursache der Straßennässe könnte bei wolkenlosem Himmel z.B. ein Straßenreinigungswagen sein.
Das heißt also insgesamt:

Folgerungen sind *nicht* immer umkehrbar:
Gilt A $\Rightarrow$ B, so gilt noch lange nicht notwendig auch B $\Rightarrow$ A

Die leichtfertige Umdrehung von Folgerungen ist geradezu ein Grundübel der Menschheit. Ein Beispiel: wenn wir mal davon absehen, wie man überhaupt beweisen will, daß jemand *rundum* dumm ist, so könnte ein Lehrer mit einiger Berechtigung folgern

alle Schüler aus der Klasse X sind dumm $\Rightarrow$ alle *rothaarigen* Schüler aus der Klasse X sind dumm.

(Hier sieht man: unter der Voraussetzung, daß die *ganze* Klasse X dumm ist, sind auch die *rothaarigen* Schüler dumm, denn sie sind ja eine *Teil*menge der Gesamtklasse: von der *Gesamt*klasse wird auch eine *Teil*menge geschlossen.)

Die Umkehrung

alle *rothaarigen* Schüler der Klasse X sind dumm $\Rightarrow$ *alle* Schüler aus der Klasse X sind dumm

ist hingegen eine unzulässige *Verallgemeinerung* und damit eine üble Nachrede/Verleumdung: mag ja sein, daß erwiesen ist, daß alle *rothaarigen* Schüler der Klasse dumm sind aber daraus darf man doch nicht ohne weitere Untersuchung leichtfertig folgern, daß *alle* Schüler der Klasse dumm sind (genauso, wie man aus der Tatsache, daß vielleicht alle Blonden einer bestimmten *Klasse* dumm sind, nicht folgern darf, daß damit alle Rothaarigen der *Welt* dumm sind).

Ein mathematisches Beispiel: es gilt sicherlich $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.

Die Umkehrung $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ist jedoch *nicht* richtig, denn aus $x^2 = 4$ ergibt sich *nicht* zwingend $x = 2$. Wenn nämlich $x^2 = 4$ ist, könnte *genauso gut* $x = -2$ gelten, denn auch für -2 gilt $(-2)^2 = 4$.

Bei $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ haben wir also eine der beiden möglichen Lösungen 2 und -2 von $x^2 = 4$ *verloren*. Man sagt auch: "$x^2 = 4$" und "$x = 2$" sind (bzgl. der Lösungsmenge) *nicht* "äquivalent" (äquivalent = lateinisch für "gleichwertig").

Dennoch gibt es auch umkehrbare Folgerungen, die man auch "Äquivalenzen" nennt. Bleiben wir dazu bei eben genanntem Beispiel: es gilt

$x = 2$ *oder* $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$ (A)

Da im Gegensatz zu oben *beide* Fälle $x = 2$ und $x = -2$ berücksichtigt sind, gilt auch die Umkehrung

$x = 2$ oder $x = -2 \Leftarrow x^2 = 4$, (B)

denn wenn $x^2 = 4$ ist, kann x nur 2 *oder* -2 sein (weitere Lösungen gibt es *nicht*).

Wenn "$\Rightarrow$" *und* die Gegenrichtung "$\Leftarrow$" gelten, schreibt man auch kurz das "Äquivalenzzeichen" "$\Leftrightarrow$".

Statt (A) *und* (B) können wir also auch kürzer schreiben:

$x = 2$ oder $x = -2 \Leftrightarrow x^2 = 4$

Oder man sagt: "$x = 2$ oder $x = -2$" und "$x^2 = 4$" sind (bzgl. der Lösungsmenge) "äquivalent", d.h. es geht weder eine Lösung verloren noch wird eine dazugewonnen.

Daß die *Veränderung* der Lösungsmenge wenig sinnvoll ist, wird klar, wenn wir uns nochmals das Beispiel $x^2 = 4$ ansehen. Liegt solch eine Gleichung vor, so ist es immer Ziel der Mathematiker in ihrem "Ganzheitswahn", *alle* möglichen Lösungen x dieser Gleichung herauszubekommen. Angenommen also,

a) wir verlieren eine Lösung, sehen also nur $x = 2$, nicht aber $x = -2$ als Lösung. Nun sind aber 2 und -2 absolut *gleichberechtigte* Lösungen von $x^2 = 4$, und die verlorene Lösung -2 wäre sogar die interessantere, wenn wir etwa ausdrücklich *negative* Lösungen suchten.

(Am Regenbeispiel: jemand folgert aus der Nässe der Straße als *einzige* Möglichkeit, daß es regnet, und übersieht die Lösungsmöglichkeit, daß ein Straßenreinigungswagen vorbeigekommen ist. Er spannt also brav [bei schönstem Wetter] seinen Schirm auf und macht sich zum Gespött der Leute.)

b) wir gewinnen eine Lösung dazu, also z.B. $x^2 = 4 \Rightarrow x = 3$.
Diese zusätzliche Lösung ist doch offensichtlich schwachsinnig, löst nämlich eben *nicht* auch $x^2 = 4$ (denn $3^2 = 9$)
(Am Regenbeispiel: jemand folgert aus der Nässe der Straße, daß die Welt untergeht: seine Lösung hat offensichtlich *nichts* mehr mit dem Ausgangsproblem "nasse Straße" zu tun - er ist offensichtlich verrückt.)

Äquivalenzen werden vor allem benötigt bei

a) sogenannten "umgekehrten Beweisen": aus etwas Schwierigem, Unübersichtlichen wird etwas Einfaches und bekanntermaßen Richtiges gefolgert. Gilt die Äquivalenz, so kann man daraus umgekehrt auch wieder das Schwierige folgern, so daß es bewiesen ist.

b) Gleichungsumformungen: gesucht sind *alle* Lösungen einer komplizierten Anfangsgleichung. Dazu formen wir mittels Äquivalenzumformungen in Einfacheres um (bis $1 \cdot x = x = \ldots$ dasteht), wobei natürlich ggb. der Anfangsgleichung (dem eigentlichen zu lösenden Problem) keine Veränderung der Lösungsmenge stattfinden darf. Das wird ausschließlich von Äquivalenzumformungen geleistet.

Man mache sich immer bewußt, ob man *tatsächlich* eine Äquivalenzumformung benutzt. Dabei hilft das "$\Leftrightarrow$"-Zeichen, das man also ganz *bewußt* (und nicht nur dem Lehrer zuliebe) benutze und bei dem man immer überlege, ob es denn tatsächlich in *beiden* Richtungen gilt. Z.B. beim Wurzelziehen ist nur die Berücksichtigung *beider* Fälle $+\sqrt{\ }$ und $-\sqrt{\ }$ (Fallunterscheidung) äquivalent.

Typische Äquivalenzumformungen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf beiden ganzen Seiten einer Gleichung, wobei auf beiden ganzen Seiten die gleiche Zahl addiert/subtra-hiert/mit der gleichen Zahl multipliziert/durch die gleiche Zahl dividiert werden muß.

Beispiel: gegeben sei folgende Waage, die sich im Gleichgewicht befindet (dabei seien r gleichschwere, aber unbekannte Gewichte):

r r jjj jjjjj jjjjj j
=

(mathematisch: $2x + 3 = 11$)

Die Frage ist natürlich, wieviel jedes *einzelne* der r-Stücke wiegt. Wir wollen dies durch geschickte Benützung der Waage herausbekommen. Wirklich aussagekräftig ist eine Waage aber nur, wenn sie im *Gleichgewicht* ist - und bleibt. Das aber heißt, daß wir nur solche Veränderungen vornehmen dürfen, bei denen das Gleichgewicht erhalten bleibt. So können wir z.B. nicht einfach

a) die drei Kilostücke links ganz von der Waage runternehmen, ohne rechts etwas zu verändern:
dann wird A) die linke Seite leichter,
B) die rechte Seite aber bleibt unverändert.
Aus A) und B) folgt, daß die Waage ins Ungleichgewicht gerät:
sie geht rechts runter.

b) die drei Kilostücke links wegnehmen und dafür rechts hinstellen, also "rüberbringen": dann wird

A) die linke Seite leichter,
B) die rechte Seite schwerer.

Aus A) und B) folgt, daß die Waage ins Ungleichgewicht gerät:
sie geht rechts runter.

Uns bleibt also nur folgendes: wir nehmen
A) von der linken Seite drei Kilostücke und stellen sie ganz von der Waage,
B) von der rechten Seite drei Kilostücke und stellen sie ganz von der Waage.
Da wir von beiden Seiten *gleichviel* heruntergenommen haben,
bleibt die Waage im Gleichgewicht:

r r = jjjjj jjj

(mathematisch: $2x + 3 = 11 \quad | - 3$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 3 - 3 = 11 - 3$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 8$)

Nun sind links allerdings noch *zwei* unbekannte Gewichte r. Uns interessiert aber nur das Gewicht *eines* dieser r. Das andere muß also weg.
Nun könnte man auf die Idee kommen, das Verfahren von eben weiterzuführen, also links und rechts jeweils *ein* Gewicht wegzunehmen. Die Waage bliebe dabei allerdings nur im Gleichgewicht, wenn das links weggenommene Gewicht r *genauso schwer* wäre wie das rechts weggenommene Gewicht, also eins der Kilostücke j. Das aber wäre nur in dem Spezialfall möglich, daß eben r genau ein Kilo wiegt. Wir wissen noch nicht, ob dieser Spezialfall vorliegt, können dieses Verfahren also nicht anwenden.
Machen wir aber *dennoch* mal ein *Gedanken*experiment. Dazu gehen wir dennoch mal davon aus, daß das Gewicht r und ein Kilostück gleichschwer sind, also Annahme: r = j
Folgerung: dann können wir links ein r und rechts ein k wegnehmen, *ohne* daß die Waage aus dem Gleichgewicht gerät.
Übrig auf der Waage bleiben dann aber a) links ein r und b) rechts 7 j. Aus a) und b) folgt, daß r = 7 j. Das aber ist ein *Widerspruch zur Annahme*, denn es kann nicht gleichzeitig r = k <u>und</u> r = 7 j gelten.

Daraus aber folgt, daß schon die *Annahme* falsch gewesen sein muß. Unser Versuch, links und rechts je *ein* Gewichtsstück wegzunehmen (und dennoch Gleichgewicht zu behalten), ist also gescheitert: es reicht nicht, von jeder Seite *ein* Gewicht zu nehmen (aber links ein *anderes* als rechts), sondern man muß von beiden Seiten dasselbe *Gesamt*gewicht nehmen.
Immerhin haben wir aber ein typisches Beispiel für den indirekten Beweis durchgenommen.
Um einen anderen Weg zu finden, sortieren wir auf jeder Seite nur anders: Sortieren auf einer oder beiden Seiten verändert das Gleichgewicht nicht. Mathematisch heißen Sortierungen "Termumformungen": der Term links oder rechts wird umgestellt oder vereinfacht, ohne daß sich sein *Wert* ändert. Wie aber können wir anders bei

r r = jjjj jjjj

fortfahren? Offensichtlich so, daß wir links und rechts jeweils die *Hälfte* der Gewichte runternehmen. Die Waage bleibt dann im Gleichgewicht, und wir erhalten:

r = jjjj

womit die Frage nach dem Gewicht von *einem* r beantwortet ist: es wiegt vier Kilogramm.
(mathematisch: $2x = 8 \quad |:2$

$\Leftrightarrow \quad (2\,x):2 = 8:2$

$\Leftrightarrow \quad x = 4$)

Die wichtige Erkenntnis (und nur dazu diente dieses Waagenbeispiel):

man muß immer auf beiden *ganzen* Seiten einer Gleichung dasselbe machen. Und man kann sich eine Gleichung wie eine Waage vorstellen, die immer im Gleichgewicht bleiben muß.

Nichts anderes besagt der Begriff „Algebra". Er stammt vom arabischen al-gabr, und das bedeutet eigentlich „die Einrenkung". Im mathematischen Sinne bekannt geworden ist das Wort aber insbesondere durch ein berühmtes arabisches Mathematikbuch des Mittelalters, nämlich das Buch „Al-jahr wa´l Muqabalah" des Arabers al-Charismi. „Al-jahr wa´l Muqabalah" aber bedeutet auf Deutsch „Ausgleichen und Wiederherstellen", womit gemeint ist, daß Gleichungen mit einer Unbekannten nur dann zu lösen sind, wenn man wie bei einer Waage auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe tut.

Lösung von Gleichungen mit *einer* (linearen) Unbekannten

Gleichung nennen wir alles, „wo *ein* Gleichheitszeichen drin vorkommt“. So ist x + 2 *keine* Gleichung (sondern nur ein Term), während x + 2 = 3 eine Gleichung ist.

Eine Gleichung hat die Form "Term 1 = Term 2".

Demnach ist auch x + 2 = y eine Gleichung. In ihr kommen allerdings *zwei* noch nicht näher bestimmte Zahlen vor. Schauen wir uns diese Gleichung mal näher an: wir wissen, daß y = x + 2, daß also y um 2 größer ist als x. Daraus können wir aber y *nicht* bestimmen, da x ja unbekannt ist. Wir können nur sagen: wenn
a) x = 1 ist, so ist y = 1 + 2 = 3
b) x = 2 ist, so ist y = 2 + 2 = 4
c) x = 3 ist, so ist y = 3 + 2 = 5 usw.
Wir können also x beliebig wählen, und y ist dann in *Abhängigkeit* von der Wahl des x immer um genau 2 größer als x.
Man sagt dann auch: x ist eine *Variable*, denn für x kann ich *alles* einsetzen.
(Genauso gut könnten wir für y alles einsetzen und erhielten dann x in Abhängigkeit. Die Mathematiker haben sich aber darauf geeinigt, in der Regel x als Variable anzusehen und y in Abhängigkeit davon zu berechnen.)
Das ist bei der Gleichung x + 2 = 3 anders. Da kann man f ür x *keineswegs alles* einsetzen. Versuchen wir es trotzdem mal, für x *irgendetwas* einzusetzen, z.B. 1000. Statt
x + 2 = 3
erhalten wir dann 1000 + 2 = 3
bzw. 1002 = 3

Das ist offensichtlich falsch.
Das Beispiel x + 2 = 3 ist nun so einfach, daß jeder sieht: in diese Gleichung kann man für x *nur* 1 einsetzen, denn statt
x + 2 = 3
ergibt sich dann 1 + 2 = 3
bzw. 3 = 3
Und das ist offensichtlich richtig.
In x + 2 = 3 ist x also *keine* Variable, sondern eine sogenannte *Unbekannte*, d.h.: vielleicht ist die Gleichung zu kompliziert, um auf Anhieb zu sehen, *was* man für x einsetzen kann, aber es kann nur *eine ganz bestimmte* und *keine beliebige* Zahl sein.
Ein Beispiel für <u>Unbekannte</u>: jemand hat mir im Bus auf die Füße getreten. Mathematisch heißt das: x hat mir auf die Füße getreten. Dieses x ist eine typische Unbekannte: ich weiß zwar noch nicht, *wer* es war, aber es können nicht beliebig viele gewesen sein, sondern es war *ein ganz bestimmter*. Vielleicht weiß ich sogar: es war der kleine dicke Mann, dessen *Name* mir allerdings unbekannt ist. Auch hier gilt: zwar ist mir sein Name unbekannt, aber er hat garantiert einen (und nicht beliebige) Namen.
Ein Beispiel für <u>Variable</u>: x ißt heute zum Mittagessen y. Da kann ich für x tausende von Menschen einsetzen, und es ergibt sich immer ein y.
Z.B. x = Meier ißt ein y = Schnitzel,
und x = Müller ißt einen y = Pfannkuchen.
Wichtig ist: x ist *kein* ganz bestimmter Mensch.

Merkregel: kommt in einer Gleichung nur *ein* Buchstabe x (oder nur y oder nur z usw.) vor, so ist es eine *Unbekannte*.

Beispiel: $17\ x\ \ 4{,}185 = 19$
Die Gleichung ist so kompliziert, daß keiner auf Anhieb sieht, was man für x einsetzen kann. Dennoch ist eins schon ganz klar: für x kann nur *eine ganz konkrete Zahl* rauskommen (Ausnahmen, nämlich Unlösbarkeit und Allgemeingültigkeit, werden wir unten kennenlernen). Genau genommen: x ist eine ganz konkrete, uns allerdings noch unbekannte *Zahl*. Man kann sich x auch wie eine Tarnkappe vorstellen: darunter *ist* bereits jemand verborgen, wir wissen bloß noch nicht, *wer* das ist.

Merkregel: eine Unbekannte ist eine *Zahl* (Zahlen), die uns nur leider noch unbekannt ist. Daraus folgt auch: mit Unbekannten wird gerechnet wie mit stinknormalen Zahlen. Die Rechenregeln dafür kennen wir aber. Wir können sie blind anwenden, ohne schon zu wissen, um *welche* Zahl es sich handelt.

Es ist wie mit einem Staubsauger: ich kann wochenlang mit ihm saubermachen, ohne zu wissen, wie sein *Innenleben* aussieht.
(Hier sei allerdings schon ergänzt: es gibt Gleichungen mit nur *einem* Buchstaben x, die *überhaupt nicht lösbar* sind oder *mehrere*, wenn nicht gar unendlich viele Lösungen haben. Gerade bei Unlösbarkeit ist es aber wenig sinnvoll, von einer "Unbekannten" zu sprechen, wenn letztlich eben *nichts* unter der Tarnkappe ist. Das hat zur Folge: letztlich unterscheiden wir *nicht* zwischen Variablen und Unbekannten, sondern nennen *alles* "Variable". Daß hier *dennoch* erstmal unterschieden wurde, hatte den Zweck, verschiedene Funktionen von Buchstaben kennenzulernen.)
Um solche Gleichungen wie oben, in denen nur *eine* Unbekannte vorkommt, wollen wir uns nun kümmern. Diese Unbekannte nennt man in der Regel x, sie kann aber ebensogut y oder z oder a oder b usw. heißen. Hauptsache, es kommen nicht *zwei* davon vor (also z.B. x *und* y).

Nehmen wir als Beispiel: einem Großhändler wird das Angebot gemacht, 17 gleiche Mercedes für *insgesamt* 500 000 DM zu bekom-men. Da er gewohnt ist, mit dem Preis für *einen* Mercedes zu rechnen, kann er nicht auf Anhieb überblicken, ob das Angebot nun gut oder schlecht ist. Er ist also gezwungen, das Angebot auf *einen* Mercedes umzurechnen. Dazu geht er folgendermaßen vor: er weiß zwar, daß sich hinter dem Angebot ein ganz konkreter Preis für jeden *einzelnen* Mercedes verbirgt, da er diesen Einzel-preis aber noch nicht kennt, nennt er ihn x. Damit schreibt sich das Angebot mathematisch folgendermaßen:

$$17 \bullet x = 500\,000$$

(in Worten: 17 mal Einzelpreis gleich Gesamtpreis 500 000)
Nun interessiert unseren Großhändler aber *nicht*, was $17 \bullet x$ ist, sondern er will wissen, was *ein* x bzw. $1 \bullet x$ bzw. einfach x ist.
Daraus ergeben sich zwei Ziele:

1. Wir müssen die Gleichung so umformen, daß man auf Anhieb sieht, was x ist. Die günstigste Form ist dabei x = ..., denn dann steht ja rechts, was für x rauskommt
   (nebenbei: diese Form "x = ...", aus der ich *ein* x ablesen kann, ist Grundziel bei fast *allen* Gleichungsumformungen, also z.B. später auch bei *quadratischen* Gleichungen. Genau genommen: enthält eine - z.B. quadratische - Gleichung nur noch *eine* Unbekannte - z.B. auch y -, so ist es *immer* Ziel, nach dieser aufzulösen, *hier* also die Form "y = ..." zu bekommen.)
2. Bei der Umformung darf sich x nicht *verändern*. Am Ende darf für x also nicht eine Zahl herauskommen, die nicht mehr die *Ausgangsgleichung* $17x = 500\,000$ löst. Sowas könnte für den Autohändler nämlich schlimme Folgen haben: denn nehmen wir mal an, daß er ein so schlechter Mathematiker ist, daß er am Ende x = 10 rausbekommt und jeden Mercedes für 10 DM *weiter*verkauft. Dann nimmt er insgesamt $17 \bullet 10$ DM = 170 DM ein,

muß aber an das Mercedeswerk 500 000 DM bezahlen. Damit macht er dann einen Verlust von 500 000 DM - 170 DM = 499 830 DM.

Also: was hilft uns ein Ergebnis, das nicht unser *Ausgangs*problem löst! Oder umgekehrt: eine *Lösung* (ganz am Ende einer Umformung) ist nur *dann* interessant, wenn es die *Ausgangs*gleichung löst.

Hier hilft wieder das Bild der Tarnkappe: um rauszubekommen, wer sich unter einer Tarnkappe befindet, müssen wir auf jeden Fall dafür sorgen, daß sich hinterher noch immer der *gleiche* darunter befindet wie anfangs. Denn wenn wir am Ende nur wissen:

1. Meier ist drunter
2. vorher war (vielleicht) ein *anderer* drunter,

so wissen wir noch immer nicht, wer *anfangs* drunter war.

Solche Umformungen bzw. Rechnungen, die 1. und 2. erfüllen, schauen wir uns nun an. Rechnungen braucht man immer dann, wenn man etwas *nicht auf Anhieb* sieht, aber auch, um zu kontrollieren, ob das, was man auf Anhieb gesehen hat, denn wirklich *richtig* war. Die Anschauung kann einen ja enorm getäuscht haben.

Zuguterletzt braucht man Rechnungen, um auszuschließen, daß es noch *andere* Lösungen gibt (später werden wir noch sehen: Rechnungen braucht man auch, um *mehrere* Lösungen zu finden oder um zu beweisen, daß es *gar keine* Lösung gibt).

Ziel der Rechnungen ist immer eine Vereinfachung. Dabei steht es mit Rechnungen wie mit dem Bau eines Autos: ein Auto zu bauen, ist sicherlich sehr schwierig, *hat* man es aber erstmal gebaut, so wird damit das Reisen sehr viel einfacher. Entsprechend gilt für Rechnungen: manchmal sind sie ganz schön schwierig, aber man nimmt diese Unbequemlichkeit auf sich, weil man als Lohn hinterher etwas ganz Einfaches erhält. Sowas ist nebenbei typisch für Mathematiker: sie gehen nur dann durch die Hölle, wenn ihnen als Belohnung der Himmel winkt.

In 1. war schon gezeigt worden, was *immer* unser Ziel ist:

Einheitsziel: die Anfangsgleichung mag noch so kompliziert sein, am Ende wollen wir immer wissen, was *ein* x ist. Uns interessiert also, was 1•x bzw. x ist. Am Ende wollen wir also immer x = ... da stehen haben.

Auch hier lernen wir wieder zwei wichtige Sachen über die Mathematik:

A) Statt jede neue Aufgabe mit einem neuen Verfahren zu lösen, machen es sich die Mathematiker aus purer Faulheit einfach: sie entwickeln Standardverfahren, mit denen man *alle* Aufgaben eines bestimmten Typs lösen kann: Mathematiker machen sich nur die Mühe, ein neues Rechenverfahren herzuleiten, wenn sie damit abertausende von Aufgaben vereinfachen können.

Eines der größten Schülerprobleme besteht darin, daß sie bei Aufgaben wie diesen völlig *unsystematisch* vorgehen: sie rechnen mal dieses, mal jenes, sagen erst "Hü" und dann "Hott". Standardvorgehensweisen (in unserem Fall wird es immer dieselbe sein) halten sie für eine spießige Einschränkung ihrer persönlichen Freiheit.

Dabei muß man in der Mathematik eigentlich "nur" drei unverzichtbare Dinge können:

1. Rechnen
2. Standardvorgehensweisen (damit sind 99 % aller Aufgaben lösbar)
3. Zielfestlegung:

B) Daß viele Schüler so unsystematisch drauflosrechnen, liegt oftmals daran, daß sie sich zu Anfang nicht klargemacht haben, was eigentlich ihr *Ziel* ist. Hätten sie eins, so könnten sie systematisch auf es zurechnen. Bevor man also blindwütig losrechnet (in der verzweifelten Hoffnung: "wird wohl irgendwas bei rauskommen"), sollte man sich ganz kurz

klarmachen: "Was will ich eigentlich?" Und *während* der Rechnung sollte man das immer im Hinterkopf behalten.
Viele Probleme von Schülern ergeben sich auch daraus, daß sie am *Ende* vor lauter Rechnungen gar nicht mehr wissen, was sie am *Anfang* eigentlich gewollt haben. In unserem Fall schreibe man sich also ruhig mal dick drüber: "Gesucht ist EIN x" und antworte am Ende: "x ist soundso".
Es ist wie mit einem Reisenden: er muß *vorweg* wissen, wohin er will (z.B. nach Rom), und er muß dieses Ziel *beim* Wandern im Auge behalten. Wenn er das Ziel vergißt, kommt er später in Kleindingsdorf statt in Rom an und wundert sich nichtmal, ja, er hält sogar die Dorfkirche von Kleindingsdorf für den Petersdom.

Zurück zu unseren Gleichungen. Fangen wir mit dem sehr einfachen Beispiel x + 2 = 3 von oben an. Wir wissen bereits, daß das nur für x = 1 funktioniert. Dieses Wissen soll uns als Kontrolle dienen, wir wollen x jetzt aber mal *berechnen*. Wenn x = ... unser Ziel ist, so stört in x + 2 = 3 *links* noch die 2. Wir müssen sie irgendwie da "wegkriegen". Weil diese 2 bisher links *addiert* wurde, müssen wir das Gegenteil tun, also 2 *subtrahieren*. Solche Rechnungen muß man aber immer auf *beiden* Seiten einer Gleichung durchführen, sonst gerät die Gleichung wie eine Waage ins Ungleichgewicht. Wir rechnen also

$$\begin{aligned} & x + 2 = 3 \quad | -2 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 2 - 2 = 3 - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 0 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1 \end{aligned}$$

Damit haben wir unser Ziel, nämlich die Form x = ... erreicht: wir können ablesen, daß x gleich 1 ist. (Genaueres zur *Probe* siehe unten.)
Aus der Rechnung oben kann man noch drei andere wichtige Sachen lernen:

a) Es kann gar nicht schaden, möglichst *viele* Zwischenschritte zu machen. Nur so erreicht man, daß man immer weiß, was man gerade tut, und daß man sich nicht verrechnet. Und jeder weiß doch, wie gerne er sich verrechnet. In der Mathematik ist aber selbst der *kleinste* Rechenfehler "tödlich": damit geht die *ganze* Aufgabe den Bach runter: das Ergebnis wird *falsch*, und in der Mathematik gibt es eben nur "total falsch" oder "total richtig", aber kein "halbwegs richtig".
Viele Schüler meinen, unter Zeitdruck *mehrere* Umformungen/Rechnungen auf einmal machen zu müssen, oder sie trauen sich in ihrem Größenwahn zu, *mehrere* Rechnungen *gleichzeitig* übersehen zu können. Nach einer statistischen Erhebung aus einer Klassenarbeit geht das in 85 % der Fälle "in die Hose": in der Regel endet solcher Ehrgeiz damit, daß jede der Rechnungen nur *teilweise* durchgeführt wird, daß man die Rechnungen *vermischt* (also z.B. links addiert und rechts dividiert) oder daß der Schüler *völlig* den Überblick verliert.
Man nehme sich also die Zeit für *Einzelschritte*. Auf die Dauer zahlt sich das auch zeitlich aus.

b) Man schreibe nicht nur alle Zahlen und Buchstaben sehr *deutlich* und *vergleiche* immer nochmals mit der Aufgabenstellung/vorherigen Zeile, sondern schreibe Zusammengehöriges möglichst *untereinander* (oben z.B. die 0 unter +2 - 2). Das erleichtert ungeheuer den Überblick, insbesondere für später eventuell nötige Verbesserungen. Durch solches Untereinanderschreiben weiß man immer genau, was *woher* kommt und muß sich zudem immer nur um *Teile* von Gleichungen kümmern.

c) *Nachträgliche* Korrekturen werden auch dadurch viel einfacher, daß man hinter jeder Zeile kurz notiert, was man zur nächsten hin verändern will (oben z.B. | - 2). Dann weiß man auch Stunden später noch, was man eigentlich *gewollt* hat, und kann überprüfen, ob man es dann auch tatsächlich *getan* hat. Schreibt man es hingegen *nicht* dahinter, so ergibt sich eventuell das Problem, aus einer *falschen* Rechnung rekonstruieren zu müssen, was man eigentlich gewollt hat. Angenommen also, man hat versehentlich links addiert und rechts dividiert und merkt 10 Minuten später, daß das Ergebnis nicht stimmen kann. Dann muß man die Rechnung nochmals durchgehen und aus der falschen Zeile herausbekommen, was man eigentlich gewollt hat. Das läßt sich aber gar nicht entscheiden: wollte man denn eigentlich nur *addieren* oder nur *dividieren*? Da bleibt einem nur eins: die *ganze* Aufgabe wegschmeißen und ganz von vorne anfangen. Hier wird auch deutlich, daß anfängliche Zeitersparnis am Ende sehr viel Zeit kosten kann.

Aber wieder zurück zu unseren Gleichungen. Gegeben sei folgende Aufgabe:

$$\frac{8x + 1000}{5} = 50\,000$$

Einheitsfrage ist immer, was *ein* x ist. Die Aufgabe ist nun aber so kompliziert, daß keiner das auf Anhieb sieht. Also gehen wir systematisch auf unser Einheitsziel zu, am Ende links *nur noch* x stehen zu haben. Dazu überlegen wir, was bislang links noch *stört*. Und das ist eine ganze Menge:

1. Wir wollen nicht wissen, was <u>8</u>x ist, sonder nur, was <u>1</u>•x bzw. x ist. Also stört die 8.
2. Schon gar nicht interessiert uns, was 8x <u>+ 1000</u> ist. Also stört die 1000.
3. Am allerwenigsten interessiert uns, was
$$\frac{8x + 1000}{\underline{5}}$$
ist. Also stört auch die 5 im Nenner.

Zusammenfassend kann man also sagen: uns stört links *alles* außer eben dem kleinen Buchstaben x. Damit haben wir aber schon wieder ein Standardzept:

Wir wollen auf der einen Seite (hier links) nacheinander *alles* außer dem x beseitigen. Da soll wirklich nur der nackte Buchstabe x stehen bleiben.

Überlegen wir uns dazu ganz langsam, wie wir das nacheinander erreichen. Die Frage ist also vor allem: was beseitigen wir als *erstes*?

Auch da gibt es eine einfache Standardregel:

Man beseitigt jeweils das von x *Entfernteste*.

Schauen wir uns an unserem Beispiel an, was da das von x Entfernteste ist:

- als erstes wird x mit 8 multipliziert (denn die Punktrechnung in "8x = 8•x" geht vor der Strichrechnung "+")
- zu dem Ergebnis 8x wird 1000 addiert
- das ganze neue Ergebnis 8x + 1000 wird durch 5 dividiert

Die *letzte* Rechnung ist also die Division durch 5. Nach der letzten Standardregel müssen wir diese 5 also als *erste* beseitigen. Da nun aber in der Aufgabe bisher durch 5 *dividiert* wurde, müssen wir <u>beide</u> Seiten der Gleichung mit 5 *multiplizieren*, um die Division *rückgängig* zu machen (denn die Multiplikation ist die *Gegenrechnung* zur Division). Wir gehen also folgendermaßen vor:

$$\frac{8x + 1000}{5} = 50\,000 \qquad |\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x + 1000}{5} \cdot 5 = 50\,000 \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x + 1000 = 250\,000$$

Wir verfolgen *weiter* unser Einheitsziel, links *nur noch* x stehen zu haben. Da stören dann also noch die 8 und die 1000. Wie oben gesehen, ist die 1000 entfernter. Also beseitigen wir erstmal diese. Da 1000 bisher *addiert* wurde, machen wir das durch die *Gegenrechnung Subtraktion* rückgängig. Wir subtrahieren also auf beiden Seiten 1000.

$$\begin{aligned} & 8x + 1000 = 250\,000 \qquad | - 1000 \\ \Leftrightarrow\ & 8x + 1000 - 1000 = 250\,000 - 1000 \\ \Leftrightarrow\ & 8x + 0 = 249\,000 \\ \Leftrightarrow\ & 8x = 249\,000 \end{aligned}$$

Wieder erinnern wir uns an unser Einheitsziel, links nur noch x stehen zu haben. Da stört dann nur noch die 8 davor. Um diese zu entfernen, dividieren wir auf beiden Seiten durch 8, um die bisherige Multiplikation rückgängig zu machen:

$$\begin{aligned} & 8x = 249\,000 \qquad |: 8 \\ \Leftrightarrow\ & 8x : 8 = 249\,000 : 8 \\ \Leftrightarrow\ & x = 31\,125 \end{aligned}$$

Endlich haben wir unser Einheitsziel erreicht: links steht nur noch das nackte x, und wir können nun ablesen, daß x genau 31 125 ist.

Manchmal ist die notwendige Gegenrechnung nicht ganz einfach zu sehen. Schauen wir uns dazu die Beispiele

a) $x + 2 = 3$ b) $2 + x = 3$ c) $x \cdot 2 = 4$ d) $2 \cdot x = 4$ e) $2 - x = 6$

an.

Zu a): $x + 2 = 3$

Um die 2 links zu beseitigen, müssen wir die Gegenrechnung zur bisherigen Rechnung (+2) durchühren, also auf beiden Seiten der Gleichung 2 rechnen. Das ist sehr einfach zu finden, weil bisher deutlich ein

Plus vor der 2 stand.

Zu b): $2 + x = 3$

Unser Patentrezept von eben funktioniert *nicht mehr* so einfach, weil vor der 2 *kein* Zeichen mehr steht, zu dem wir einfach das Gegenzeichen aussuchen könnten. Nun wissen wir allerdings: die Addition ist kommutativ, und daraus folgt: $2 + x = x + 2$. Hier sieht man deutlich, daß 2 *addiert* worden ist. Daraus folgt: wir müssen 2 wie in a) auf beiden Seiten subtrahieren.

Zu c): $x \cdot 2 = 4$

Um die 2 links zu beseitigen, müssen wir die Gegenrechnung zur bisherigen Rechnung (•2) durchühren, also auf beiden Seiten der Gleichung :2 rechnen. Das ist sehr einfach zu finden, weil bisher deutlich ein Malzeichen vor der 2 stand.

Zu d): $2 \cdot x = 3$

Unser Patentrezept von eben funktioniert nicht mehr so einfach, weil vor der 2 *kein* Zeichen mehr steht, zu dem wir einfach das Gegenzeichen aussuchen könnten. Nun wissen wir allerdings: die Multiplikation ist kommutativ, und daraus folgt: $2 \cdot x = x \cdot 2$. Hier sieht man deutlich, daß mit 2 multipliziert worden ist. Daraus folgt: wir müssen wie in c) auf beiden Seiten durch 2 dividieren.

Zu e): $2 - x = 6$

Wieder funktioniert unser Patentrezept nicht mehr so einfach, weil vor der 2 *kein* Zeichen steht, zu dem wir einfach das Gegenzeichen aussuchen könnten.
Leder ist die Subtraktion auch nicht kommutativ, wir können also *nicht* umschreiben 2 - x = x - 2.
Da gibt es nun zwei mögliche Lösungswege:

1. Bisher wird x subtrahiert. Während wir die Unbekannte x sonst immer auf der Seite *belassen*, wo wir es antreffen, können wir es jetzt ausnahmsweise mal auf beiden Seiten addieren und erhalten 2 = x + 6. Sowas aber können wir bereits lösen (-6 auf beiden Seiten).
2. Wir erinnern uns, daß zwar nicht die Subtraktion, wohl aber die Addition kommutativ ist, wobei wir *Vorzeichen* mitschleppen müssen:
   $$2 - x = (+2) + (-x) = (-x) + (+2) = -x +2$$
   Damit lautet unsere Aufgabe -x + 2 = 6, und wir sehen: da die 2 bisher addiert wurde, müssen wir sie jetzt auf <u>beiden</u> Seiten subtrahieren. Wir erhalten: -x = 4. Nun stört uns vor dem -x nur noch das Minus. Wie aber entfernen wir nur ein *Vorzeichen*? Erinnern wir uns dazu daran, daß -x = (-1)•x Dann lautet unsere Aufgabe: (-1)•x = 4. Da bisher mit (-1) multipliziert wurde, brauchen wir jetzt nur noch auf beiden Seiten durch (-1) zu dividieren, und wir erhalten: x = (+4):(-1) = 4:1 = 4
   (halten wir fest: Multiplikation mit (-1) bzw. Division durch (-1) ändert *nur das Vorzeichen, nicht aber den Zahlenwert*)

Bei Gleichungen können sich noch andere Probleme ergeben. Schauen wir uns dazu ein weiteres Beispiel an:
$$7x + 4 + 3x = 19$$
Man könnte nun meinen, das sei ja gar nicht mehr unsere typische Aufgabenart mit *einer* Unbekannten. In Wirklichkeit ist es aber so, daß weiterhin nur *eine* Unbekannte vorkommt, nämlich *nur* das x, und *keine weitere* Unbekannte, also z.B. y oder z. Nun kommt hier die *eine* Unbekannte x *mehrfach* vor, nämlich in 7x *und* in 3x.
Unser erstes Ziel ist es hier, daß das x wie in den Aufgaben oben nur *einmal* vorkommt. Dazu muß man sich an das Kommutativgesetz bzgl. der Addition erinnern, woraus sich ergibt:
$$7x + 4 + 3x = 19$$
$$\Leftrightarrow \quad 7x + 3x + 4 = 19$$
$$\Leftrightarrow \quad 10x + 4 = 19$$
Damit haben wir unser Ziel erreicht: der Buchstabe x kommt nur noch *einmal* vor, und nun können wir wie oben weiterrechnen, also nach x auflösen (das soll hier aus Platzgründen nicht mehr geschehen. Es ergibt sich $x = \frac{3}{2}$).

Ein weiteres Problem wird an folgender Aufgabe deutlich:
$$5x + 3 = 2x + 7$$
Auch hier kommt nur die *eine* Unbekannte x vor, aber leider nicht nur - wie eben - *mehrfach*, sondern zusätzlich auch noch auf *beiden Seiten* der Gleichung. Da wir gewohnt sind, x nur auf *einer* Seite zu haben, sorgen wir als erstes dafür. Entscheiden wir uns also z.B. dafür, daß wir x nur noch links haben wollen, so stört das 2x rechts. Dort wird 7 zu 2x addiert oder umgekehrt 2x zu 7. Um das rückgängig zu machen, müssen wir also auf <u>beiden</u> Seiten 2x subtrahieren:
$$5x + 3 = 2x + 7 \quad | -2x$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x + 3 - 2x = 2x + 7 - 2x$$
Wiederum mit dem Kommutativgesetz für die Addition erhalten wir:
$$5x + 3 - 2x = 2x + 7 - 2x$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x - 2x + 3 = 2x - 2x + 7$$

$\Leftrightarrow \quad 3x \quad + 3 \quad = \quad 0 \qquad + 7$
$\Leftrightarrow \quad 3x \quad + 3 \quad = \qquad\quad 7$

Damit haben wir unser Ziel erreicht, x nur noch auf *einer* Seite (links) und nur noch *einmal* zu haben. Das aber können wir nach dem üblichen Verfahren weiterberechnen (auch das soll hier nicht mehr geschehen. Es ergibt sich $x = \frac{4}{3}$).

Bisher haben wir uns immer damit beschäftigt, *wie* man solche Gleichungen lösen kann. Nun soll es kurz darum gehen, *was* da *rauskommen* kann. Das kann man an drei sehr einfachen, nur leicht unterschiedlichen Aufgaben klarmachen:

1. $x + 2 = \quad 4$
2. $x + 2 = x + 4 - 1$
3. $x + 2 = x + 4 - 2$

Fassen wir in 2. und 3. zusammen, so ergeben sich:

1. $x + 2 = \quad 4$
2. $x + 2 = x + 3$
3. $x + 2 = x + 2$

In allen drei Gleichungen stört uns links noch die 2, die wir also in allen drei Gleichungen jeweils auf <u>beiden</u> Seiten subtrahieren:

1. $x + 2 - 2 = \quad 4 - 2 \;\Leftrightarrow x = \quad 2$
2. $x + 2 - 2 = x + 3 - 2 \;\Leftrightarrow x = x + 1 \;|{-x} \;\Leftrightarrow\; 0 = 1$
3. $x + 2 - 2 = x + 2 - 2 \;\Leftrightarrow x = x$

Damit ergeben sich als Lösungsmengen:

1. L = {2}, also *eine* Lösung
2. L = {}, also *leere* Menge: 0 = 1 ist immer falsch, egal, wie ich x in 2. anfangs wähle. Es gibt *keine* Lösung.
3. $L = \mathbb{R}$, denn für *alle* Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt x = x. Man sagt auch: Gleichung 3. ist "*allgemeingültig*"

Lineare Gleichungen haben also genau *eine* Lösung, gar *keine* Lösung oder sind *allgemeingültig*, also für *alle* x lösbar.

Nun werden einige vielleicht schreien: "Um Gottes willen, wo bleibt meine *eindeutige* Lösung?" oder "Ich kann doch wohl noch verlangen, daß *eine* eindeutige, klare Lösung rauskommt!" Schauen wir uns dazu mal folgende Probleme an:
in 2. hatten wir als Zwischengleichung: x = x + 1. Das kann man auch in folgende Aufgabe übersetzen: welche Person x ist einen Meter größer als sie *selbst*? Das ist für *keine* Person möglich, also ist die Lösungsmenge *leer*.
in 3. hatten wir als Endgleichung: x = x. Das kann man auch in folgende Aufgabe übersetzen: welche Person x ist *genauso* groß wie sie selbst? Das ist offensichtlich bei *jeder* Person richtig, also ist x = x *allgemeingültig*.
Man wird sich also an den Gedanken gewöhnen müssen: die Mathematik behandelt keineswegs nur *eindeutig* lösbare Probleme, sondern auch *überhaupt nicht* oder *allgemein* lösbare. Sie ist dazu gezwungen, weil man oft *anfangs* noch gar nicht weiß, welcher Fall vorliegt (vgl. die sehr ähnlichen Anfangsgleichungen 1., 2. und 3.).
Genau *eine* Lösung zu haben, ist also sicherlich die *angenehmste* Lösung, aber *keineswegs der Regelfall*. Die Mathematiker können sich sogar darüber freuen, wenn sie beweisen

können, daß eine Gleichung *allgemeingültig* oder *nicht* lösbar ist. Solche Gleichungsumformungen sind sogar eigentlich etwas besonders Tolles: in *wenigen* Schritten wird gezeigt, daß etwas für *unendlich viele* Fälle *gilt* oder für unendlich viele/alle Fälle *schiefgeht*. Wollte man das durch Ausprobieren herausbekommen, so könnte man in alle Ewigkeit rechnen und würde doch niemals fertig.
Es ist doch fein zu wissen, daß etwas *nie* gilt. Dann kann man sich die weitere (aussichtslose) Suche nach versteckten Lösungen sparen.
Ebenso steht es, wenn man nachgewiesen hat, daß es genau *eine* Lösung gibt: man kann sich die (aussichtslose) Suche nach *weiteren* Lösungen sparen, denn dann weiß man: für alle *anderen* Zahlen funktioniert es *nicht*.
Zuguterletzt: hat man nachgewiesen, daß eine Gleichung *allgemeingültig* ist, so kann man sich sicher sein, daß es *keine* Zahl gibt, die die Gleichung *nicht* löst. Auch die (aussichtslose) Suche nach solch einer versteckten Zahl kann man sich also sparen.
Zusammenfassend kann man also sagen: die Mathematiker wollen immer mit *absoluter* Sicherheit wissen, für welche Zahl genau etwas *funktioniert* oder *nicht* funktioniert. Und egal, ob man genau *eine* Lösung, *Unlösbarkeit* oder *Allgemeingültigkeit* nachweist: am Ende weiß man für *jede* Zahl, ob sie die Ausgangsgleichung erfüllt oder nicht.
Weil Gleichungen auf Anhieb oftmals nicht anzusehen ist, ob sie (eindeutig) lösbar sind, ist eigentlich auch obige Unterscheidung in Unbekannte/Variable sinnlos.

Die Probe

Schauen wir uns als Beispiel nochmal die einfache Rechnung von oben an:

$$
\begin{array}{llll}
 & x + 2 = 3 & \mid -2 & (1) \\
\Leftrightarrow & x + 2 - 2 = 3 - 2 & & (2) \\
\Leftrightarrow & x + 0 = 1 & & (3) \\
\Leftrightarrow & x = 1 & & (4)
\end{array}
$$

Ziel der Rechnung war es, die *Anfangsgleichung* (1) so umzurechnen, bis wir da stehen hatten x = ... Dieses Ziel ist mit der Endgleichung (4) erreicht. Das Ergebnis dort, also x = 1, interessiert uns aber nur unsofern, wie es die vorgegebene *Anfangsgleichung* (1) löst. Eigentliches Ziel des ganzen Rechenaufwandes bei solchen Gleichungen ist es doch, dasjenige x herauszufinden, das die *Anfangsgleichung* (1) löst. Durch Äquivalenzumformungen (vgl. Sonderkapitel) hatten wir dafür gesorgt, daß das x in (1) und das in (4) tatsächlich *dasselbe* ist. Es wäre ja auch völlig witzlos, in (4) ein x zu erhalten, das *nicht* die Anfangsgleichung (1) löst.
Obwohl wir vom *Prinzip* her richtig gerechnet haben, könnte uns allerdings einer der beliebten *Rechenfehler* unterlaufen sein. Um zu *überprüfen*, ob das der Fall ist, verfährt man folgendermaßen:

Probe: man setzt grundsätzlich das Ergebnis der *End*zeile [hier (4)] in die *Anfangs*zeile [hier (1)] ein.

Das ist aus zwei Gründen sinnvoll:
1. interessiert an dem x der *End*zeile (4) ja nur, daß es die *Anfangs*zeile (1) löst
2. wäre es sinnlos, daß Ergebnis der Endzeile (4) in eine *andere* Zeile, z.B. (2) einzusetzen. Angenommen, das x aus (4) löst tatsächlich (2). Das heißt doch nur, daß wir zwischen (2) und (4) keinen Fehler gemacht haben, schließt aber *nicht* aus, daß uns zwischen (1) und (2) ein Fehler unterlaufen ist.

Proben sollte man, wenn irgend möglich, *immer* machen (insbesondere bei sehr *langen* Rechnungen): bei den meisten von uns ist es doch weit eher möglich, daß sie sich *ver*rechnet als daß sie *richtig* gerechnet haben.
Nun mag man denken: die Aufgabe $x + 2 = 3$ ist so einfach, daß man sich da gar nicht verrechnen *kann*. Also ist man verführt, alle Kommentare (| -2), Zwischenschritte und die Probe *wegzulassen*. Weil man das aber nicht an *einfachen* Beispielen wie diesem geübt hat, kann man es dann später auch nicht bei sehr *komplizierten* (seitenlangen) Rechnungen - und dann rächt es sich.

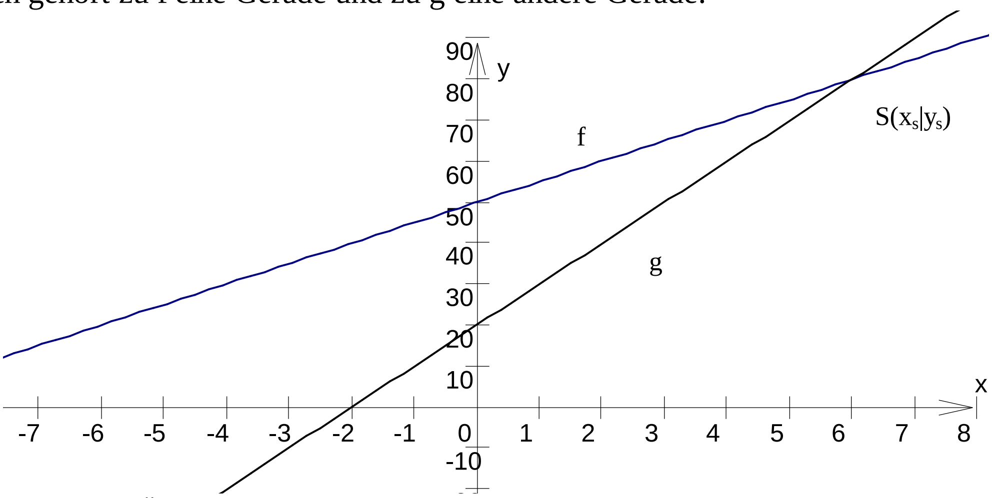
Gleichungssysteme aus linearen Gleichungen

A) Gleichungssysteme aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

vgl. auch „Lösen einer Textaufgabe“

Welchem Tennisclub sollte ich beitreten, wenn der Tennisclub A eine *hohe Aufnahmegebühr* (z.B. 50 DM) und einen *geringen Stundenpreis* (z.B. 5 DM) und der Tennisclub B eine *niedrige Aufnahmegebühr* (z.B. 20 DM) und einen *hohen Stundenpreis* (z.B. 10 DM) hat?
Wenn wir das "mathematisieren", also in eine Gleichung bringen, so ergibt sich (für x = Stundenzahl und y = Gesamtpreis nach x Stunden)
- für Tennisclub A die Gesamtpreisfunktion f: y = 5x + 50,
- für Tennisclub B die Gesamtpreisfunktion g: y = 10x + 20.

f und g sind dabei *lineare* Funktionen. Jede der beiden Funktionen ist nicht eindeutig lösbar, da ich für die Variable x beliebige Zahlen aus (später) einsetzen kann und sich je nach Wahl von x verschiedene y ergeben (wirklich *sinnvoll* ist in dieser Aufgabe allerdings nur x e N: man nimmt ja nur *ganze* Stunden).
Graphisch gehört zu f eine Gerade und zu g eine andere Gerade:



(man beachte: der Übersichtlichkeit halber hat die x-Achse einen anderen Maßstab als die y-Achse)

Wir stellen fest: die beiden Geraden schneiden sich im Schnittpunkt $S(x_S \mid y_S)$. Schnittpunkt bedeutet aber, daß S *sowohl* auf der Geraden von f *als auch* auf der Geraden von g liegt. Oder anders gesagt: S ist der einzige Punkt, der

a) sowohl auf der Geraden von f

b) als auch auf der Geraden von g liegt.

zu a): wenn $S(x_S|y_S)$ auf der Geraden von f liegt, so bedeutet das, daß die Koordinaten von S die Funktionsgleichung f: y = 5x + 50 erfüllen müssen, d.h.

$$y_S = 5x_S + 50 \qquad (A)$$

zu b): wenn $S(x_S \mid y_S)$ auf der Geraden von g liegt, so bedeutet das, daß die Koordinaten von S die Funktionsgleichung g: y = 10x + 20 erfüllen müssen, d.h.

$$y_S = 10x_S + 20 \qquad (B)$$

Soll nun S auf der Geraden von f *und* der Geraden von g liegen, so müssen die Gleichungen (A) und (B) *gleichzeitig* erfüllt sein. Oder wir sagen: wir suchen dasjenige S, das Gleichung (A) *und* Gleichung (B) erfüllt (es reicht uns also nicht, wenn nur *eine* der Gleichungen erfüllt wird, also (A) oder (B)). Weil wir später mit vielen Gleichungssystemen untereinander arbeiten werden, fassen wir zusammengehörige Gleichungen immer durch eine eckige Klammer zusammen, so daß wir für das *Gleichungssystem* aus den beiden Einzelgleichungen (A) und (B) erhalten:

$$\begin{cases} y_S = 5x_S + 50 \\ y_S = 10x_S + 20 \end{cases} \qquad (C)$$

Nennen wir sowas ein "Gleichungssystem", so gilt also:

Mit Gleichungssystemen aus linearen Gleichungen berechnet man (eventuell vorhandene) *Schnittpunkte* der zugehörigen Geraden.

Weiterhin können wir aus unserem Beispiel schon folgern:

Während die *Einzel*gleichungen eines Gleichungssystems grundsätzlich nicht eindeutig lösbar sind, kann dies für die Einzelgleichungen *zusammen* durchaus möglich sein. ("kann", weil wir noch sehen werden, daß Gleichungssysteme *auch nicht immer* [eindeutig] lösbar sind)

Wenn wir nun der Vereinfachung halber die Indizes weglassen, schreibt sich unser obiges Gleichungssystem (C) folgendermaßen:

$$\begin{cases} y = 5x + 50 \\ y = 10x + 20 \end{cases} \qquad (C)$$

Die Frage ist nun, wie man daraus das x und das y berechnen kann, die *beide* Gleichungen erfüllen (geometrisch: wie berechnet man die *Koordinaten* des Schnittpunkts beider Geraden?).

Überlegen wir uns dazu erstmal, was an dem Gleichungssystem bisher so unangenehm ist: doch wohl, daß in jeder Gleichung *zwei* Unbekannte vorkommen. Wir können aber nur Gleichungen mit *einer* Unbekannten lösen. Daraus folgt:

<u>Einheitsziel</u> (aller Verfahren): nacheinander immer mehr Unbekannte "rausschmeißen", bis wir eine Gleichung mit nur noch *einer* Unbekannten haben, die wir dann problemlos lösen können (wenn sie lösbar *ist*).

In unserem Fall ist besonders geeignet das

<u>Gleichsetzungsverfahren</u>

denn links steht beidesmal das *gleiche* y. Wir können also auch schreiben

$$\begin{cases} y = 5x + 50 \quad (A) \\ \| \\ y = 10x + 20 \quad (B) \end{cases}$$

Damit ergibt sich:

$$\underset{(A)}{5x + 50} = y = \underset{(B)}{10\,x + 20}$$

oder kurz

$$\begin{cases} y = 5x + 50 & (A) \\ 5x + 50 = 10x + 20 & (E) \quad [(A) = (B)] \end{cases}$$

Man sagt auch: wir haben die Zeile (A) und die Zeile (B) des ursprünglichen Gleichungssystems "gleichgesetzt", und notiert das hinter der neuen Zeile (E) als (A) = (B).
Mit Gleichung (E) haben wir nun ganz nebenbei schon unser Einheitsziel erreicht, nämlich eine Gleichung mit nur noch *einer* Unbekannten. Die können wir aber bereits lösen:

$$\begin{aligned} & 5x + 50 = 10x + 20 \quad | -5x \\ \Leftrightarrow\ & 5x + 50 - 5x = 10x + 20 - 5x \\ \Leftrightarrow\ & 50 = 5x + 20 \quad | -20 \\ \Leftrightarrow\ & 50 - 20 = 5x + 20 - 20 \\ \Leftrightarrow\ & 30 = 5x \quad | :5 \\ \Leftrightarrow\ & 30:5 = 5x:5 \\ \Leftrightarrow\ & 6 = x \end{aligned}$$

Wir wissen also bereits: die x-Koordinate des Schnittpunkts S ist 6, also S(6 | ?). Im Laufe der Rechnung war es ja geradezu unser Ziel, das y erstmal zu *verlieren* (um nur noch die *eine* Unbekannte x zu haben). Jetzt im Nachhinein müssen wir uns aber daran erinnern, daß dieses y natürlich *auch noch* zu berechnen ist. Das geht, indem wir x = 5 in *eine der beiden Anfangsgleichungen* (A) oder (B) einsetzen. Es ist egal, in welche der beiden Gleichungen wir einsetzen, denn wir wissen ja, daß x *beide* Gleichungen gleichermaßen erfüllt. Setzen wir also in (A) $y = 5x + 50$ ein. Wir erhalten $y = 5\cdot 6 + 50$, also plötzlich eine Gleichung, in der nur noch die *eine* Unbekannte y vorkommt. Halten wir also sofort wieder fest:

Einheitsregel: haben wir erstmal *eine* Unbekannte berechnet, so setzen wir sie in vorherige Gleichungen ein, um auch die *andere*(n) Unbekannte(n) zu berechnen.

In unserem Fall ergibt sich ganz einfach $y = 5\cdot 6 + 50 = 30 + 50 = 80$ bzw. die y-Koordinate 80 von S, also S(6;80). Die Lösungsmenge besteht aus diesem einen *Punkt* und ist daher $\mathbb{L} = \{(6 \mid 80)\}$.
Da anfangs eine *Text*aufgabe stand, müssen wir nun das Ergebnis wieder "*ent*mathematisieren" und in den Text *zurückübersetzen*: bei x = 6 Stunden beläuft sich bei beiden Vereinen der Gesamtpreis auf y = 80 DM.
Aus der Zeichnung ersehen wir außerdem, daß
- *bis* x = 6 Stunden der Graph von g *unter* dem von f liegt, also Club B günstiger ist
- *bei* x = 6 Stunden die Graphen von g und h *gleich* hoch liegen, also beide Clubs gleich günstig sind
- *ab* x = 6 Stunden der Graph von g *über* dem von f liegt, also Club A günstiger ist.

Oder kurz: will ich sehr wenig (unter 6 Stunden) spielen, so ist Club B günstiger, will ich hingegen sehr viel (über 6 Stunden) spielen, so ist trotz abschreckend hoher Aufnahmegebühr Club A günstiger.

Schauen wir uns nun schonmal den Fall an, daß es *keine* Lösung gibt. Solch einen Fall können wir uns sogar selbst herleiten: da mit Gleichungssystemen die Schnittpunkte zweier Geraden berechnet werden, gibt es *keine* Lösung, wenn es keinen *Schnittpunkt*, also keinen gemeinsamen Punkt der beiden Geraden gibt. Das ist nur dann möglich, wenn die beiden Geraden *parallel*, aber nicht gleich sind, wenn sie also die *gleiche Steigung*, aber *unterschiedliche y-Achsenabschnitte* haben, also z.B. bei

$$\begin{cases} y = 3x + 4 & (A) \\ y = 3x + 5 & (B) \end{cases}$$

Durch Gleichsetzung von (A) und (B) ergibt sich:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x + 4 = 3x + 5 & (A) = (B) \quad |-3x \\ y = 3x + 5 & (B) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 4 = 5 & (C) \\ y = 3x + 5 & (B) \end{array} \right.$$

Die Gleichung (C) ist nun aber unerfüllbarer Blödsinn. Also ist die Lösungsmenge leer, $\mathbb{L} = \{\}$.

Wir haben also gesehen, daß die Lösungsmenge *ein* oder *gar kein* Element enthalten kann. Der *dritte* mögliche Fall ist, daß sie *unendlich viele* Elemente enthält. Wieder gilt: da mit den Gleichungssystemen Schnittpunkte von Geraden berechnet werden, kann ein Gleichungssystem nur dann *unendlich viele* Lösungen haben, wenn die beiden Geraden unendlich viele gemeinsame Punkte haben. Das geht aber nur, wenn die beiden Geraden *gleich* sind, also die *gleiche Steigung und* den *gleichen y-Achsenabschnitt* haben, also z.B.

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = 3x + 4 & (A) \\ y = 3x + 4 & (B) \quad |\cdot 2 \end{array} \right.$$

Nun kann man einwenden, daß es da ja nicht mehr viel zu rechnen gebe, da ja jeder auf Anhieb *sehe*, daß die beiden Geraden gleich sind, und somit klar sei, daß sie unendlich viele gemeinsame Punkte hätten. Wir multiplizieren daher mal die ganze Gleichung (B) mit 2, um Gleichungen zu erhalten, denen man ihre Gleichheit *nicht* sofort ansieht (es passiert oft, daß man erst langwierig *rechnen* muß, um die Gleichheit überhaupt erst zu sehen). Wir erhalten:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = 3x + 4 & (A) \\ 2y = 6x + 8 & (B) \end{array} \right. \quad (C)$$

Da wir nicht direkt gleichsetzen können, führen wir ein anderes Verfahren ein:

Einsetzungsverfahren

Es fällt auf, daß im Gleichungssystem (C) das y in (A) *einmal*, in (B) aber *doppelt* vorkommt. Wir können daher das y aus (A) in (B) *einsetzen* und erhalten:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y = 3x + 4 & (A) \\ 2(\underbrace{3x + 4}_{y \text{ nach } (A)}) = 6x + 8 & (D) \quad (A) \ \underline{\text{in}}\ (B) \end{array} \right.$$

Damit haben wir wieder unser Einheitsziel erreicht, in einer Gleichung (D) nur noch *eine* Unbekannte zu haben. Lösen wir dort auf, so erhalten wir:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y = 3x + 4 & (A) \\ 6x + 8 = 6x + 8 & (D) \end{array} \right.$$

Die Gleichung (D) ist nun aber offensichtlich allgemeingültig, d.h. für *jedes* $x \in \mathbb{Q}$ (später $\mathbb{R}$) lösbar. Und abhängig von diesem x ergibt sich dann y als $y = 3x + 4$. Die beiden Geraden haben also *alle* Punkte gemeinsam, und somit enthält die Lösungsmenge *unendlich viele* Punkte der Form $P(x|3x+4)$. Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{(x \mid 3x + 4);\ x \in \mathbb{Q}\}$

Wir halten schonmal allgemein fest:

Gleichungssysteme aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten können eine keine unendlich viele Lösungen haben.

Der letzte Fall bedeutet genau genommen: die Gleichung ist auf dem *ganzen* Definitionsbereich (später) lösbar.
Unmöglich ist es also, daß ein Gleichungssystem *endlich* viele, aber *mehr als eine* Lösung hat, z.B. 3 oder 17 Lösungen.

Vorsorglich halten wir außerdem schonmal fest:

Es sind immer *alle drei* Verfahren (Gleichsetzungs-, Einsetzungs-, Additionsverfahren) *gleichberechtigt* anwendbar. Man wählt immer nur das gerade *günstigste* Verfahren. Außerdem führen alle drei Verfahren zum *gleichen Ergebnis*.

Additionsverfahren

Oft sind lineare Gleichungssysteme in folgender Form gegeben:

$$\left\langle \begin{array}{ll} 8x - 2y = 10 & (A) \\ 5x + y = 6 & (B) \end{array} \right.$$

Hier lassen sich also die beiden Gleichungen nicht mehr direkt *gleichsetzen* (mit einigen Tricks könnte man allerdings dafür sorgen) und auch nur mit einiger Mühe *einsetzen*. Außerdem haben die beiden Gleichungen nicht die typische Funktionenform y = ... Es ist also nicht auf Anhieb deutlich, daß hier auch wieder zwei *lineare* Gleichungen vorliegen (man könnte ja beide Gleichungen schnell auf die Form y = ... bringen) und geometrisch gesehen auch wieder der *Schnittpunkt* berechnet wird.
Wir wollen dazu ein neues Verfahren anwenden, das vom Ansatz her dennoch ähnlich wie das Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren funktioniert:

Einheitsansatz: wir suchen in den verschiedenen Zeilen des Gleichungssystems nach *gleichen oder ähnlichen Summanden*.

In unserem Fall stellen wir z.B. fest, daß y in (A) *zweifach*, in (B) aber nur *einfach* vorkommt. Da liegt es nahe, dafür zu sorgen, daß y auch in (A) nur einfach oder auch in (B) zweifach vorkommt.
Wir wählen hier mal den letzteren Fall, wollen also erreichen, daß y auch in (B) *zweifach* vorkommt. Also multiplizieren wir ganz (B) mit 2:

$$\left\langle \begin{array}{lll} 8x - 2y = 10 & (A) & \\ 5x + y = 6 & (B) & |\cdot 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} 8x - 2y = 10 & (A) \\ 10x + 2y = 12 & (C) \end{array} \right. \qquad (D)$$

Sofort formulieren wir als weitere

Einheitsregel: unveränderte Zeilen werden weiter mitgeschleppt.

Das ist zwar mehr Schreibarbeit, hat aber gute Gründe: wir werden später noch sehen, daß man dann nach einem sehr übersichtlichen (Gaußschen) Schema rechnen kann und keine Zeile und damit Unbekannte *verliert* (denn erinnern wir uns: habe ich x [die x-Koordinate des Schnittpunkts] berechnet, muß ich auch noch y [die y-Koordinate des Schnittpunkts] berechnen bzw. umgekehrt).

Im Gleichungssystem (D) fällt nun auf, daß minus 2y und plus 2y direkt *übereinander* stehen. Würde man sie direkt addieren, so ergäbe sich 2y + 2y = 0, womit wir schon das Einheitsziel erreicht hätten, eine Unbekannte (hier y) herauszuwerfen. Nun darf ich aber natürlich nicht einfach *Teile* von Gleichungen addieren. Glücklicherweise kann man aber *ganze* Gleichungen addieren. Erinnern wir uns dazu daran, daß eine Gleichung mit einer Waage im Gleichgewicht vergleichbar ist.

- Gleichung (A) kann ich dann auch als eine Waage A auffassen, bei der
  links 8x - 2y und
  rechts 10 liegen:

8x - 2y　　　10　　　Waage A

und beide Seiten *gleichschwer* sind

- Gleichung (C) kann ich dann auch als eine Waage C auffassen, bei der
  links 10x + 2y und
  rechts 12 liegen:

10x + 2y　　　12　　　Waage B

und beide Seiten *gleichschwer* sind.

Dann ist es klar, daß ich auch die beiden

- *linken* Gewichte der Waage A und der Waage B *zusammen* auf die *linke* Seite einer Waage E legen kann, so daß dort (8x - 2y) + (10x +2y) liegt,
- *rechten* Gewichte der Waage A und der Waage B *zusammen* auf die rechte Seite einer Waage E legen kann, so daß dort (10) + (12) liegt,

und daß sich dann die beiden Waagschalen von Waage E im *Gleichgewicht* befinden:

8x - 2y　　　10　　　Gewichte der Waage A

10x + 2y　　　12　　　Gewichte der Waage B

8x - 2y + 10x + 2y　　　10 + 12　　　Gewichte der Waagen A und B *zusammen* auf der Waage E

Also gilt

(8x - 2y) + (10x + 2y) = 10 + 12

Allgemein:

Man darf zwei *Gleichungen* addieren, indem man die *linken* Seiten addiert und die *rechten* Seiten addiert und die beiden Ergebnisse gleichsetzt:

$$\begin{array}{l} a \quad = c \\ \underline{.\quad b = \quad d \quad .} \\ a + b = c + d \end{array}$$

Diese Addition von Gleichungen kann man nun allerdings auch so durchführen, daß man nicht die *ganzen* Seiten addiert, sondern *summandenweise untereinander*. In unserem Fall:

$$\begin{array}{llcl} & 8x \qquad - 2y & = 10 & \text{(A)} \\ & \quad 10x \qquad + 2y & = \quad 12 & \text{(C)} \\ & | \quad | \quad | \quad | & | \quad | & \\ \Leftrightarrow & 8x + 10x \; - 2y + 2y & = 10 + 12 & \text{(E)} = \text{(A)} + \text{(C)} \\ & 10x \qquad + 2y & = 12 & \text{(C)} \end{array}$$

Eine der beiden vorherigen Gleichungen [hier (C)] wird wieder unverändert mitgeschleppt.

Fassen wir (E) zusammen, so ergibt sich:

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{lcl} 18x & = 22 & \text{(E)} \\ 10x + 2y & = 12 & \text{(C)} \end{array} \right.$$

Mit (E) haben wir nun tatsächlich wieder eine Zeile erreicht, in der nur noch *eine* Unbekannte vorkommt. Bevor wir das aber ausrechnen, vertauschen wir noch ganz kurz die Gleichungen und bringen in *Dreiecks*form (indem wir die *ganzen* Zeilen - wa erlaubt ist - vertauschen)

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{rcl} 10x + 2y & = 12 & \text{(C)} \\ 18x & = 22 & \text{(E)} \end{array} \right.$$

Diese Form nennt man wegen der klaren Dreiecksform und ihrem Erfinder Gauß auch "Gaußsches Dreiecksverfahren": es schafft vielleicht einige Schreibarbeit, hat aber den ungeheuren Vorteil, *immer* anwendbar zu sein und dann enorme *Übersichtlichkeit* zu schaffen: man sieht deutlich, wie eine Unbekannte (y) verschwunden ist, die andere (x) jetzt leicht zu berechnen ist und daß das Ergebnis (x = ...) in die *vorherige* Zeile eingesetzt werden muß, um auch y rauszubekommen. Vor allem aber *verliert* man keine Gleichung/Unbekannte. Also dringender Tip: *immer* nach diesem Verfahren rechnen!!!

Damit aber zurück zu unserem Gleichungssystem

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{rcl} 10x + 2y & = 12 & \text{(C)} \\ 18x & = 22 & \text{(E)} \;|: 18 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{rcl} 10x + 2y & = 12 & \text{(C)} \\ x & = \frac{22}{18} = \frac{11}{9} & \text{(E)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 10 \bullet (\frac{11}{9}) + 2y = 12 \quad \text{(E) in (C)} \quad \text{(F)} \\ \\ x = \frac{11}{9} \quad \text{(E)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} \frac{110}{9} + 2y = 12 \quad \text{(F)} \quad | - \frac{110}{9} \\ \\ x = \frac{11}{9} \quad \text{(E)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2y = 12 - \frac{110}{9} = \frac{108}{9} - \frac{110}{9} = - \frac{2}{9} \quad \text{(F)} \ |:2 \\ \\ x = \frac{11}{9} \quad \text{(E)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} y = - \frac{1}{9} \quad \text{(F)} \\ \\ x = \frac{11}{9} \quad \text{(E)} \end{array} \right.$$

Als Schnittpunkt können wir also direkt $S(\frac{11}{9} | -\frac{1}{9})$ ablesen, und damit besteht die Lösungsmenge aus diesem einen *Punkt*, also ist $\mathbb{L} = \{ (\frac{11}{9} | -\frac{1}{9}) \}$.

Manchmal ist es etwas umständlicher, das Additionsverfahren anzuwenden:

$$\left\langle \begin{array}{ll} 3x - 4y = 24 & \text{(A)} \\ -5y + 7x = 24 & \text{(B)} \end{array} \right.$$

Ordnen wir die beiden Gleichungen erstmal so, daß *gleiche* Unbekannte übersichtlich untereinander stehen:

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} 3x \ -4y = 24 & \text{(A)} \\ \\ 7x \ -5y = 24 & \text{(B)} \end{array} \right.$$

Weil rechts beidesmal 24 steht, könnte man auf die Idee kommen, (A) und (B) *gleichzusetzen*. Man erhielte 3x - 4y = 7x - 5y. Damit ist deutlich: das Gleichsetzen bloßer *Zahlen* (statt Unbekannten) hilft nicht weiter, weil in der neuen Gleichung wieder *zwei* Unbekannte sind.

Auch das Additionsverfahren scheint auf den ersten Blick nicht zu klappen, weil es keine vergleichbaren Summanden gibt. Da hilft nur eins: man muß eben dafür *sorgen, daß* gleiche Summanden auftauchen. Der Trick besteht darin, daß man gemeinsame Vielfache von 3x und 7x bzw. von 4y und 5y sucht. Wir wollen das mal für 4y und 5y tun: offensichtlich ist 20y solch ein gemeinsames Vielfaches, denn ich muß 4y mit 5 multiplizieren, um 20y zu erhalten, und 5y mit 4, um ebenfalls 20 y zu erhalten. Nun darf ich natürlich nicht nur *einzelne Summanden* mit einer Zahl multiplizieren, sondern nur *ganze Gleichungen*. Also rechne ich:

$$\left\langle \begin{array}{lll} 3x\ -4y = 24 & (A) & |\cdot 5 \\ 7x\ -5y = 24 & (B) & |\cdot 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} 15x\ -20y = 120 & (A\ ) \\ 28x\ -20y = 96 & (B) \end{array}\right.$$

Damit haben wir 20y in beiden Gleichungen übereinanderstehen, und *fast* scheint das Additionsverfahren anwendbar zu sein. Leider ist aber (-20y) + (-20y) = -40y und nicht Null. Durch *Addition* fällt also keine Unbekannte weg. Da gibt es nur zwei Möglichkeiten:

1. entweder wir sorgen dafür, daß vor dem -20y in (B) ein Plus steht,
2. oder wir *subtrahieren* die Gleichungen die Gleichung (B).

zu 1.: vor dem 20y in (B) erhalten wir ein Plus, wenn wir die *ganze Gleichung* mit (-1) multiplizieren:

$$\left\langle \begin{array}{lll} 15x\ -20y = 120 & (A) & \\ 28x\ -20y = 96 & (B) & |\cdot(-1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{llll} 15x & -20y & = 120 & (A) \\ -28x & +20y & = -96 & (B) \end{array}\right.$$

| | | | | |

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} 15x -28x - 20y + 20y = 120 - 96 & (C) = (A)+(B) \\ 28x\ -20y = 96 & (B) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} -13x = 24 & (C) \\ 28x\ -20y = 96 & (B) \end{array}\right.$$

Damit haben wir in (C) nur noch *eine* Unbekannte und können wie gewohnt nach dem Gaußschen Verfahren weiterrechnen.

zu 2.: Statt die Gleichungen zu addieren, können wir die zweite auch von der ersten *subtrahieren*,

als das <u>Subraktionsverfahren</u> anwenden:

$$\left\langle \begin{array}{llll} 15x & -20y & = 120 & (A) \\ 28x & -20y & = 96 & (B) \end{array}\right.$$

| | | | | |

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} 15x\ -28x - 20y -(-20y) = 120 - 96 & (C) =(A)-(B) \\ 28x\ -20y = 96 & (B) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} -13x = 24 & (C) \\ 28x\ \ 20y = 96 & (B) \end{array}\right.$$

Dann wird wie gehabt weitergerechnet.

<u>Mehr oder weniger Gleichungen</u>

Es ist klar, daß ein Gleichungssystem mit *zwei Unbekannten*, aber nur *einer Gleichung* nicht eindeutig lösbar ist.

(Für die Vektorgeometrie kann man sich aber schonmal merken: hat man *weniger Gleichungen als Unbekannte*, sind also diese Gleichungen *nicht* eindeutig lösbar, so kann man immerhin dadurch *einige* Lösungen finden, daß man für eine/einige Unbekannte *beliebige* konkrete Zahlen einsetzt also z.B.: für y = x + 1 erhalte ich Lösungen, indem ich x = 1 einsetze und y = 2 erhalte oder x = 7 einsetze und y = 8 erhalte.)
Was aber passiert, wenn ich ein Gleichungssystem aus *drei* Gleichungen mit *zwei* Unbekannten habe?
Das kann man sich sehr leicht *geometrisch* klarmachen: wir hatten gesehen, daß man mit Gleichungssystemen *Schnittpunkte* von Geraden berechnet. Bei *drei* Gleichungen berechnet man also den Schnittpunkt von *drei* Geraden. Dabei sind folgende Fälle denkbar:

1. alle drei Geraden sind *gleich*: dann gibt es *unendlich viele* gemeinsame Punkte und hat die Lösungsmenge unendlich viele Elemente rechnerisch:

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} y = 2x + 4 & \text{(A)} \\ y = 2x + 4 & \text{(B)} \\ y = 2x + 4 & \text{(C)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{lll} y = 2x + 4 & \text{(A)} & \\ 2x + 4 = 2x + 4 & \text{(D)} & \text{(A) in (B)} \\ 2x + 4 = 2x + 4 & \text{(E)} & \text{(A) in (C)} \end{array} \right.$$

In (D) und (E) ergeben sich die *gleichen* allgemeingültigen Bedingungen für x, aus (A) erhalten wir dann abhängig y, und die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(x \mid 2x + 4);\ x \in \mathbb{Q}\}$

2. die drei Geraden schneiden sich in *einem Punkt*: dann gibt es genau einen Schnittpunkt, und die Lösungsmenge enthält nur diesen einen Punkt rechnerisch:

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} y = 2x + 4 & \text{(A)} \\ y = 3x + 4 & \text{(B)} \\ y = 4x + 4 & \text{(C)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{lll} y = 2x + 4 & \text{(A)} & \\ 2x + 4 = 3x + 4 & \text{(D)} & \text{(A) in (B)} \ |-2x - 4 \\ 2x + 4 = 4x + 4 & \text{(E)} & \text{(A) in (C)} \ |-2x - 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} y = 2x + 4 & \text{(A)} \\ 0 = x & \text{(D)} \\ 0 = 2x & \text{(E)} \ |:2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} y = 2x + 4 & \text{(A)} \\ 0 = x & \text{(D)} \\ 0 = x & \text{(E)} \end{array} \right.$$

(D) und (E) ergeben die *gleiche* Bedingung x = 0, und mit (A) erhalten wir y = 4. Also ist $\mathbb{L} = \{(0 \mid 4)\}$

3. die drei Geraden schneiden sich in 2 oder gar 3 Punkten, aber es gibt *keinen gemeinsamen Schnittpunkt aller drei Geraden*: dann gibt es *keinen* gemeinsamen Punkt aller drei Geraden, die Lösungsmenge ist *leer* rechnerisch:

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} y = 2x + 4 & \text{(A)} \\ y = 3x + 5 & \text{(B)} \\ y = 4x + 7 & \text{(C)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{llll} y = 2x + 4 & (A) & & \\ 2x + 4 = 3x + 5 & (D) & (A) \text{ in } (B) & |-2x - 5 \\ 2x + 4 = 4x + 7 & (E) & (A) \text{ in } (C) & |-2x - 7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} y = 2x + 4 & (A) \\ -1 = x & (D) \\ -3 = 2x & (E)\ \ |:2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} y = 2x + 4 & (A) \\ -1 = x & (D) \\ -1{,}5 = x & (E) \end{array}\right.$$

(D) und (E) ergeben *verschiedene*, nicht *gleichzeitig* erfüllbare Werte für x. x kann nicht *gleichzeitig* 1 *und* 1,5 sein, sondern höchstens 1 *oder* 1,5. Das Gleichungssystem ist also *nicht* lösbar, $\mathbb{L} = \{\}$.

Nun liegt es nahe, zu überlegen, was bei 3 (oder gar 4 ...) Gleichungen mit 3 (oder 4 ...) Unbekannten geschieht. Wir behandeln davon nur die

B) Gleichungssysteme aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

Weil man daran sieht, wie man *grundsätzlich* vorzugehen hat, nämlich im Prinzip genauso wie bei 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.
Auch geometrisch bedeutet das Ähnliches: bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten werden gemeinsame Punkte berechnet, allerdings diesmal nich mehr von *zwei Geraden im Zweidimensionalen*, sondern von *drei Ebenen im Dreidimensionalen* (denn z.B. 3x -2y + 4z = 6 ist Gleichung einer Ebene in den drei Dimensionen x, y und z).
Das soll hier allerdings nicht näher geometrisch erklärt werden, ja, weil die Orientierung im Raum so schwierig ist, ist es hier um so mehr nötig zu *rechnen*.
Grundsätzliche Gedanken können wir uns aber wieder über die Lösungsmenge machen. Folgende Fälle sind möglich:

Ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten kann als Lösung haben:
- genau *einen Punkt* (die 3 Ebenen schneiden sich in genau *einem* Punkt. Vgl. z.B. die Front-, die Fensterseite und die Decke eines Raumes; Schnittpunkt ist ein Eckpunkt des Raumes)
- *alle Punkte einer Geraden* (z.B.schneiden sich die Türen einer Drehtüre alle in der Drehachsengerade)
- *alle Punkte einer Ebene* (wenn die drei Ebenen identisch sind)
- *keinen* Punkt (z.B. haben der Boden, die Frontseite und die Decke eines Raumes keinen gemeinsamen Punkt)

Wie man hier sieht, ist es eher unwahrscheinlich, daß wir ausgerechnet drei Ebenen "erwischen", die sich in genau *einem* Punkt schneiden (bzw. ein Gleichungssystem mit genau einer Lösung). Kompliziertere Ergebnisse sollten einen also nicht verwundern. Dennoch: meist sind die Aufgaben so ausgesucht, daß genau
eine Lösung herauskommt.

Ebenfalls passiert bei *vier* Gleichungen mit *drei* Unbekannten das gleiche wie bei *drei* Gleichungen mit *zwei* Unbekannten (s.o.).

Hier soll nun nur *ein* (eindeutig lösbares) Beispiel durchgerechnet werden, um das grundsätzliche Vorgehen klarzumachen. Wir verwenden wieder das am häufigsten verwendbare *Additions*verfahren, nur eben mehrfach:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -6 & (A) \\ -x + 3y + 2z = 6 & (B) \quad |\cdot 2 \\ 2x + y - 4z = -5 & (C) \end{cases}$$

In (A) und (B) gibt es keine gleichen Summanden. Also *sorgen* wir erstmal für gleiche Summanden, indem wir (B) mit 2 multiplizieren:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z = -6 & (A) \\ -2x + 6y + 4z = 12 & (B) \quad |\cdot(1) \\ 2x + y - 4z = -5 & (C) \end{cases}$$

In (B) steht nun vor 4z das *gleiche* Vorzeichen wie in (A). Um das zu ändern, multiplizieren wir (B) mit (1):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z = -6 & (A) \\ 2x - 6y - 4z = -12 & (B) \\ 2x + y - 4z = -5 & (C) \end{cases}$$

Nun können wir (A) zu (B) und (A) zu (C) addieren:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z = -6 & (A) \\ 5x - 8y = -18 & (D) \quad (A) + (B) \\ 5x - y = -11 & (E) \quad (A) + (C) \end{cases}$$

Damit haben wir erreicht, daß in (D) und (E) immerhin schon eine Unbekannte *weniger* vorkommt. Außerdem bilden (D) und (E) ein uns bereits *bekanntes* Gleichungssystem aus *zwei* Gleichungen mit *zwei* Unbekannten. Das aber können wir (z.B. mit dem Subtraktionsverfahren) lösen, wobei wir allerdings (A) weiter mitschleppen:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z = -6 & (A) \\ \begin{cases} 5x - 8y = -18 & (D) \\ -7y = -7 & (F) \quad (D) - (E) \end{cases} \end{cases}$$

Bringen wir das erstmal auf die Gaußsche Dreiecksform:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z = -6 & (A) \\ 5x - 8y = -18 & (D) \\ -7y = -7 & (F) \end{cases}$$

Endlich haben wir in der letzten Gleichung (F) nur noch *eine* Unbekannte. Es ergibt sich y = 1. Wenn wir dieses y in die vorletzte Zeile (D) einsetzen, ergibt x = -2. Und wenn wir dann wieder x und y in die drittletzte bzw. erste Zeile einsetzen, ergibt $z = \frac{1}{2}$.

Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{(-2 \mid 1 \mid \frac{1}{2})\}$.

<u>Einheitsverfahren für alle Gleichungssysteme:</u>
man wirft von Zeile zu Zeile eine Unbekannte mehr raus, bis man in der letzten Zeile nur noch *eine* Unbekannte hat, die man dann leicht *ausrechnen* kann (wenn überhaupt eine Lösung vorliegt). *Rückwärts* in die jeweils *vorherigen* Zeilen eingesetzt, ergeben sich dann nacheinander alle *anderen* Unbekannten.

Koordinatensystem

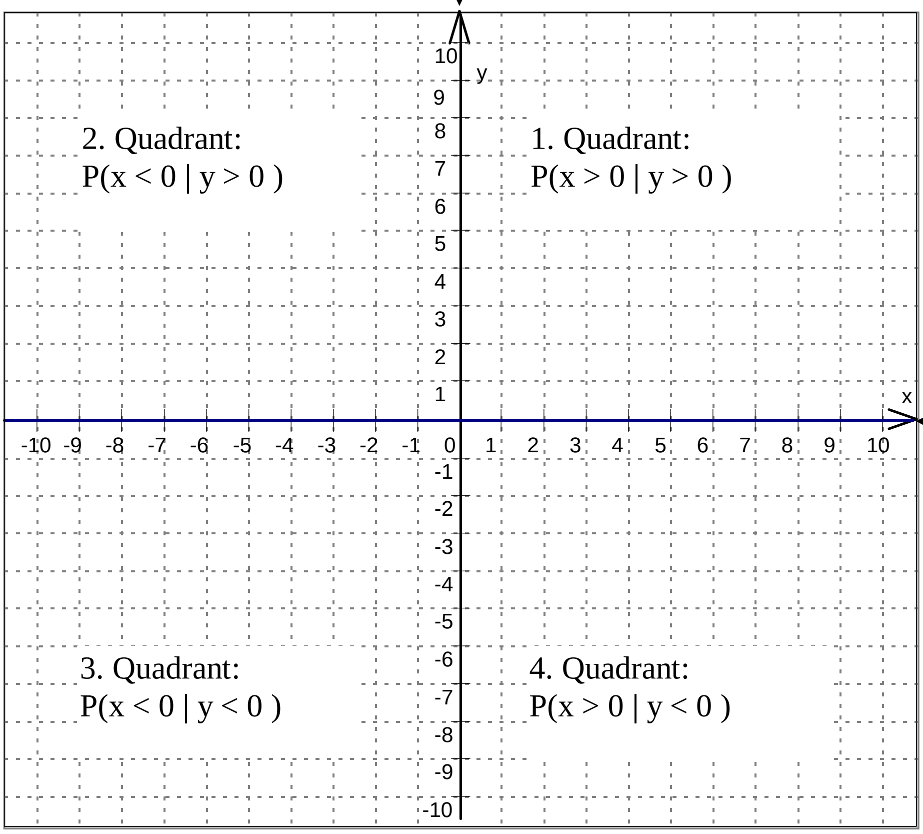
Herleitung des Koordinatensystems siehe „Zuordnungen/Funktionen“

x = 0 für alle Punkte auf der y-Achse

S_y (0 | y)

x < 0
für alle Punkte links der y-Achse

x > 0
für alle Punkte rechts der y-Achse



y > 0
für alle Punkte oberhalb der x-Achse

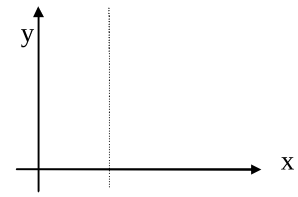
y = 0
für alle Punkte auf der x-Achse/
Nullstellen N(x|0)

y < 0
für alle Punkte unterhalb der x-Achse

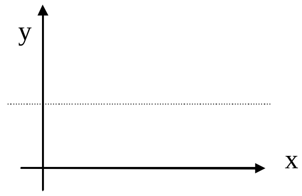
Potenzfunktionen ersten Grades/lineare Funktionen

Ins Koordinatensystem kann man auf grundsätzlich 5 verschiedene Arten Geraden einzeichnen:

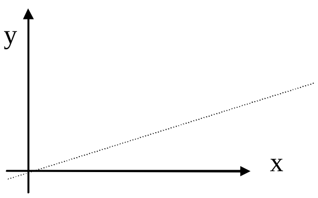
1. *parallel* zur y-Achse oder auf ihr:



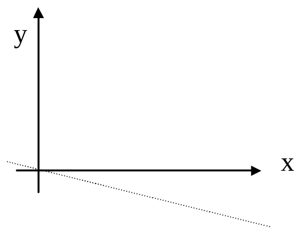
2. *parallel* zur x-Achse oder auf ihr:



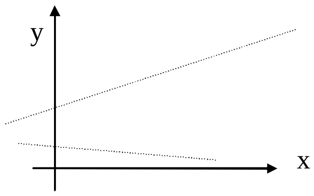
3. zum positiven Ende der x-Achse hin *steigende* Geraden:



4. zum positiven Ende der x-Achse hin *fallende* Geraden:



5. steigende oder fallende Geraden, die (im Gegensatz zu 3. und 4.) *nicht* durch den *Ursprung* gehen:



All diese Fälle wollen wir nacheinander durchnehmen:

zu 1.: alle Punkte der Parallelen zur y-Achse haben eine Gemeinsamkeit: offensichtlich ist der x-Wert *fest* (in der Zeichnung x = 4), während y alle Werte zwischen - und + Unendlich annehmen kann. Um bei unserem Beispiel zu bleiben: man schreibt auch kurz x = 4. Oder allgemein:

Parallelen zur y-Achse haben die Gleichung

$x = n$, wobei n eine *feste* Zahl aus (später) ist.

y kann man beliebig einsetzen, weil es gar nicht in der Gleichung vorkommt. Also z.B. $y = 1 \Rightarrow x = 4$, $y = 3 \Rightarrow x = 4$, $y = 17 \Rightarrow x = 4$ ...
Allerdings gilt:

Eine Parallele zur y-Achse ist nicht Graph einer *Funktion*,

denn dem einen x (hier 4) wird keineswegs nur *ein* y zugeordnet, sondern sogar *unendlich viele*. Weil aber keine Funktion vorliegt, wollen wir uns damit nicht weiter beschäftigen. Kennen sollte man den Fall aber dennoch, denn:

Auf einer Parallelen zur y-Achse liegen alle Punkte mit der *gleichen* x-Koordinate (hier 4) und *beliebiger* y-Koordinate.

Z.B. liegen auf dieser Parallelen P(4|3) und Q(4|17)

zu 2.: alle Punkte der Parallelen zur x-Achse haben eine Gemeinsamkeit: bei ihnen ist (im Gegensatz zu 1.) der y-Wert fest (hier $y = 3$), während der x-Wert beliebig ist. In unserem Fall kann man also auch kurz $y = 3$ schreiben.
Oder allgemein:

Parallelen zur x-Achse haben als Zuordnungvorschrift $x \mapsto y = n$ wobei n eine *feste* Zahl aus $\mathbb{Q}$ (später aus $\mathbb{R}$) ist.

x kann ich *beliebig* einsetzen, weil es im Term $y = n$ gar nicht vorkommt: y bleibt immer gleich 3.
Im Gegensatz zu 1. gilt hier aber:

Eine Parallele zur x-Achse ist Graph einer *Funktion*,

denn jedem x wird nur *ein* y (hier 3) zugeordnet, z.B. $x = 1 \Rightarrow y = 3$, $x = 17{,}5 \Rightarrow y = 3$, $x = 19 \Rightarrow y = 3$.
Weil y fest ist (hier 3), kann man sich auch merken:

Auf einer Parallelen zur x-Achse liegen alle Punkte mit der *gleichen* y-Koordinate (hier 3) und *beliebiger* x-Koordinate.

Z.B. liegen auf dieser Parallelen P(19|3) und Q(17,5|3)

$y = 3$ läßt sich nun aber auch erstmal komplizierter als $y = 3 \cdot 1 = 3 \cdot x^0$ schreiben (man erinnere sich: $x^0 = 1$).
Damit gilt aber:

f: $y = n = n \cdot x^0$ (hier: f: $y = 3 = 3 \cdot x^0$) ist eine ganzrationale Funktion *nullten* Grades, woraus wiederum folgt:

Parallelen zur x-Achse sind Graphen von ganzrationalen Funktionen *nullten* Grades.

Statt nun die Fälle 3. -5. zu Anfang weiterzubehandeln, machen wir jetzt erstmal mit ganzrationalen Funktionen *ersten* Grades weiter (auf 3. - 5. werden wir schnell zurückkommen):

ganzrationale Funktionen ersten Grades/lineare Funktionen

Im folgenden kümmern wir uns erstmal nur um

ganzrationale Funktionen *ersten* Grades, also solche der Form f: $y = mx + c$, wobei m und c beliebige, aber *feste* Zahlen aus $\mathbb{Q}$ (später $\mathbb{R}$) sind.

Das sind tatsächlich ganzrationale Funktionen ersten Grades, denn man kann f auch schreiben als

f: $y = m \cdot x^1 + c \cdot x^0$.

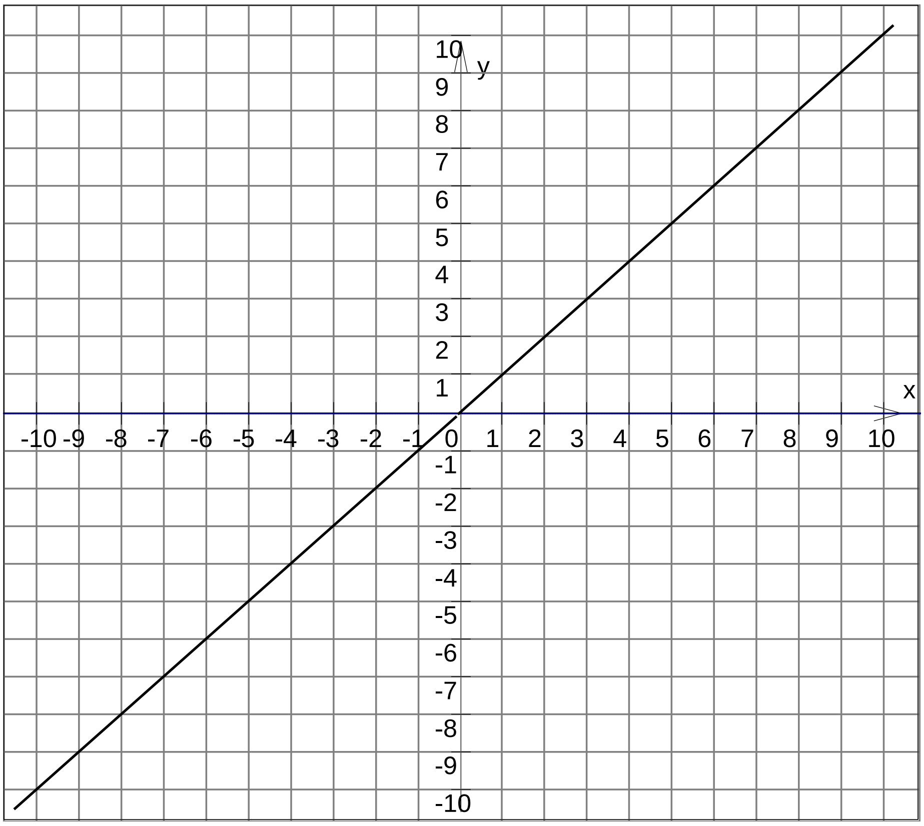
Beispiele:
1. f: $y = 7x + 4$
2. f: $y = 9x - 3$
3. f: $y = 19{,}5x + 2{,}6$
4. f: $y = 13x = 13x + 0$

Uns interessiert nun besonders, wie die *Graphen* dieser Funktionen aussehen. Dazu bauen wir uns nacheinander eine kompliziertere Funktion auf:

a) f: $y = x$
b) g: $y = 3x$ b') h: $y = -3x$
c) j: $y = 3x + 2$ c') k: $y = 3x - 2$

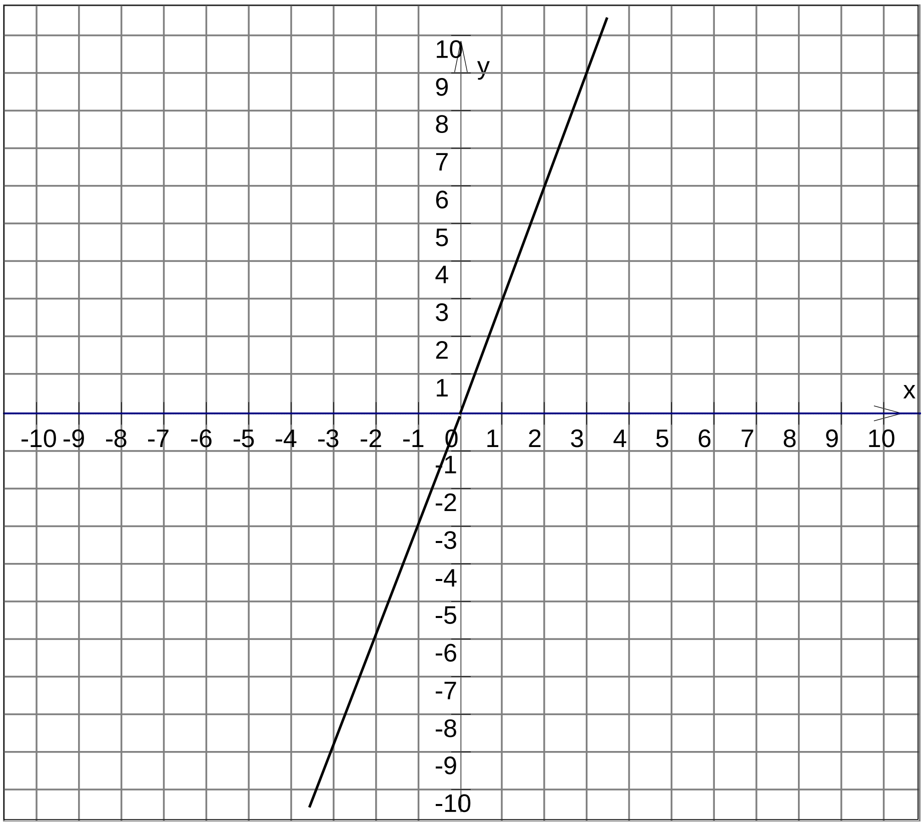
(wobei g, h, j, k nur andere Namen für Funktionen sind)

zu a): f: $y = x$. y ist also immer genau so groß wie x. Jeder Punkt auf dem Graphen von f hat also *gleiche* x- und y-Koordinaten. Mögliche Punkte sind also z.B. $P_1(1|1)$, $P_0(0|0)$ oder $P_{3,5}(3{,}5|3{,}5)$. All diese Punkte liegen auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten, da diese gleichweit von der x- und y-Achse entfernt ist. Der Graph von f ist also diese 1. Winkelhalbierende:



Der Graph der Potenzfunktion 1. Grades f: y = x ist also eine *Gerade*.

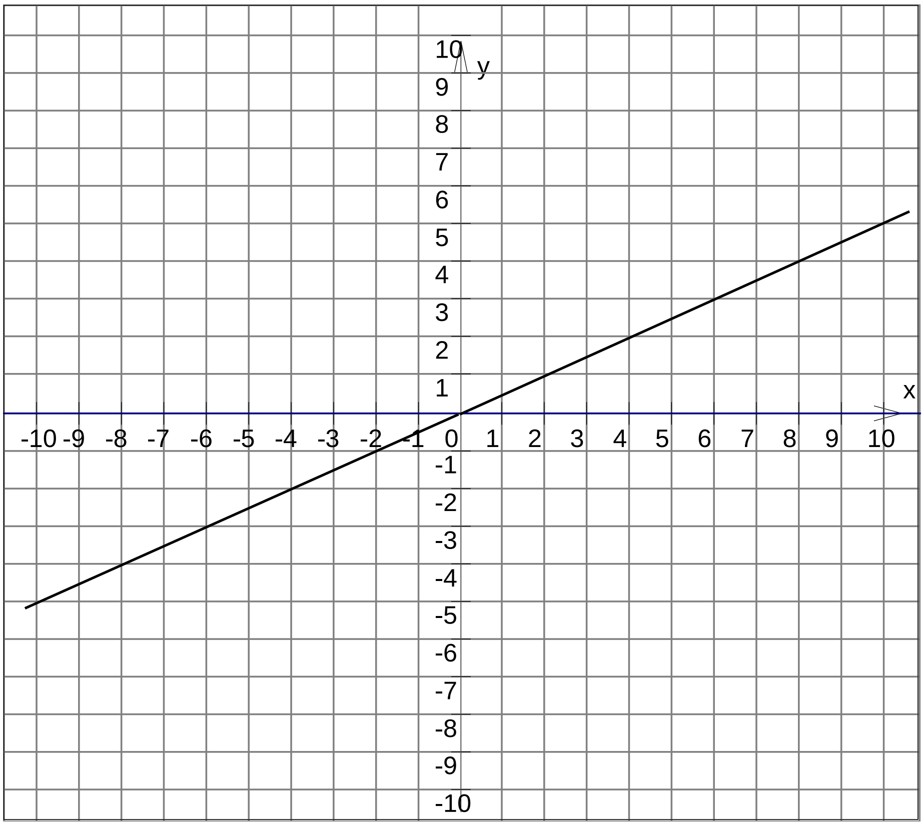
zu b): g: y = 3x. Gegenüber der Funktion f: y = x aus a) ist also jeder y-Wert bei gleichem x-Wert *dreimal* so groß.
Zeichnerisch ergibt sich also:



Es wird deutlich: auch der Graph von g ist wieder eine *Gerade*, nur ist er *steiler*. Offensichtlich ist der Graph von g_4: y = 4•x *noch* steiler, da 4mal so hoch wie der Graph von f: y = x. Hingegen ist der Graph von g_2: y = 2•x *flacher* als der von g, da nur 2mal so hoch wie der von f. Wir können also festhalten:

Der Koeffzient m in f: y = mx bestimmt die *Steigung* des zugehörigen Gerade. Je größer/kleiner m, desto größer/kleiner die Steigung (desto steiler/flacher die Gerade).

Beispiel: wie sieht der Graph von $g_{\frac{1}{2}}$: y = $\frac{1}{2}$•x aus? Offensichtlich ist hier jeder y-Wert *halb* so groß wie bei f:



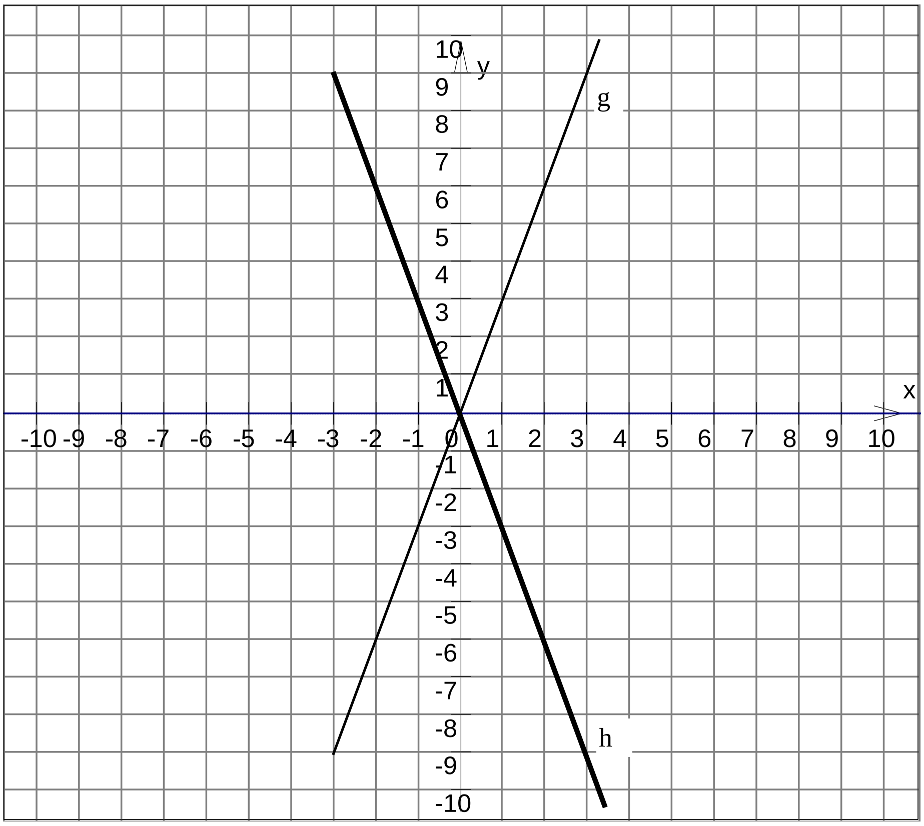
Wir können also festhalten: ist g: y = mx, so ist der Graph dieser Funktion einer *Gerade*, und es gilt:
a) ist m = 1, so ist der Graph die 1. Winkelhalbierende
b) ist m > 1, so ist die Gerade *steiler* als die von f: y = x = 1 • x
c) ist 0 < m < 1, so ist die Gerade *flacher* als die von f: y = x = 1 • x. Außerdem gilt selbstverständlich:
d) ist m = 0, so ist g: y = 0 • x = 0, d.h.: egal, wie ich x wähle, y ist immer Null ⇒ der Graph ist die x- Achse (allerdings liegt für m = 0 eine ganzrationale Funktion *nullten* Grades vor).

Damit stellt sich die Frage, was passiert, wenn m *kleiner* als Null wird, also z.B. m = -3:

zu b'): h: y = 3 • x. Hier hilft ein kleiner Trick: wir klammern das Minus vor der 3 aus und erhalten: h: y = -(3 • x). Jedem x-Wert wird also erstmal das gleiche wie bei der Funktion g: y = 3x zugeordnet, und das *Ergebnis* wird dann mit *negativem* Vorzeichen versehen:

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-6	-3	0	3	6
h(x)	+6	+3	0	-3	-6

Der Graph von h ergibt sich also aus dem von g durch Spiegelung an der x-Achse:



Wenn wir uns jetzt noch definieren:

Eine Funktion heißt (auf einem Intervall I)
- <u>steigend</u>, wenn für *wachsende* x (in I) auch y *wächst*.
  Der Graph steigt dann nach rechts in positiver Richtung der x-Achse
- <u>fallend</u>, wenn für *wachsende* x (in I) y *fällt*.
  Der Graph fällt dann nach rechts in positiver Richtung der x-Achse.

(Vorsicht, Verwechslungsgefahr!: gemessen wird immer für *wachsende* x bzw. das Verhalten des Graphen nach *rechts*, d.h. in *positiver* Richtung der x-Achse)

so ersieht man aus g und h:

Der Graph der Funktion f: y = mx ist eine Gerade und
a) *steigt* für m > 0 (Anfangsfall 3.)
b) *fällt* für m < 0 (Anfangsfall 4.)

Das *Vorzeichen* von m entscheidet also über *Steigen* und *Fallen*.

zu c): Bei ganzrationalen Funktionen ersten Grades kann zusätzlich zu f: y = mx nur noch eine *niedrigere* Potenz von x, also $c \cdot x^0 = c \cdot 1 = c$ auftauchen. Schauen wir uns diesen Fall f: y = mx +c auch noch an, und zwar am Beispiel

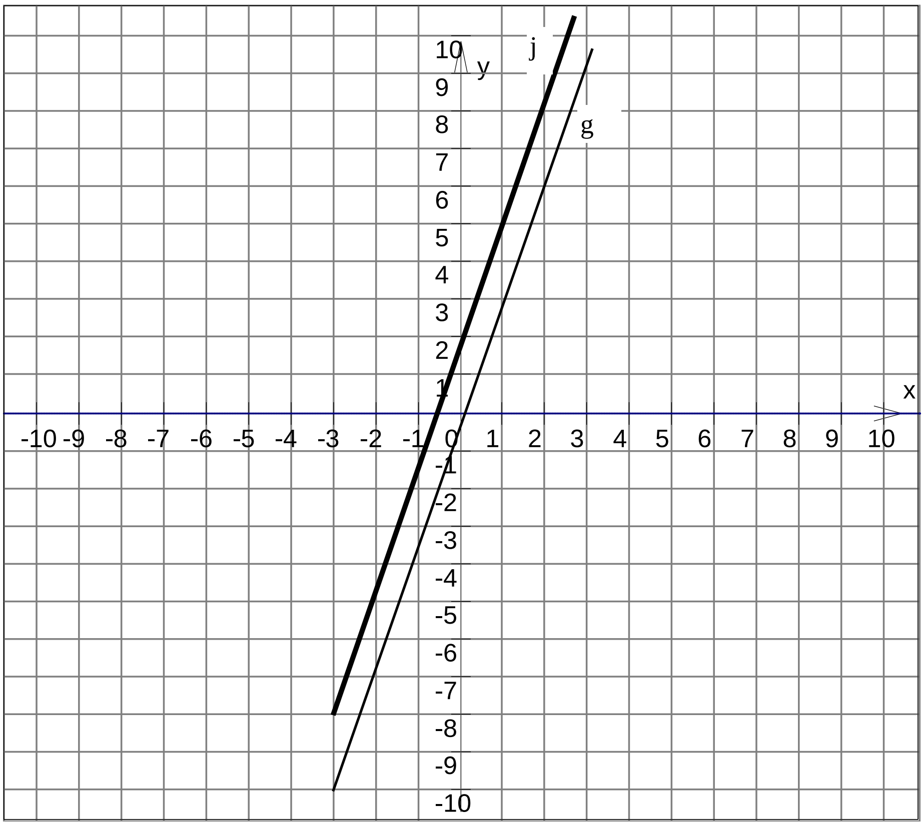
j: y = -3x + 2

Das können wir auch schreiben: j: y = 3x + 2
y = g(x) + 2.

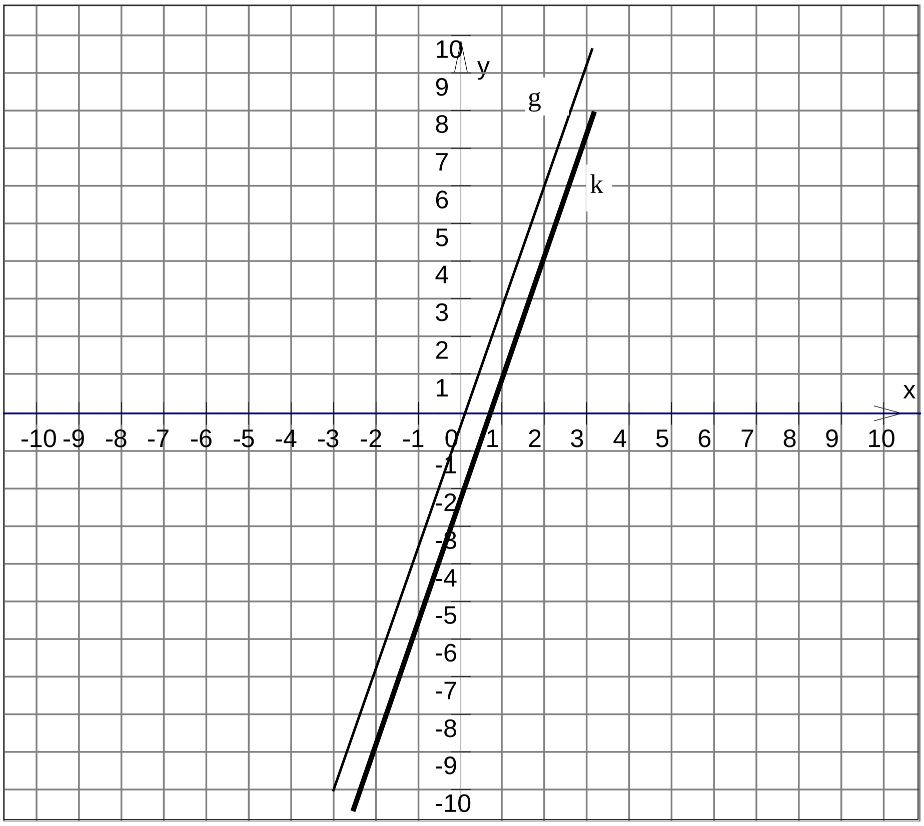
Jeden y-Wert bei j kann man also auch aus den y-Werten bei g erhalten, indem man *immer* 2 addiert:

x	2	1	0	1	2
g(x)	6	3	0	3	6
j(x)	6+2 =	3+2 =	0+2 =	3+2 =	6+2 =
	= 4	= 1	= 2	= 5	= 8

Das c = 2 sorgt also dafür, daß der Graph von j um 2 *höher* als der von g liegt (also nicht wie bisher *zweimal* höher, sondern *um* 2 höher):



zu c'): Entsprechend liegt der Graph von k: $y = 3x - 2$ um 2 *tiefer* als der von g: $y = 3x$:



Wir können also festhalten:

Das c in g: y = mx + c *verschiebt* den Graphen von f: y = mx nur um c nach *oben* oder *unten*.

Dieses c hat nun noch eine ganz anschauliche Bedeutung: ist x = 0, so ergibt sich:

$$y = mx + c = m\bullet 0 + c = 0 + c = 0,$$

also g(0) = c. Der zugehörige Punkt des Graphen ist P(0;c). Das aber ist derjenige Punkt, an der der Graph die y-Achse *schneidet*. Deshalb nennt man c auch "y-Achsenabschnitt".

a) - c') zusammenfassend erhalten wir also:

Der Graph der Funktion f: y = mx + c ist eine *Gerade*.
Weil der Graph also gerade wie ein *Lineal* ist, nennt man ganzrationale Funktionen ersten Grades auch "*lineare* Funktionen".
Dabei gibt m die *Steigung* (bzw. negative Steigung = Gefälle) an und c den *yAchsenabschnitt*.
Für m gilt:

ist m > 0, so *steigt* die Gerade,
ist m < 0, so *fällt* die Gerade.

Der y-Achsenabschnitt c gibt an, in welchem Punkt P(0;c) die Funktion die y-Achse schneidet.
Es gilt:

ist c = 0, so geht der Graph durch den *Ursprung* (s.u. "Ursprungsgerade")
ist c > 0, so geht der Graph *über* dem Ursprung durch die y-Achse (Anfangsfall 5.)
ist c < 0, so geht der Graph *unter* dem Ursprung durch die y-Achse (ebenfalls Anfangsfall 5.).

Die Steigung m

Schauen wir uns nun die Steigung m nochmal genauer an. Für ein bestimmtes x_1 ergibt sich $y_1 = mx_1 + c$. Als zugehörigen Punkt erhalten wir $P_1(x_1 \mid mx_1 + c)$.
Nun vergrößern wir x_1 um dx (Distanz der x-Werte) zu $x_2 = x_1 + dx$.
Für den zugehörigen y-Wert y_2 ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} y_2 &= m \quad x_2 \quad + c = \\ &= m\,(x_1 + dx) + c = mx_1 + m\bullet dx + c = (mx_1 + c) + m\bullet dx \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_1 \qquad + m\bullet dx \end{aligned}$$

Für die Distanz dy der y-Werte ergibt sich also:

$$dy = y_2 - y_1 = (y_1 + m\bullet dx) - y_1 = m\bullet dx$$

oder kurz $dy = m\bullet dx$.

Erhöht man den x-Wert einer linearen Funktion f: $y = mx + c$ um dx, so erhöht sich der y-Wert um $m\bullet dx$.

Die Gleichung $dy = m\bullet dx$ können wir nun nach m auflösen, indem wir auf beiden Seiten durch dx teilen. Wir erhalten:

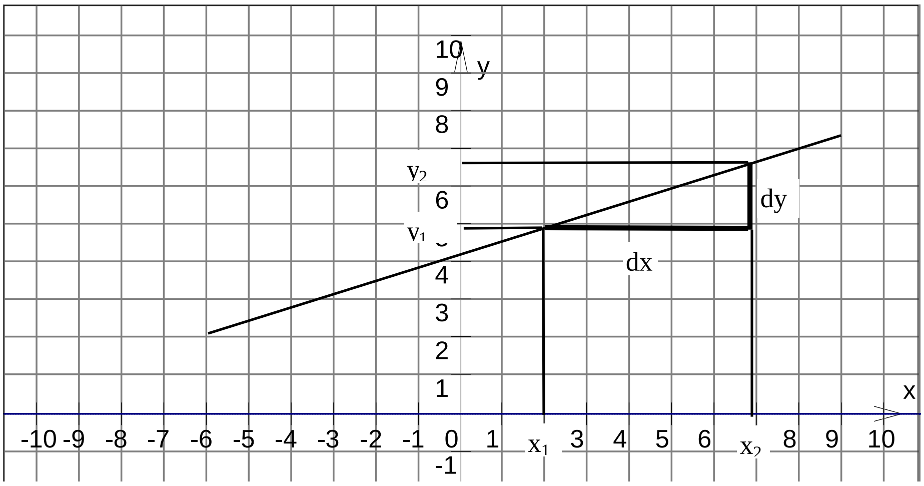
$$m = \frac{dy}{dx}$$

und können sofort wieder festhalten:

Die Steigung m einer linearen Funktion f: $y = mx + c$ ist gleich $m = \frac{dy}{dx}$ m ist also gleich dem *Quotienten* aus a) der Differenz der y-Koordinaten zweier *beliebiger* Punkte $P_2(x_2 \mid y_2)$ und $P_1(x_1 \mid y_1)$ und b) der Differenz der x-Koordinaten dieser Punkte.

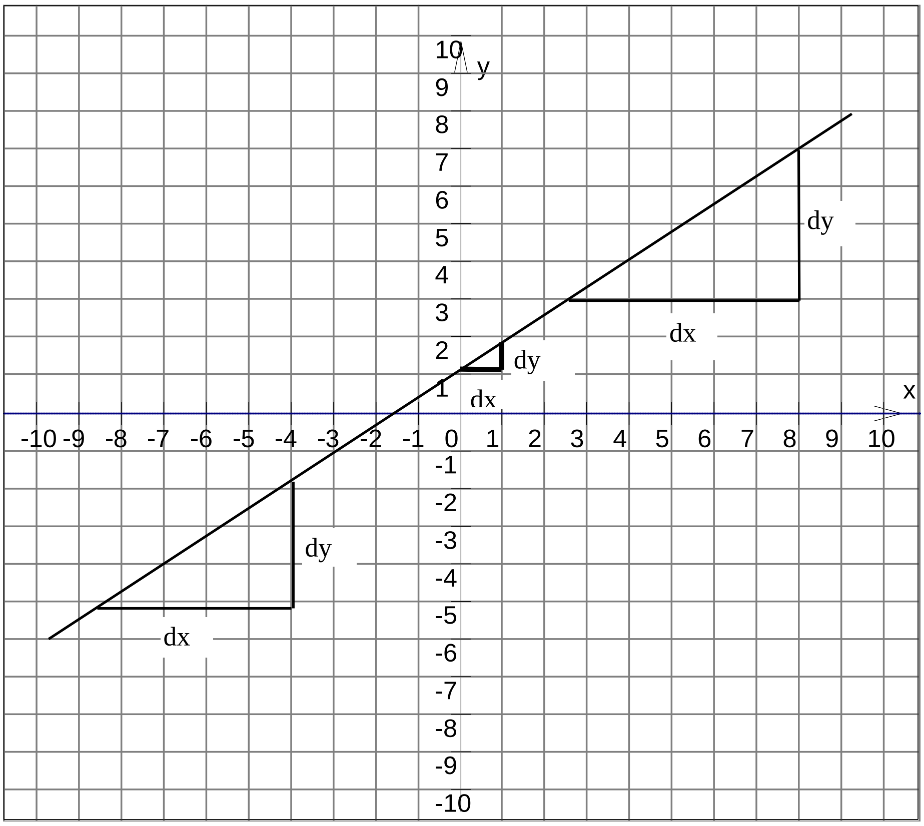
Vorsicht, beliebter Fehler: m wird fälschlich andersrum, also als $m = \frac{dx}{dy}$ abgelesen.

An einer Zeichnung wird klar, was mit dx und dy gemeint ist und was $\frac{dy}{dx}$ bedeutet:



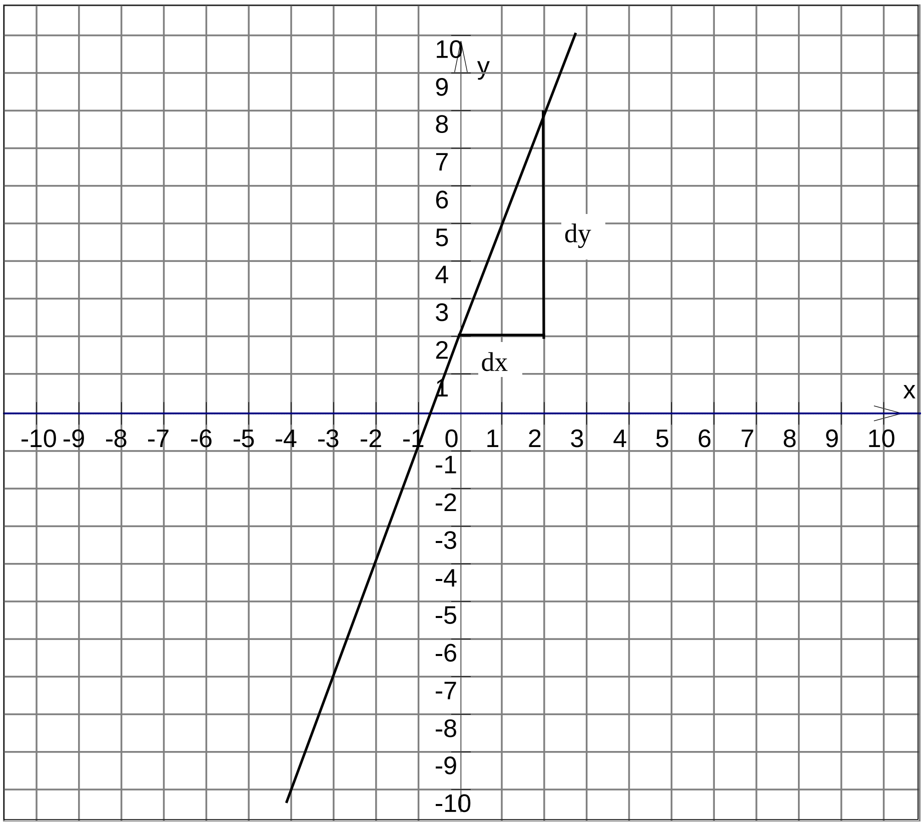
Das dicker eingezeichnete Dreieck mit den Seitenlängen dy und dx nennt man auch "Steigungsdreieck".
Bemerkenswert dabei ist: wir haben bewußt mit *beliebigem* x_1 und x_2 gerechnet:

> die Steigung $m = \frac{dy}{dx}$ läßt sich also (nur bei linearen Funktionen!) an *jedem* beliebigen Steigungsdreieck ablesen:



Graph → Funktionsgleichung

Vor allem haben wir nun ein Mittel, aus einem *gegebenen* Graphen die noch *unbekannte* Funktion(sgleichung) zu ermitteln: wir können c direkt als y-Achsenabschnitt *ablesen* und m aus einem *beliebigen* Steigungsdreieck berechnen. Ein Beispiel:

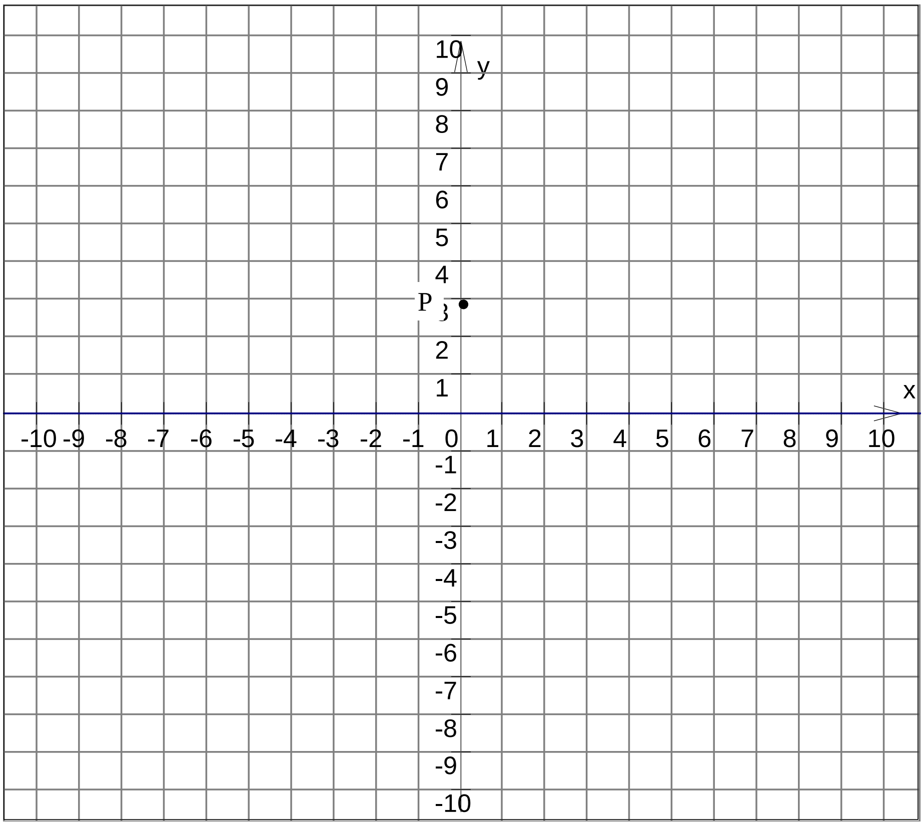


Wir erhalten: c = 2 und $m = \frac{dy}{dx} = 6:2 = 3$, also f: y = 3x + 2

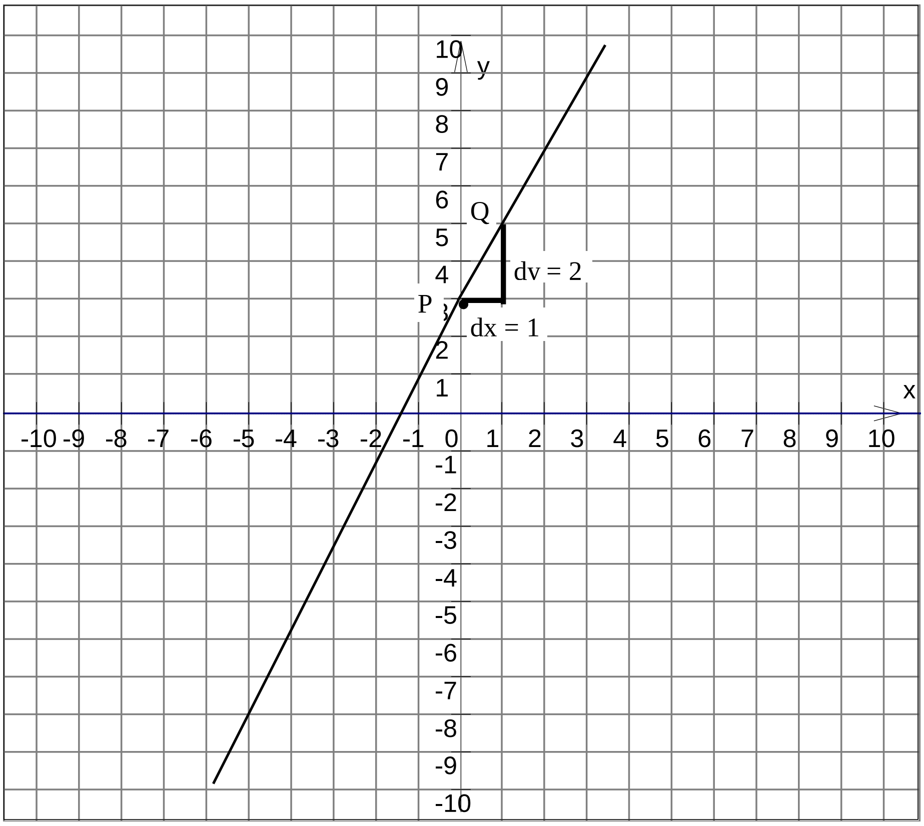
<u>Funktionsgleichung → Graph</u>

Nun wollen wir *umgekehrt* vorgehen: eine Funktion f: y = mx + c ist *gegeben*, und wir wollen den *Graphen* zeichnen. Das ist nun ganz einfach und *ohne* Wertetabelle möglich. Der grundsätzliche Vorgang sei am Beispiel f: y = 2x + 3 klargemacht:

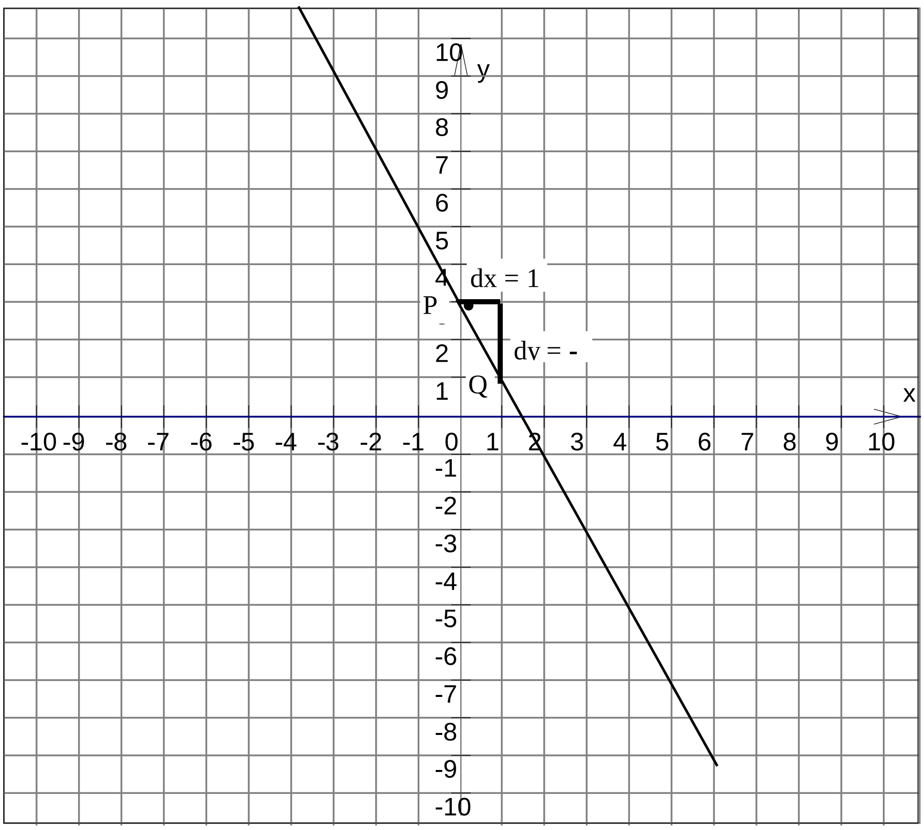
<u>1. Schritt:</u> den <u>y-Achsenabschnitt</u> c = 3 können wir direkt aus der Gleichung *entnehmen* und damit schon den Schnittpunkt P(0|3) mit der y-Achse einzeichnen:



<u>2. Schritt:</u> wir wissen, daß $2 = m = \frac{dy}{dx}$ ist, bzw. kurz: $2 = \frac{dy}{dx}$. Da die Wahl von dx *beliebig* ist, wählen wir <u>grundsätzlich dx = 1</u> und erhalten: $2 = \frac{dy}{1} \Rightarrow dy = 2$. Damit können wir ein Steigungsdreieck zeichnen: wir gehen von P um dx = 1 nach *rechts* (*nie* nach links!) und dann um dy = 2 nach *oben*. Dort liegt der Punkt Q. Durch die zwei Punkte P und Q können wir nun aber problemlos mittels Lineal eine Gerade zeichnen:



der 2. Schritt verändert sich für eine *negative* Steigung m (z.B. m = -2 in f: y = - 2x + 3) folgendermaßen: wir gehen von P aus wieder um dx = 1 nach *rechts* (!), dann aber um dy = -2 nach *unten* (!). Durch P und den dort entstehenden Punkt Q können wir wieder eine Gerade zeichnen:



Ist m wie in f: $y = \frac{3}{4}x + 2$ ein *Bruch*, also $m = \frac{3}{4} = \frac{dy}{dx}$, so ist es oft einfacher, nicht 1 nach rechts und $\frac{3}{4}$ nach oben zu gehen, sondern 4 nach rechts in x-Richtung (denn der *Nenner* ist das dx) und dann 3 nach oben in y-Richtung (denn der *Zähler* ist das dy). Es wäre aber auch weiterhin möglich: wie gewohnt 1 nach rechts und dann $\frac{3}{4}$ nach oben.

Berechnung von Werten

Bei linearen Gleichungen ist es besonders einfach,
1. zu einem *gegebenen* x-Wert den *zugehörigen* y-Wert und
2. umgekehrt zu einem *gegebenen* y-Wert den *zugehörigen* x-Wert zu berechnen.
Vorgeführt sei das am Beispiel f: $y = -2x - 3$

zu 1.: es sei z.B. $x = 5$. Es wird einfach in die Gleichung *eingesetzt*, und es ergibt sich
$y = -(2)\cdot 5 - 3 = -10 - 3 = -13$, also $f(5) = -13$
Der zugehörige Punkt ist P(5|-13).
Von besonderem Interesse ist dabei immer $x = 0$. Es ergibt sich $y = -(2)\cdot 0 - 3 = 0 - 3 = -3$, also $f(0) =- 3$ bzw. der Punkt P(0|-3). Wegen $x = 0$ ist das der Schnittpunkt mit der y-Achse.

Die y-Koordinaten (y-Achsenabschnitt) von Schnittpunkten mit der y-Achse berechnet man, indem man einfach $x = 0$ in die Funktionsgleichung einsetzt.

zu 2.: es sei z.B. $y = 7$. Auch das können wir wieder in die Funktionsgleichung einsetzen. Wir erhalten $7 = (-2)\cdot x -3$. Daraus läßt sich das zugehörige x *nicht* direkt ablesen. Aber Gleichungen mit nur *einer* Unbekannten können wir ja bereits seit längerem lösen:

$$\begin{aligned} & 7 = (-2)\cdot x - 3 && |+3 \\ \Leftrightarrow\ & 7 + 3 = (-2)\cdot x - 3 + 3 && \\ \Leftrightarrow\ & 10 = (-2)\cdot x && |:(-2) \\ \Leftrightarrow\ & 10:(-2) = (-2)\cdot x : (-2) && \\ \Leftrightarrow\ & -5 = x && \end{aligned}$$

y ist also genau dann 7, wenn $x = -5$ ist. Der zugehörige Punkt ist P(-5|7).
Von besonderem Interesse ist nun der Fall $y = 0$:

$$\begin{aligned} & 0 = (-2)\cdot x - 3 && |+3 \\ \Leftrightarrow\ & 3 = (-2)\cdot x && |: (-2) \\ \Leftrightarrow\ & -1{,}5 = x && \end{aligned}$$

y ist also genau dann 0, wenn $x = -1{,}5$ ist. Der zugehörige Punkt ist P(-1,5| 0). Wegen $y = 0$ liegt er auf der x-Achse.

x-Werte, bei denen Funktionen den y-Wert Null annehmen bzw. die Graphen der Funktionen die x-Achse schneiden (Nullpunkte), nennt man "Nullstellen". Nullstellen berechnet man, indem man einfach für y eine Null einsetzt.

Vorsicht, Verwechslungsgefahr:

Beim Schnittpunkt mit der y-Achse ist $x = 0$, beim Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullpunkt) ist $y = 0$.

$S_y(0\|?)$ $\quad$ $S_x(?\|0)$

Besonders einfach lassen sich also y-Achsenabschnitt (das y, für das $x = 0$) und Nullstelle (das x, für das $y = 0$) berechnen.
Damit hat man zwei Punkte (Schnittpunkt mit y- und x-Achse), womit man sofort eine Gerade zeichnen kann.

Ursprungsgeraden/Porportionalität

Hat eine Funktion die Form f: $y = mx$, so übersieht man leicht, daß das nur ein Spezialfall der Form f: $y = mx + c$ ist, und zwar für $c = 0$. Man übersieht also leicht, daß f: $y = mx$ auch eine *lineare* Funktion ist, allerdings mit dem y-Achsenabschnitt 0.
Wir hatten bereits gesehen:

Ist der y-Achsenabschnitt c in f: $y = mx + c$ gleich Null, so geht die zugehörige Gerade durch den Ursprung U(0|0). Solche Geraden nennt man auch (im Unterschied zu solchen, bei denen c *ungleich* Null) "Ursprungsgeraden".

Die Funktionen f: $y = mx$ solcher Graphen haben nun eine besondere Eigenschaft. Schauen wir uns dazu mal an, was passiert, wenn wir ein beliebiges x_1 *vervielfachen*:
Gegeben sei ein beliebiges x_1. Selbstverständlich gilt

$$y_1 = f(x_1) = mx_1$$

Nun sei x_2 das n-fache von x_1, also

$$x_2 = n \cdot x_1.$$

Dann gilt $y_2 = f(x_2) = m \cdot x_2$

$$= m \cdot (n \cdot x_1) = n \cdot (m \cdot x_1) =$$

$$= n \cdot y_1$$

oder kurz $y_2 = n \cdot y_1$. Die Ver-n-fachung des x_1 hat also auch eine Ver-n-fachung des y_1 bewirkt. Sowas nennt man "Proportionalität":

Die Funktionen f: $y = mx$ von Ursprungsgeraden sind *proportional*, d.h. es gilt: ver-n-fache ich x, so wird auch das y ver-n-facht.

Die Bedeutung der Proportionalität läßt sich dabei sehr einfach klarmachen: angenommen, ein Liter Milch kostet zwei DM. Dann lautet die Liter-Preis-Funktion allgemein:

$$f:\ \underset{\text{Preis}}{y} = 2\ \underset{\text{Liter}}{x}.$$

Schreibt man das als f: $y = 2x + 0$, so sieht man, daß dazu eine Ursprungsgerade gehört.
Es sei nun $x_1 = 5$, d.h. ich kaufe 5 Liter. y_1, also der *Preis* von 5 Litern, berechnet sich als $y_1 = 2 \cdot x_1 = = 2 \cdot 5$ DM = 10 DM.
Bei der Verdopplung der *Literzahl* kommt also auch ein doppelter *Preis* raus. *Sowas* nennt man Proportionalität!
Nun will ich $x_2 = 15$ Liter oder das 3fache von $x_1 = 5$ Litern kaufen. Als Preis y_2 von $x_2 = 15$ Litern ergibt sich: $y_2 = 2 \cdot x_2 = 2 \cdot 15$ DM $= 30$ DM. Also hat sich nicht nur die *Liter*zahl verdreifacht, sondern auch der *Preis*.

Proportionalität kommt also im Alltag andauernd vor: wenn ich die n-fache *Menge* kaufe, *bezahle* ich auch das n-fache (es sei denn, ich bekomme einen Mengenrabatt).

Bleibt zu untersuchen, ob f: $y = mx + c$ auch für c *ungleich* Null proportional ist. Es sei ein beliebiges x_1 gegeben. Dann gilt $y_1 = mx_1 + c$. Wiederum sei $x_2 = n \cdot x_1$. Damit ergibt sich

$$y_2 = mx_2 + c = m \cdot (n \cdot x_1) + c = n \cdot (m \cdot x_1) + c.$$

Wenn wir nun y_2 durch y_1 teilen, um festzustellen, auf das Wievielfache sich das y erhöht hat, erhalten wir:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{n \cdot (m \cdot x_1) + c}{m \cdot x_1 + c.}$$

Das aber läßt sich *nicht* weiter (zu n) kürzen. Also wird bei Nicht-Ursprungsgeraden das y *nicht* ver-n-facht, wenn ich das x ver-n-fache.

> Die Funktionen f: $y = mx + c$ mit c *ungleich* Null von Nicht-Ursprungsgeraden sind *nicht* proportional.

Auch das läßt sich wieder anschaulich klarmachen: ein Tennisclub verlangt eine Aufnahmegebühr von 20 DM. Jede Tennisstunde kostet dann 10 DM. Der *Gesamtpreis* (Anfangsgebühr + Preis jeder der Einzelstunden) berechnet sich also folgendermaßen: für 5 Stunden zahle ich *insgesamt* 20 DM Aufnahmegebühr *und* 5mal den Preis jeder Einzelstunde, also insgesamt $20 + 5 \cdot 10 = 70$ DM. Oder allgemein:

y	= 20	+ 10	• x
Gesamtpreis	Aufnahmegebühr	Einzelstundenpreis	Stundenzahl

bzw. $y = 10 \ x + 20$.

Der Gesamtpreis y_1 für $x_1 = 5$ Stunden beträgt also

$$y_1 = 10 \cdot x_1 + 20 = 10 \cdot 5 + 20 = 50 + 20 = 70 \text{ DM}.$$

Nehme ich nun dreimal soviel, also $x_2 = 3 \cdot 5 = 15$ Stunden, so beträgt der Gesamtpreis

$$y_2 = 10 \cdot x_2 + 20 = 10 \cdot 15 + 20 = 150 + 20 = 170 \text{ DM}.$$

Obwohl also $x_2 = 3 \cdot x_1$ ist, ist $y_2 = 170$ *nicht* $3 \cdot y_1 = 3 \cdot 70 = 210$ DM. Für die dreifache Stundenzahl zahle ich also *nicht* den dreifachen Gesamtpreis, sondern *weniger*. Oder allgemein: Ver-n-fachung des x hat *keine* Ver-n-fachung des y bewirkt, die Funktion ist *nicht* proportional.

Punktrichtungs-/Zweipunkteform der Geraden

Bisher hatten wir aus einer *gegebenen* Geradengleichung den Graphen oder *umgekehrt* aus dem Graphen die Geradengleichung entwickelt. Oftmals ist aber *weder* eine Geradengleichung *noch* ein Graph gegeben, sondern wir haben nur *andere* Informationen: eine Gerade ist eindeutig definiert durch *einen Punkt* und die *Steigung* oder durch *zwei Punkte*:

1. Die Punktsteigungsform: wir kennen nur *einen* beliebigen *Punkt* $P\,(x_1|y_1)$ und die *Steigung* m. Zeichnerisch ist das kein Problem: wir zeichnen den Punkt und von da aus mit dem Steigungsdreieck die Steigung. Wollen wir aber die Geraden*gleichung* ermitteln, so liegt der Fall schon ein wenig schwieriger: da P auf der Geraden mit der Gleichung $y = mx + c$ liegen soll, müssen seine *Koordinaten* x_1 und y_1 diese Gleichung erfüllen. Wir erhalten also $y_1 = mx_1 + c$. Daraus errechnet sich der noch unbekannte y-

Achsenabschnitt c als $c = y_1 - mx_1$. Die allgemeine Geradengleichung heißt somit $y = mx + c = mx + (y_1 - mx_1)$, also $y = mx + (y_1 - mx_1)$ oder $y - y_1 = m(x - x_1)$. Also gilt die

<u>Punktsteigungsform der Geraden:</u> sind von einer Geraden g *ein Punkt* $P(x_1|y_1)$ und die *Steigung* m gegeben, so lautet die Geradengleichung g: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Dabei ist zu bedenken: x und y sind die Geraden*variablen*, x_1 und y_1 sind die einzusetzenden konkreten Punkt*koordinaten*.

2. <u>Die Zweipunkteform:</u> wir kennen nur die *beiden Punkte* $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$. Die zugehörige Gerade zu *zeichnen*, ist dann kein Problem: wir legen einfach ein Lineal durch die beiden Punkte. Wie aber kann man *rechnerisch* die Geradengleichung erhalten? Da *beide* auf der Geraden mit der Gleichung y = mx + c liegen sollen, müssen die *Koordinaten jedes Punktes* diese Gleichung erfüllen, also:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + c \\ y_2 = mx_2 + c \end{cases}$$

Wir müssen hier schonmal auf Gleichungs*systeme* vorgreifen, denn das ist ein Gleichungssystem aus *zwei* Gleichungen mit den *zwei* Unbekannten m und c. Durch Subtraktionsverfahren erhalten wir:

$$\begin{cases} \quad y_1 = mx_1 + c \quad (\#\#) \\ \underline{-\ (y_2 = mx_2 + c)} \end{cases}$$
$$y_1 - y_2 = mx_1 - mx_2 + 0$$

bzw. $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$, also eine Gleichung mit der *einen* Unbekannten m. Nach

Auflösen zu m ergibt sich für die Steigung

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad \text{(A)}$$

Setzen wir dies wiederum in (##) ein, um auch noch den y-Achsenabschnitt c zu erhalten, so ergibt sich $y_1 = mx_1 + c = [\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}]x_1 + c$, und nach Auflösen zu c hin erhalten wir den y-Achsenabschnitt

$$c = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 \text{ (B)}$$

Unsere Werte m und c aus (A) bzw. (B) können wir nun in die allgemeine Geradenform y = mx + c einsetzen:

$$y = \underbrace{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}_{m} \underbrace{x +}_{x +} \underbrace{\overline{y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1}}_{c}$$

Bringen wir nun noch y_1 nach links, so erhalten wir

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$$

bzw.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - (x - x_1)$$

<u>Zweipunkteform der Geraden:</u> sind von einer Geraden g *zwei* Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ gegeben, so lautet die Geradengleichung

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1)$$

(Wieder: x, y *Variable*, x_1, y_1, x_2, y_2 einzusetzende konkrete Punkt*koordinaten*)

*Anti*proportionale Funktionen

Da wir oben *proportionale* Funktionen (zu Ursprungsgeraden) angeschaut haben, liegt es nahe, auch eine *anti*proportionale Funktion zu betrachten:
Wir wollen einen rechteckigen Tisch der Fläche $1m^2$ bauen. Dabei sind z.B. folgende Modelle möglich:

A) Länge 2 m, Breite $\frac{1}{2}$ m

B) Länge 1 m, Breite 1 m

Oder allgemein: $\underset{\text{Länge}}{y} \bullet \underset{\text{Breite}}{x} = \underset{\text{Fläche}}{1}$

Um in die Gewohnte Funktionenform f: y = ... zu bringen, teilen wir auf beiden Seiten durch x und erhalten:

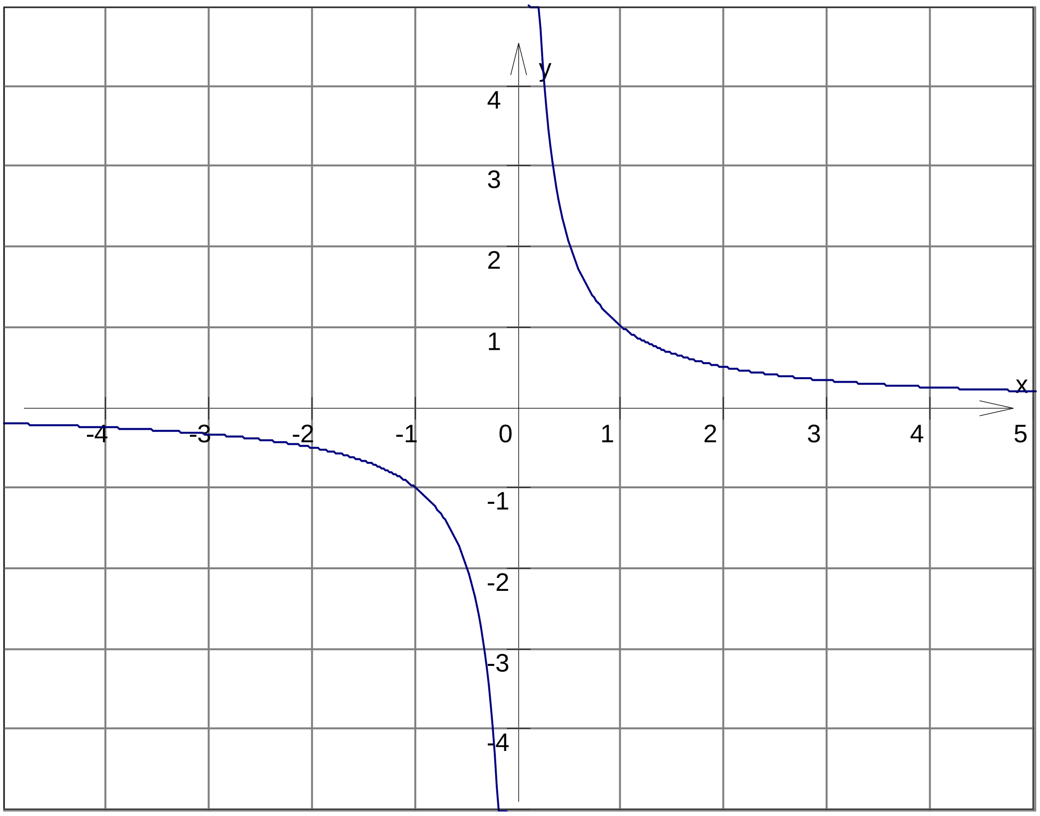
$$f: y = \frac{1}{x}$$

Nun sei $x_1 = 3$ m die Länge. Wir erhalten als Breite $y_1 = \frac{1}{3}$ m.

Nun *verfünffachen* wir die Länge auf $x_2 = 15$ m. Als Breite ergibt sich dann $y_2 = \frac{1}{15}$ m. Nach Bruchrechenregel ergibt sich also $y_2 = y_1 : 5$. Während also x fünfmal so *groß* wurde, wird y fünfmal so *klein*.

Die Funktion f: $y = \frac{1}{x}$ ist also *anti*proportional, d.h.: wähle ich x n-mal so *groß*, wo wird y n-mal so *klein* (und umgekehrt: ist x n-mal so *klein*, so ist y n-mal so *groß*).

Die Funktion f: $y = \frac{1}{x}$ hat nun ein bemerkenswertes Verhalten, was man besonders an ihrem Graphen sieht:



In $x = 0$ ist die Funktion offensichtlich *nicht definiert*, da dann der Nenner 0 würde (also $\mathbb{D} = \{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$). Aber um diese Stelle 0 *herum* passiert etwas sehr Merkwürdiges: liegt x sehr *nah* bei 0, ist es also sehr *klein* (z.B. $x = 0{,}01$), so wird y sehr *groß* (hier $y = \frac{1}{0{,}001} = 100$). D.h., daß sich der Funktionsgraph für sehr *kleine* x "*asymptotisch*" an die y-Achse *annähert*, *ohne* sie jedoch zu erreichen. Umgekehrt wird für sehr *große* x (z.B. $x = 100$) y sehr *klein* (hier $y = \frac{1}{100} = 0{,}01$): für *große* x nähert sich der Funktionsgraph also *asymptotisch* der x-Achse an, *ohne* sie jedoch zu erreichen (denn $\frac{1}{x}$ wird nie gleich Null).

Vorsicht: das Gegenteil von proportional ist nicht antiproportional (bzw. umgekehrt): Es gibt Funktionen (z.B. f: $y = x^2$), die *weder* proportional *noch* antiproportional sind (bei f: $y = x^2$ gilt: *verdoppele* ich x, wird y *viermal* so groß)

(Vgl.: das Gegenteil von Mercedes ist nicht BMW, sondern es gibt Autos, die weder Mercedes noch BMW sind.)

Nochmals: Ungleichungen/Fallunterscheidung

Wollen wir nun berechnen, wann die Funktion f: $y = \frac{1}{x}$ einen bestimmten Wert y (z.B. $y = 1$) *unterschreitet* (siehe gestrichelte Linie im Graphen), so stoßen wir auf eine weitere Merkwürdigkeit:

Um $y = 1 > \frac{1}{x}$ bzw. $1 > \frac{1}{x}$ nach x aufzulösen, müssen wir auf beiden Seiten mit x multiplizieren. Da wir aber noch nicht wissen. ob x *positiv* oder *negativ* ist, müssen wir eine *Fallunterscheidung* durchführen:

$$\frac{1}{x} < 1 \;|\cdot x$$

$\Leftrightarrow$ $1 < x$ für $x > 0$, d.h. x *positiv* oder $1 > x$ für $x < 0$, d.h. x *negativ*

$\Rightarrow$ $\mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{R} \,;\, 1 < x$ *und* $x > 0$ oder $1 > x$ und $x < 0\} =$

$= \{ x \in \mathbb{R};\quad x > 1$ oder $x < 0 \quad \} =$

$= \{ x \in \mathbb{R} \setminus [0;1]\}$

| |

dieser Schrägbalken bedeutet, daß das folgende Intervall *herausgenommen* wird — Intervall

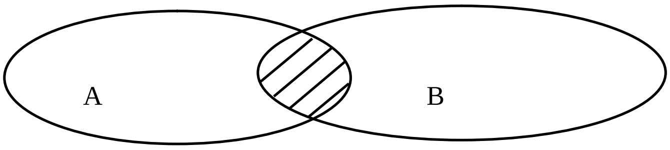
<u>Verknüpfungen "und" bzw. "oder"</u>

Kurz erwähnt - da eben vorgekommen - seien auch noch die mathematischen Verknüpfungen "und = ^" bzw. "oder = v":

– Sollen eine Bedingung A UND eine Bedingung B erfüllt sein (also A ^ B), so müssen beide *gleichzeitig* erfüllt sein (es reicht also *nicht*, wenn nur *eine* erfüllt ist ist es *nicht* möglich, daß beide Bedingungen *gleichzeitig* erfüllt werden, so ist die Lösungsmenge *leer*).
– Soll hingegen A ODER B erfüllt sein (also A v B), so reicht es, wenn *eine* der beiden erfüllt ist (was ja nicht ausschließt, daß dennoch *beide* erfüllt sind).
  Vorsicht: das mathematische "oder" ist *nicht* - wie das umgangssprachliche - *ausschließend* gemeint: sagen wir *umgangssprachlich* "ich kaufe einen Apfel *oder* eine Birne", so meinen wir: "ich kaufe *entweder* einen Apfel *oder aber* eine Birne, aber *nicht beide*". Sagt ein *Mathematiker* "ich kaufe einen Apfel oder eine Birne", so meint er "ich kaufe *entweder* einen Apfel *oder* aber eine Birne *oder aber beide*".

Beispiel: $x = 1 \wedge x = 2$ ist *nicht* möglich (es wäre eine Katastrophe für die gesamte Mathematik, wenn x *gleichzeitig* 1 und 2 sein könnte, also $1 = 2$ wäre), hingegen kann durchaus $x = 1 \vee x = 2$ sein (x muß ja nicht beides *gleichzeitig* sein).
Ein anschauliches Beispiel: "Heute ist Montag *und* Dienstag" ist Quatsch, "Heute ist Montag *der* Dienstag" hingegen durchaus sinnvoll.

Daß dabei "^" UND bzw. "v" ODER bedeuten soll, kann man sich gut mit der Mengenlehre merken:
- soll x in A UND B liegen, so muß es in der (<u>Durch</u>-)*Schnitt*menge $A \cap B$ liegen:



Das Zeichen " $\cap$ " erinnert aber an einen "<u>Durch</u>gang" und ist die *runde* Form von "^".
- soll x in A ODER B liegen, so muß es in der <u>*Vereinigungs*</u>menge $A \cup B$ liegen (die gesamte Fläche von A und B zusammen incl. der Schnittmenge).
  (hier wird nochmals die Bedeutung des mathematischen, nicht ausschließenden "oder" deutlich: liegt x in A ODER B bzw. in der Vereinigungsmenge A B von A und B, so kann es
  - entweder *nur* in A liegen [Element von A, *nicht* aber von B sein]
  - oder *nur* in B liegen [Element von B, *nicht* aber von A sein]
  - oder *sowohl* in A *als auch* in B liegen. [Element *sowohl* von A *als auch* von B sein])
  Das Zeichen " $\cup$ " erinnert aber an einen "<u>Vereinigungs</u>topf" und ist die *runde* Form von "v".

Beispiele:
die *Schnitt*menge aller Deutsch- und aller Mathematiklehrer besteht aus denjenigen Lehrern, die *sowohl* Deutsch *als auch* Mathematik unterrichten.
Die *Vereinigungs*menge aller Deutsch- und Mathematiklehrer besteht aus all denjenigen Lehrern, die

- *entweder* Deutsch unterrichten (und als zweites Fach durchaus ein *anderes* Fach als Mathematik haben können)
- *oder* Mathematik unterrichten (und als zweites Fach durchaus ein *anderes* Fach als Deutsch haben können),
- aber *auch* aus denjenigen, die *sowohl* Deutsch *als auch* Mathematik unterrichten.

Hier sieht man: die *Schnitt*menge $A \cap B$ zweier Mengen A und B ist *Teil*menge der *Vereinigungs*menge $A \cup B$:

$$A \cap B \subset A \cup B$$

Bzw. man kann auch sagen: jedes Element der Schnittmenge (Lehrer, die sowohl Deutsch als auch Mathematik unterrichten) kommt auch in der Vereinigungsmenge vor. Die Umkehrung gilt hingegen *nicht*: *nicht* jedes Element, das in der Vereinigungsmenge vorkommt (z.B. Lehrer, die Mathematik und Physik unterrichten), kommt auch in der Schnittmenge vor.

Lösen einer Textaufgabe

Textaufgabe	**reine Mathematik** (ohne Bezug zur Textaufgabe/zum Tennis)	
	Algebra/Rechnen	**Geometrie**
Aufgabenstellung: Angenommen, Du möchtest Tennis lernen. - Der 1. Verein verlangt eine *hohe Aufnahmegebühr* (AG) von 50 DM und einen *geringen Stundenpreis* (SP) von 5 DM. - Der 2. Verein verlangt eine *niedrige Aufnahmegebühr* (AG) von 20 DM und einen *hohen Stundenpreis* (SP) von 10 DM. Welchem Verein würdest Du beitreten?		
1. Schritt: Problematisierung: Worum geht´s eigentlich, worin liegt das Problem? Offensichtlich ist der 1. Verein *anfangs teurer*, aber *längerfristig billiger* (und der 2. Verein umgekehrt). Die Entscheidung, *welchem* der beiden Vereine ich beitrete, hängt also davon ab, wie *lange* ich Tennis spielen möchte: - nur so lange, bis ich die *ersten Handgriffe* kann? - oder so lange, bis ich *gut* spiele? - oder nach dem Lernen auch *dauerhaft*?		
2. Schritt: erste Mathematisierung: a) Sammeln der mathematischen **Fakten** in der Aufgabenstellung: 1. Verein: AG: 50 (DM) / SP: 5 (DM) 2. Verein: AG: 20 (DM) / SP: 10 (DM) b) **Definition der Unbekannten**: x = Anzahl der Stunden y = Preis für x Stunden inkl. Aufnahmegebühr (denn die Aufnahmegebühr muss ich ja auf jeden Fall bezahlen, und zwar *vor* der ersten Stunde, also bei 0 Stunden) c) Erfassen der mathematischen **Zusammenhänge** z.B. durch Wertetabelle:		

x	0	1	2	3
y für 1. Verein	50	55	60	65
	+5	+5	+ 5	
	= 50+ 0•5	= 50+ 1•5	= 50+ 2•5	= 50+ 3•5
y für 2. Verein	20	30	40	50
	+10	+10	+ 10	
	= 20+ 0•10	= 20+ 1•10	= 20+ 2•10	= 20+ 3•10

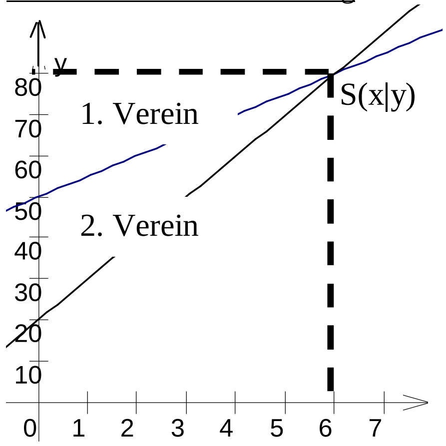
3. Schritt: Mathematisierung /Verallgemeinerung

1. Verein:
   y = 5•x + 50
2. Verein:
   y = 10•x + 20

Problem: anhand der Funktionsgleichungen kann man sich noch keine rechte **Vorstellung** machen und auch nicht absehen, *wann welcher* Verein günstiger ist.

Immerhin wissen wir, dass die beiden Gleichungen **linear** sind, und solche Gleichungen können wir bereits **graphisch** darstellen:

4. Schritt: Veranschaulichung



		5. Schritt: Deutung der Graphik: - wie erwartet, fängt der Graph des 1. Vereins *hoch* (bei 50) an, verläuft dann aber relativ *flach*; - wie erwartet, fängt der Graph des 2. Vereins *niedrig* an (bei 20), verläuft dann aber relativ *steil*; - die beiden Graphen **schneiden** sich in dem Punkt S (x | y) - *links* von diesem Punkt S liegt der Graph des 2. Vereins niedriger, ist also der 2. Verein preiswerter; - *in* dem Punkt S sind beide Graphen *gleich hoch*, also beide Vereine *gleich teuer*; - *rechts* von S liegt der Graph des 1. Vereins niedriger, ist also der 1. Verein preiswerter; - es bestätigt sich also unsere Anfangsvermutung, dass auf die Dauer der 1. Verein preiswerter ist, obwohl er anfangs teurer ist. **Entscheidend wichtig ist also der Punkt S** (x | y). Dann interessieren natürlich die **Koordinaten** des Punktes S. **Merke: <u>ein</u> Punkt im Zweidimensionalen besteht immer aus <u>zwei</u> Koordinaten**. Aus der Zeichnung lesen wir ab: S **scheint** die x-Koordinate 6 und die y-Koordinate 80 zu haben. ⇒ S (6 | 80)
6. Schritt: kurze Deutung des geometrischen Ergebnisses: - kurze Erinnerung, wie x und y definiert waren; dann: - bei 6 Stunden sind die beiden Vereine gleich teuer (kosten 80 DM); - bei *weniger* Stunden ist der *2.* Verein preiswerter, bei *mehr* Stunden ist der *1.* Verein preiswerter		
		7. Schritt: Problematisierung der Zeichnung: Zeichnungen sind immer **ungenau**: Vielleicht ist Gleichstand bei x = 5,9 und y = 79,5, also S (5,9 | 79,5)??? In der Mathematik möchte man aber immer möglichst **exakte** Ergebnisse haben.

		Es geht also kein Weg drumherum: wir müssen **rechnen**. Immerhin wissen wir aber schon, dass wir den Schnittpunkt S(x | y) suchen. Schauen wir uns dessen Eigenschaften also nochmals genauer an: S liegt (als einziger Punkt) auf **beiden** Geraden ⇒ S liegt auf der **ersten** Gerade **und** S liegt auf der **zweiten** Gerade ⇒ die Koordinaten x und y von S müssen die Geradengleichung **y = 5x + 50** erfüllen **und** die Koordinaten x und y von S müssen *gleichzeitig* die Gerdengleichung **y = 10x + 20** erfüllen. **Merke: ein <u>Punkt liegt genau dann auf einer Geraden</u>, wenn seine <u>*beiden* Koordinaten die Geradengleichung erfüllen</u>.**
	<u>8. Schritt: Rechnung</u> $\begin{cases} y = 5x + 50 \\ \quad \Vert \\ y = 10x + 20 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 50 = 10x + 20 \\ y = 10x + 20 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \bullet 6 + 20 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 80 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{ (6 \mid 80) \}$ $\Rightarrow \quad S (6 \mid 80)$	

	9. Schritt : Probe (für den Fall eines Rechenfehlers) - tatsächlich erfüllen x = 6 und y = 80 die erste **Ausgangsgleichung** y = 5x + 50 - tatsächlich erfüllen x = 6 und y = 80 die zweite **Ausgangsgleichung** y = 10x + 20	
		10. Schritt: Überprüfung an der Zeichnung: die Vermutung, dass S die Koordinaten 6 und 80 hat, hat sich bestätigt; Rechnung und Zeichnung stimmen überein
11. Schritt: Rückübersetzung in die Textaufgabe (s.o.): - bei 6 Stunden sind die beiden Vereine gleich teuer (kosten 80 DM); - bei *weniger* Stunden ist der *2.* Verein preiswerter, bei *mehr* Stunden ist der *1.* Verein preiswerter		
12. Schritt: Antwort (bei Textaufgaben dringend nötig und am besten *im Wortlaut der Frage*): - wenn ich **weniger** als 6 Stunden spielen wollte, würde ich dem **2**. Verein beitreten; - wenn ich **genau** 6 Stunden spielen wollte, wäre es **egal**, welchen Verein ich beiträte; - wenn ich **mehr** als 6 Stunden spielen wollte, würde ich dem **1**. Verein beitreten.		

Prozentrechnung

Die Prozentrechnung ist ein Spezialfall der Bruchrechnung, bietet aber zudem nochmal die Gelegenheit, sich Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Brüchen und Dezimalbrüchen anzuschauen.
Schauen wir uns zur Einführung der Prozentrechnung ein einfaches Beispiel an: der Staat will auf jeden verkauften Gegenstand eine Steuer erheben. Nun könnte man z.B. überlegen, auf jeden beliebigen Preis eine *feste Einheits*steuer aufzuschlagen, z.B. 2 DM. Das hieße konkret:

a) ein Lutscher, der normalerweise 0,20 DM bzw. 20 Pfennig kostet, kostet nun 0,20 DM + 2 DM = 2,20 DM
b) ein Radiowecker, der normalerweise 100 DM kostet, kostet nun 100 DM + 2 DM = 102 DM
c) ein Auto, das normalerweise 100 000 DM kostet, kostet nun 100 000 DM + 2 DM = 100 002 DM.

Hier zeigt sich schon, daß solche eine Steuererhebung durch *festen* Aufschlag ungerecht wäre: das kleine Kind, das sich einen Lutscher für 20 Pfennige vielleicht noch gerade leisten könnte, wäre bei einem Preis von 2,20 DM völlig ruiniert (davon hätte es sich ja früher nicht bloß einen, sondern 11 Lutscher kaufen können) den Millionär hingegen, der problemlos 100 000 DM für ein Auto übrig hat, würden die lächerlichen 2 DM Steuern nicht im mindesten jucken (davon könnte er sich gerade ein Fünfzigtausendstel Auto kaufen). Der Aufschlag eines festen oder auch *Absolut*-Betrages ist also wenig sinnvoll.
Der Fehler einer solchen Steuererhebung läge also darin, daß die Steuer *unabhängig* vom Ausgangspreis wäre. Gerechter wäre es also, wenn der Staat seine Steuern vom Ausgangspreis *abhängig* machen würde: das Kind müßte auf den *billigen* Lutscher *wenig* und der Millionär auf das *teure* Auto *viel* Steuern zahlen.

Dann könnte aber der Millionär protestieren und sagen, das sei doch sehr ungerecht. Ein weiteres Problem bestünde darin: offensichtlich müßte auf jeden verschiedenen Preis auch eine verschiedene Steuer erhoben werden. Da es aber so unendlich viele Preise gibt, bräuchte man also auch eine unendlich lange Steuerliste, in der man die zu jedem Preis gehörige Steuer nachschlagen könnte.
Der Trick, diesen Problemen zu entkommen, besteht nun darin, auf jeden Preis den gleichen *Anteil* des Preises als Steuern aufzuschlagen. Angenommen also, auf obige Preise sollen nicht mehr - wie oben - 2 DM als Steuern aufgeschlagen werden, sondern jeweils $\frac{1}{4}$ des Ausgangspreises. Damit sieht unsere Tabelle so aus:

a') der Lutscher kostet ursprünglich 0,20 DM. $\frac{1}{4}$ von 0,20 DM ist 0,05 DM. *Mit* Steuern kostet der Lutscher also 0,2 DM + 0,05 DM = 0,25 DM.
b') der Radiowecker kostet ursprünglich 100 DM. $\frac{1}{4}$ von 100 DM sind 25 DM. *Mit* Steuern kostet der Radiowecker also 100 DM + 25 DM = 125 DM.
c') das Auto kostet ursprünglich 100 000 DM. $\frac{1}{4}$ von 100 000 DM sind 25 000 DM. *Mit* Steuern kostet das Auto also 100 000 DM + 25 000 DM = 125 000 DM.

Schauen wir uns den Erfolg dieses Verfahrens an: der Lutscher ist nur *geringfügig* teurer geworden (um 5 Pfennige), das Kind also nicht pleite gegangen. Das Auto hingegen ist *erheblich* teurer geworden (um 25 000 DM), nur darf der Millionär sich *dennoch* nicht beschweren: er hat genau den gleichen *Anteil* vom Kaufpreis an Steuern bezahlt wie das kleine

Kind, nämlich ebenfalls $\frac{1}{4}$. Obwohl also *völlig verschiedene Steuerbeträge* herauskommen, ist das Verfahren völlig gerecht und einheitlich: es bezahlen zwar nicht mehr alle den gleichen (Absolut-)*Betrag*, aber dennoch alle den gleichen ("relativen") *Anteil*.
Diese *Anteils*berechnung läßt sich nun noch weiter vereinfachen: schauen wir uns dazu an, wie sich der Anteil an einem besonders praktischen Wert, den 100 DM des Radioweckers, berechnen läßt. Wir wissen, daß die Steuern 1/4 von 100 (bzw. $\frac{1}{4} \cdot 100$) bzw. 25 DM betragen. Oder wir können einfacher sagen: Die Steuern betragen 25 von 100 DM. Übersetzt man nun "von" ins Lateinische, so heißt es "pro". Und 100 heißt im Lateinischen "centum". Wir erhalten also:

Die Steuer beträgt 25 von 100 DM

bzw.

Die Steuer beträgt 25 pro centum

oder noch einfacher

Die Steuer beträgt 25 Prozent

oder in Kurzschreibweise

Die Steuer beträgt 25 %

25 hatten wir als $\frac{1}{4} \cdot 100$ erhalten. Ebenso gut hätten wir (durch Erweitern von $\frac{1}{4}$ mit 25) rechnen können:

$$25 = \frac{1}{4} \cdot 100 \underset{\cdot 25}{\overset{\cdot 25}{=}} \frac{25}{100} \cdot 100$$

Der Bruch 25/100 läßt sich also auch sprechen als "25 pro cent".
Diese Darstellung anhand der Hunderter hat nun verschiedene Vorteile:
1. läßt sie sich auf *andere* Ausgangszahlen bzw. -preise über tragen:

zu a'): Die Steuern auf einen 0,20-DM-Lutscher hatten wir als $\frac{1}{4} \cdot 0{,}20$ DM = 0,05 DM berechnet.

Genauso gut hätten wir $\frac{1}{4}$ mit 25 erweitern und rechnen können:

$$\frac{25}{100} \cdot 0{,}20 \text{ DM} = 0{,}05 \text{ DM}$$

zu c'): Die Steuern auf ein 100 000-DM-Auto hatten wir als $\frac{1}{4} \cdot 100\,000 = 25\,000$ DM berechnet.

Genauso gut hätten wir $\frac{1}{4}$ mit 25 erweitern und rechnen können:

$$\frac{25}{100} \bullet 100\,000 \text{ DM} = 25\,000 \text{ DM}$$

Halten wir also schonmal allgemein fest:

p Prozent von einem Ausgangswert A berechnet man als $\frac{p}{100} \bullet A$

Beispiel: 7 Prozent von 28 DM sind $\frac{7}{100} \bullet 28 \text{ DM} = 1{,}96 \text{ DM}$

2. Es erweist sich aus mehreren Gründen als besonders praktisch, erst den Anteil am Einheits-Ausgangswert 100 (und nicht etwa an 0,20 oder 100 000) zu betrachten, also ProCENTE zu behandeln:

A) Der entstehende Bruch $\frac{p}{100}$ ist ein *Dezimal*bruch, d.h., er hat im Nenner eine *Zehner*potenz. Was das zur Folge hat, sei an einem einfachen Beispiel gezeigt:

25 Prozent = 25 von Hundert = $\frac{25}{100} = 0{,}25$

Nun bedeutet 0,25 aber genau $0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ bzw. 25 Hundertstel. Oder einfacher: die Prozentzahl ist *direkt* in die Dezimalschreibweise übernehmbar:

<u>25</u> Prozent = 0,<u>25</u>

(im Vergleich: wie wir gesehen haben, könnte man statt 25 % auch $\frac{1}{4}$ schreiben; für $\frac{1}{4}$ gilt aber nicht, daß es so einfach in 0,<u>4</u> übersetzbar ist; sondern $\frac{1}{4} = 0{,}25$ und da sieht man zwischen den Ziffern 4 und 25 *keinerlei* Beziehung mehr)

Vorsicht, beliebter Fehler!: 25 % von 100 sind 25; 25 % von 200 sind aber natürlich *nicht* mehr 25, sondern $\frac{25}{100} \bullet 200 = 2 \bullet 25 = 50$, also das *Doppelte*.)

B) p % von einem Ausgangswert A bedeutet schlichtweg: *jeder* Ausgangswert A (egal, ob A = 100 oder A = 250 oder ...) wird in immer *100* gleichgroße Teile zerlegt (für A = 100 ergeben sich dann 100 Teile à 1, für A = 250 ergeben sich 100 Teile à 2,5), und von diesen Teilen werden p Stück genommen.
Wenn also p = 40 % aller Wahlberechtigten 50 Millionen Deutschen CDU wählen, so heißt das: die 50 Millionen werden in 100 gleichgroße Gruppen aufgeteilt, von denen jede 50 000 000:100 = 500 000 Personen umfaßt. Und 40 dieser Gruppen wählen CDU, insgesamt also 40 • 500 000 = 20 000 000 Menschen. Hier merkt man nebenbei, daß sich solch ein Verfahren gut zum *Rechnen* eignet, aber keine *reale* Bedeutung hat: es gibt keinerlei Gruppe à 500 000 Menschen, die geschlossen CDU wählt, und schon gar nicht gibt´s in Deutschland 40 Vereine mit je exakt 500 000 Mitgliedern.

C) In der Regel läßt sich mit Prozenten (Hundertsteln) fein genug differenzieren. Will der Staat also z.B. seine Mehrwertssteuern von 14 % erhöhen, so kann er auf 15 % hinaufgehen. Da ist eine Erhöhung um 1 %, und das macht bei einem Ausgangspreis von 100 DM nur *eine* DM aus.
Manchmal ist allerdings eine noch viel feinere Unterteilung nötig. Z.B. bei 0,1 % Alkohol im Blut ist man noch halbwegs nüchtern, bei 0,2 % hingegen ist man schon voll betrunken. Wegen solcher Feinheiten führt man auch die Promille ($^0/_{00}$) ein, und ein Promill ist nicht 1/100, sondern 1/1000. (Promille = pro mille = pro Tausend)

Angenommen, auf einen Gegenstand im Wert von A = 200 DM soll eine Steuer von p = 10 % erhoben werden. Das sind dann Z = 20 DM. *Insgesamt* kostet der Gegenstand dann einen *End*wert E = 200 DM + 20 DM = 220 DM. Der Zuschlag Z = 20 DM, der draufgeschlagen wurden, heißen dabei in *Bank*kreisen „Zinsen" (oder in unserem Fall „Steuern").
Wohlgemerkt: die *Zinsen* (20 DM) sind nicht mit dem *Prozentsatz* (10 %) zu verwechseln.

Allgemein gilt:

Ist - A der Ausgangswert, auf den Prozente erhoben werden sollen,
- p der erhobene Prozentsatz,
- Z der Zuschlag (Zinsen, Steuern ...)
- und E der Endwert,

so gilt:

$$Z = \frac{p}{100} \cdot A \qquad (\#)$$

und E = A + Z

Die Formel (#) hat - wie jede mit 3 Unbekannten - den Vorteil, daß man, wenn man *zwei* der Unbekannten *kennt*, den *dritten errechnen* kann.
Also: Z, p bekannt ⇒ A errechenbar
Z, A " ⇒ p "
p, A " ⇒ Z "

Anwendungen:

1) Wieviel Prozent (p?) sind 7,5 DM (= Z) von 250 DM (= A)?

$$7{,}5 = \frac{x}{100} \cdot 250 \Leftrightarrow 7{,}5 = x \cdot 2{,}5 \;|: 2{,}5$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Antwort: 7,5 DM sind genau 3 % von 250 DM.
2) Zinseszinsrechnung:

Angenommen, ich gehe mit 200 DM zur Bank und erhalte 8 Prozent Zinsen. Dann habe ich - nach *einem* Jahr

$$\underbrace{200}_{\text{Ausgangsbetrag}} + \underbrace{\left(\frac{8}{100}\right) \cdot 200}_{\text{Zinsen}} = \underbrace{\left(1 + \frac{8}{100}\right) \cdot 200 \text{ DM} = A_1}_{\text{Gesamtbetrag}}$$

(Ausrechnen ergibt $A_1 = 216$ DM)

Nun erhalte ich im folgenden Jahr natürlich Zinsen auf die bereits angesparten $A_1 = 216$ DM, habe also insgesamt

- nach *zwei* Jahren

$$A_1 + (\frac{8}{100}) \cdot A_1 = (1 + \frac{8}{100}) \cdot A_1 =$$
$$= (1 + \frac{8}{100}) \cdot (1 + \frac{8}{100}) \cdot 200 =$$
$$= (1 + \frac{8}{100})^2 \cdot 200 \text{ DM} = A_2$$

(Ausrechnen ergibt $A_2 = 233{,}28$ DM)

- entsprechend besitze ich nach *drei* Jahren

$$(1 + \frac{8}{100})^3 \cdot 200 \text{ DM} = A_3$$

(Ausrechnen ergibt $A_3 = 251{,}9424$ DM)

Oder gleich allgemein:

Ein Guthaben von A DM steigert sich bei p % Zinsen nach n Jahren auf $A_n = (1 + \frac{p}{100})^n \cdot A$ DM

Hintergründe der Prozent- und Zinsrechnung:

Nun aber sei doch nochmal sehr kurz angedacht, wozu Zinsen überhaupt da sind. Oben war schon anhand der Steuern gezeigt worden, daß der Aufschlag eines *Prozentsatzes* gerechter ist als der eines *Festbetrages* (und doch: müßte es nicht einen „progressiven", sich erhöhenden Steuersatz geben?: der kleine Mann zahlt nur 10 % Steuern seines kleinen Gehalts, der reiche 30 % Steuern?).

Wieso aber muß ich *überhaupt* Zinsen zahlen, wenn ich mir Geld leihe?

Vielleicht fragt man sich das nichtmal mehr, weil es allzu selbstverständlich geworden ist. War es aber keineswegs immer: ist also somit auch keineswegs selbstverständlich und automatisch „gut".

Die einfachste Antwort beim heutigen Bankwesen ist natürlich, daß die Bank auch von irgendetwas „leben", sprich, ihre Angestellten bezahlen muß. Nähme sie das Geld ein und verliehe es *ohne* Zinsen weiter, bliebe ihr nichts für die Vermittlungstätigkeit. Banken lassen sich also schlichtweg ihre Arbeitszeit bezahlen, und „Zeit ist Geld".

Aber all das ist natürlich überhaupt erst eine hinreichende Antwort, seit sich Menschen *hauptberuflich* mit Geldverleih beschäftigen.

Unter Freunden mag es bis heute noch üblich sein, sich im Notfall Geld *ohne* Zinsen zu leihen (und doch wird oft noch gesagt, bei Geld höre die Freundschaft auf. So weit ist es also schon gekommen?). Warum aber hat - als Beispiel - ein reicher Bauer im Mittelalter mit überflüssigem Geld seinem armen Nachbarn das Geld nicht zinsfrei gegeben? Aus purer Schikane, aus blankem Egoismus, um sogar noch am Elend des Armen zu verdienen?

Vermutlich gibt es zwei bessere Gründe: hätte der reiche, erfolgreiche Bauer das Geld *nicht* verliehen, sondern selbst behalten und investiert, so hätte er damit vermutlich gewisse Erfolge gehabt, z.B. sein Geld im Jahr um 3 % vermehrt. *Diesen* Ausfall (wo er nun das Geld verliehen hat und nicht selbst investieren kann) will er nun also vom armen Bauern erstattet haben.

Zinsen sind also *Ausgleich* für entgangene Investitionstätigkeit/Gewinne und Ausdruck von wirtschaftlichem *Wachstum* (ja, vielleicht sind sie sogar *Anreiz* zu wirtschaftlichem Wachstum: ich leihe mir nur Geld incl. Zinsen, wenn ich erwarten kann, das sich das für mich lohnt)
Ein zweiter guter Grund, Zinsen zu verlangen, mag darin liegen, daß der Leihende auf die Dauer immer *mehr* zurückzahlen muß (Ausgangsbetrag plus Zinsen plus Zinseszinsen) - und sich also bemühen wird, die Zinsen möglichst schnell zurückzuzahlen. Zinsen sind also eine *Versicherung* für den Zins*geber*, sein Geld auch wirklich und möglichst schnell zurückzubekommen.
All das gilt natürlich nur für faire und gleichberechtigte Marktverhältnisse. Wenn nun aber 1. der reiche Bauer sein Vermögen gar nicht durch gerechte eigene Arbeit erworben hätte; wenn nun aber 2. die Gewinnchancen keineswegs gleich wären (man also z.B. mit *wenig* Geld viel geringeren - prozentualen - Gewinn machen kann als mit *viel* Geld; schließlich bekomme ich bei einer Bank für mehr Geld ja meist auch höhere Prozent-/Zinssätze)? Dann würden *scheinbar* gerechte Zinsen tatsächliche gesellschaftliche Ungerechtigkeiten verbergen und sogar verschlimmern.
Es geht hier nicht um eine billige „kommunistische“ Kritik des Bank- und Zinswesens (und doch: ist nicht was dran an Brechts These, erheblich intelligenter und dauerhaft ertragsreicher [und scheinbar moralischer] sei es, eine Bank zu *gründen* als eine *auszurauben*?). Sondern es geht mir um die „Ideengeschichte“ des Geldverleihs, d.h., die sich im Laufe der letzten Jahrhunderte verändernde gesamtgesellschaftliche *Einstellung* (= Ideen) zum Geldverleih.
Und damit befinden wir uns auch schon in der *Sozialgeschichte*. Etwa die (katholische) Kirche hat lange Zeit nichts mit Geldverleih gegen Zinsen anfangen können, ja, sie sogar scharf moralisch verurteilt (vielleicht mußte die Reformation keineswegs aus religiösen, sondern aus ökonomischen Gründen kommen, weil die katholische Kirche ein Hemmschuh der kapitalistischen Entwicklung war - und z.B. der Calvinismus dessen Förderung). Weil nun aber Geldverleih unvermeidbar war (Grundvoraussetzung bei der Entstehung des Kapitalismus), hat man ihn dann auf sehr merkwürdige (fast möchte ich sagen: verlogene) Art hingenommen: man hat den Juden alle „ehrbaren“ Berufe verboten und sie somit geradezu in den (für Christen verbotenen) Geldverleih hineingetrieben - und ihnen genau das dann vorgeworfen (nur merkwürdig: da warfen es genau diejenigen den Juden vor, die doch deren beste Kunden waren; es ist fast so, als würden ausgerechnet die Freier Prostituierte verurteilen).
Was da mit dem Geldverleih geschah, ist im Grunde typisch für Ideologien: genau das Gegenteil von dem zu sagen, was man tut, die eigenen „Schandtaten“ andauernd zu kaschieren. Vielleicht ist solche „Verlogenheit“ aber schlichtweg unvermeidbar (unbewußt), wenn die alten Denkweisen (Marx: der geistige *Überbau*) noch nicht zu den neuen wirtschaftlichen Gegebenheiten (Marx: die ökonomische *Basis*) passen.
Geldverleih stand *immer* im Ruf, kein „ordentlicher“ Beruf zu sein: wer da (hauptberuflich) verleiht, „tut“ doch (angeblich) nichts Richtiges, außer Geld hin- und herzuschieben, das *andere* erarbeitet haben und abbezahlen müssen. Solcher Geruch ist teilweise bis heute an diesem Geschäft hängengeblieben (z.B. im Klischee, die Banken bauten sich mit ihrem doch irgendwie unseriös erworbenen Geld nur große Glaspaläste). Und am meisten verachtet man auch heute noch sogenannte Kredithaie.
Vielleicht liegt solch eine Verurteilung daran, daß Geldverleih schlichtweg eine sehr abstrakte Sache ist, keine „sichtbare“ Arbeit.
Nochmals: es geht mir nicht um billige Kritik (meist derer, die von Wirtschaft keinen blassen Schimmer haben), sondern darum herauszufinden, wie Geldverleih (mit Zinsen) zur Stütze unseres derzeitigen Wirtschaftssystems wurde (egal, was man von diesem hält) und wie sehr sich die Einstellung dazu verändert hat.

Kommt hinzu, daß fast jeder Zinsen für selbstverständlich hält, aber kaum einer weiß, wie sie entstehen und reguliert werden (vgl. z.B. die Funktion der Bundesbank und des Lombardsatzes).

Allgemeine Formel, aus der jede Größe zu berechnen ist, wenn die beiden *anderen* bekannt sind:

$$P = G \cdot \frac{p}{100} \qquad *$$

$$\text{Prozentwert} = \text{Grundwert} \cdot \frac{\text{prozentsatz}}{100}$$

1. Formel zur Berechnung des Prozent*wertes* P
Die Formel * muß überhaupt nicht mehr verändert werden, sondern kann so übernommen werden.
Beispiel: G = 200 DM, p = 7, P = ?
Einsetzen von G und p in * ergibt $P = 200\text{DM} \cdot \frac{7}{100}$ und somit P = 14 DM

2. Formel zur Berechnung des *Grund*wertes G
Wir gehen von der allgemein Formel * aus:

$$P = G \cdot \frac{p}{100}$$

Da wir G rechts alleine haben wollen, stört dort noch $\frac{p}{100}$. Bisher wurde G damit *multipliziert*, also können wir es durch *Division* beseitigen: wir *dividieren* auf *beiden* Seiten der Gleichung durch $\frac{p}{100}$ und erhalten:

$$P : \frac{p}{100} = G$$

Anwendung der Bruchrechenregeln führt zu

$$\frac{P \cdot 100}{p} = G \qquad **$$

Beispiel: P = 24 DM, p =2, G = ?
Einsetzen von P und p in ** ergibt $\frac{100 \cdot 24\text{DM}}{2} = G$ und somit G = 1200DM

3. Formel zur Berechnung des Prozent*satzes* p
Wir gehen wieder von der allgemein Formel * aus:

$$P = G \cdot \frac{p}{100}$$

Da wir p rechts alleine haben wollen, stören rechts noch G und die 100 im Nenner. Beseitigen wir dazu erstmal G. Da bisher damit *multipliziert* wurde, können wir es durch *Division* beseitigen: wir *dividieren* auf *beiden* Seiten der Gleichung durch G und erhalten:

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{100}$$

Jetzt stört rechts nur noch der Nenner 100. da bisher durch 100 *dividiert* wurde, können wir es durch *Multiplikation* mit 100 beseitigen: wir *multiplizieren* auf *beiden* Seiten der Gleichung mit 100 und erhalten:

$$\frac{P}{G} \cdot 100 = p \quad ***$$

Beispiel: G = 400 DM, P = 5 DM, p = ?

Einsetzen von G und P in *** ergibt $\frac{5DM}{400DM} \cdot 100 = p$ und somit $p = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Potenzen

Wir wissen bereits, daß die *Multiplikation* die Abkürzung einer *Addition* ist.
Z.B. ist $5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$.
Summe von fünf 4en
Die Multiplikation läßt sich nun ihrerseits nochmals abkürzen.
So soll z.B. 5^3 eine Abkürzung für $5 \cdot 5 \cdot 5$ sein.
Insgesamt haben wir also:

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 =$
Produkt von drei 5en

$= 5 \cdot (5 \cdot 5) =$
$= 5 \cdot (5 + 5 + 5 + 5 + 5) =$
Summe von fünf 5en

$= (5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)$
Summe von 5 Klammern mit je fünf 5en = Summe von fünfundzwanzig 5en

5^3 ist also eine höchst gesteigerte Abkürzung für einen sehr langen Ausdruck.
Da lateinisch "potenzieren" = steigern heißt, spricht man daher auch von einer "Potenz".
Weil also Potenzen höchst gesteigerte Abkürzungen sind, verbergen sich hinter *harmlos* und *kurz* aussenden Ausdrücken wie z.B. 5^3 oftmals *riesige* Zahlen ($5^3 = 125$): Potenzen *explodieren rasend schnell* (vgl. Exponentialfunktionen).
Allgemein definieren wir uns:

b^n nennen wir eine "Potenz". Dabei soll b^n bedeuten, daß b insgesamt n-mal mit sich *selbst* multipliziert wird. Also

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot .... \cdot b \cdot b}_{n\ b's}$$

Weil b *unten* steht, nennen wir es auch "Basis", die Zahl n *oben* hingegen nennen wir "Exponent" oder "Hochzahl".
b^n spricht man "b hoch n" aus.

Beispiele:

A) $2^7 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{sieben 2en}} = 128$

B) Hingegen ist $7^2 = \underbrace{7 \cdot 7}_{\text{zwei 7en}} = 49$

Aus A) und B) folgt 2^7 ungleich 7^2, und daraus können wir schon folgern:

Im allgemeinen ist b^e *ungleich* e^b.

C) Weiterhin gilt: $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ ungleich $14 = 7 + 7 = 7 \cdot 2$. Also 7^2 ungleich $7 \cdot 2$. Verallgemeinert:

Im allgemeinen ist b^e *ungleich* b • e.

Vorsicht!: Die Verwechslung z.B. von 2^3 und 2•3 ist einer der beliebtesten Fehler bei den Potenzen. Sie passiert besonders leicht, wenn einem durch unsaubere Schreibweise der Exponent auf die Höhe der Basis runterrutscht.

Potenzgesetze

Weil allzu häufig Verwechslungen mit katastrophalen Folgen stattfinden, sei gleich vorweg auf den grundsätzlichen Unterschied zu Binomis hingewiesen: Binomis waren die Potenz von *Summen* und *Differenzen* $[(a + b)^2]$, die Potenzgesetze hingegen gelten nur für Potenzen von *Produkten* oder *Brüchen* [z.B. $(a \cdot b)^2$ oder $(a : b)^2$]. Um den Unterschied klarzumachen, wird im folgenden immer wieder auf Fehler hingewiesen, die sich bei verbotener Anwendung der Potenzregeln auf Summen und Differenzen ergeben!!!

1. Potenzgesetz: *Multiplizieren* von Potenzen mit *gleicher Basis*:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (aus • in der Basis wird + im Exponenten,
aber $a^n + a^m$ *ungleich* $a^{n \cdot m}$
und $a^n + a^m$ *ungleich* a^{n+m})

Beweis: $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ a's}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ a's}} = a^{n+m}$ $\Rightarrow$ n+m a's

2. Potenzgesetz: *Dividieren* von Potenzen mit *gleicher Basis*:

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (aus : in der Basis wird - im Exponenten,
aber $a^n - a^m$ *ungleich* $a^{n:m}$
und $a^n - a^m$ *ungleich* a^{n-m})

Beweis: $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{n\text{ a's}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ a's}}} = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n-m\text{ a's}} = a^{n-m}$

nach Kürzen bleiben oben n-m a's

(Vorverweis: wie beim log stehen + und • bzw. : und - in Zusammenhang)

3. Potenzgesetz: *Multiplizieren* von Potenzen mit *gleichem Exponenten*:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(es bleibt sich also gleich, ob ich *erst* potenziere und *dann* multipliziere oder umgekehrt)

Vorsicht! Typischer Fehler: bei Auflösen der rechten Klammer wird links nur b potenziert:

falsch: $(5x)^2 = 5x^2$, richtig: $(5x)^2 = 5^2x^2 = 25x^2$

Beweis: $a^n \cdot b^n = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ a's} \cdot \underbrace{b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ b's} \underset{\text{Komm.Gesetz}}{=} \underbrace{(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\ (ab)'s} = (ab)^n$

<u>4. Potenzgesetz:</u> *Dividieren* von Potenzen mit *gleichem Exponenten*: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (wieder bleibt es sich gleich, ob ich *erst* potenziere und *dann* dividieren oder umgekehrt)

Beweis:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overset{n\ a's}{\overbrace{a\bullet\ldots\bullet a}}}{\underset{n\ b's}{\underbrace{b\bullet\ldots\bullet b}}} \underset{\text{Bruchrechenregel}}{=} \overbrace{\frac{a}{b}\bullet\ldots\bullet\frac{a}{b}}^{n\ (a/b)'s} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

<u>5. Potenzgesetz:</u> Potenzieren einer *Potenz*: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

Beweis: $(a^n)^m = \underbrace{a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{m\ (a^n)'s} = \underbrace{\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\ a's}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\ a´s}}_{m\ (a\cdot\ldots\cdot a)'s} = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\cdot m\ a's} = a^{n\cdot m}$

<u>6. Potenzgesetz:</u> $a^0 = 1$ für *alle* a,

denn

$$1 = \frac{a^m}{a^m} \underset{\text{2. Pot.ges.}}{=} a^{m-m} = a^0$$

<u>7. Potenzgesetz:</u> $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Beweis: Multiplikation auf beiden Seiten mit a^n ergibt

$$a^{-n}\cdot a^n = 1 \underset{\text{1. Pot.ges.}}{\Leftrightarrow} a^{-n+n} = 1 \underset{\text{6. Pot.ges.}}{\Leftrightarrow} a^0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

Wegen der Äquivalenzzeichen läßt sich also umgekehrt aus 1 = 1 das 7. Potenzgesetz folgern.

8. Potenzgesetz:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Beweis: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad |^n$

$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$

links 5. Pot.-Gesetz, rechts Definition der $\sqrt[n]{a}$

$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$

$\Leftrightarrow a^1 = a$

$\Leftrightarrow a = a$

Wegen der Äquivalenz kann man somit von der Schluß- auf die Anfangszeile zurückschließen.

Alle Potenzgesetze sollte man vorwärts und rückwärts kennen und beherrschen.

Es gibt (leider) *kein* Potenzgesetz für *Summen* oder *Differenzen* von Potenzen (z.B. a^n +/- b^n läßt sich also *nicht* vereinfachen. Der schlimmste Fehler: insbesondere ist a^n +/- b^n *ungleich* (a +/- b)^n. Vgl. Binomi).

Ganz wichtig: Summen und Differenzen tauchen bei den Potenzregeln nur in den *Exponenten* auf!!!

Ganzrationale Funktionen 2. Grades/quadratische Funktionen

Machen wir uns zuvor klar, was Quadrieren bedeutet.

> Definition: $x^2 = x \cdot x$ (*ungleich* $x + x = 2x$!!!)

Beispiele:
a) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$
Aus a) und b) folgt schon:

> Für *alle* $x \in \mathbb{Q}$ (später $\mathbb{R}$), also auch negative, ist $y = x^2$ *positiv*. Der *Definitions*bereich ist also g*anz* $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$), der *Werte*bereich hingegen $\mathbb{Q}^+_0$ (bzw. $\mathbb{R}^+_0$).

c) den Fall $(-3)^2$ aus b) kann man leicht mit -3^2 verwechseln.
- In $(-3)^2$ wird die *ganze* Klammer quadriert, also eine *negative* Zahl. Das Ergebnis ist *positiv* (9).
- In -3^2 hingegen bezieht sich das Quadrat *nur* auf 3 bzw. + 3, während das Minus davor die ganze Zeit mitgeschleppt wird. Es ergibt sich:
  $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$
  Das Minus wird also *nicht* mitquadriert und bleibt daher *erhalten*.

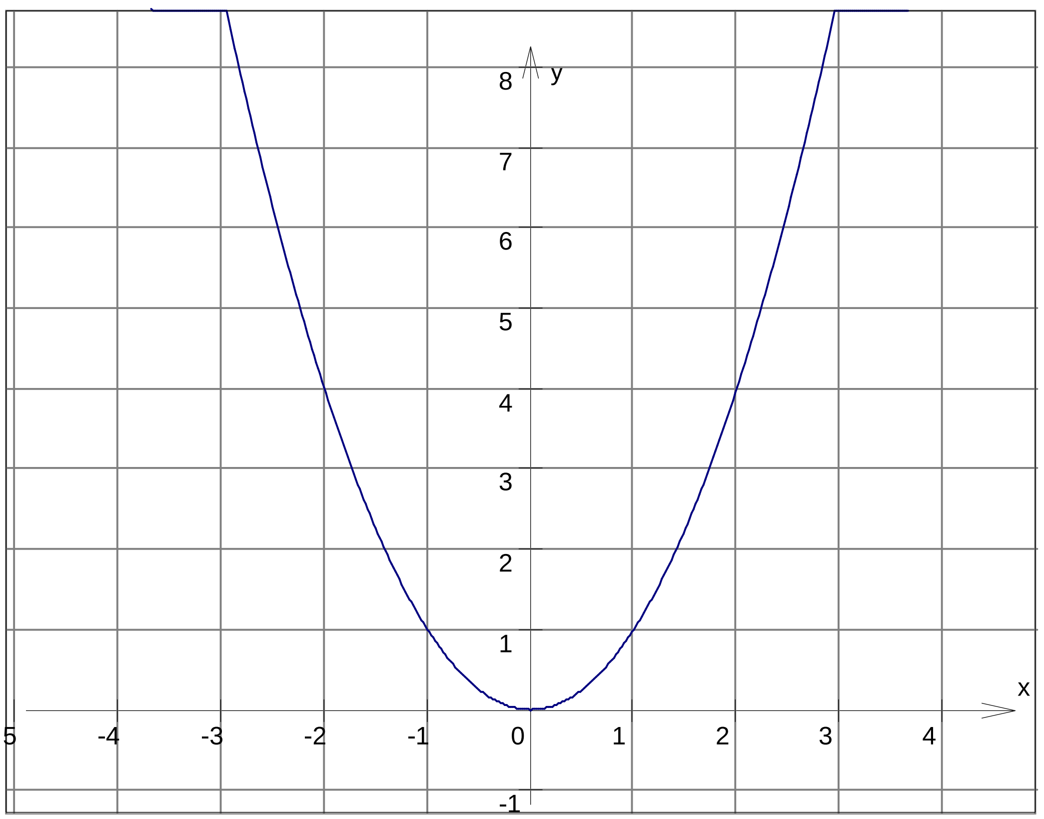
Die einfachste quadratische Funktion ist f: $y = x^2$. Eine Wertetabelle ergibt:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Auffällig daran ist:

> Der Graph der Funktion f: $y = x^2$ ist symmetrisch zur y-Achse, denn
> $\underline{f(x)} = (x)^2 = x^2 = \underline{f(x)}$, z.B.
> $\underline{f(3)} = (3)^2 = +9 = (+3)^2 = \underline{f(+3)}$.

Der Graph der Funktion sieht folgendermaßen aus:



Wichtig: der Graph wird oben immer *breiter*, bleibt aber (von links aus gefahren) eine *Links*kurve und wird auch nie zu einer *Geraden*

Den Graphen von f: $y = x^2$ nennt man auch "Normalparabel". Man beachte beim Zeichnen dieser Normalparabel insbesondere, daß der Graph im Ursprung keine Spitze bildet, sondern die x-Achse *berührt*.

Quadratische ganzrationale Funktionen der Form

$$y = x^2 + bx + c$$

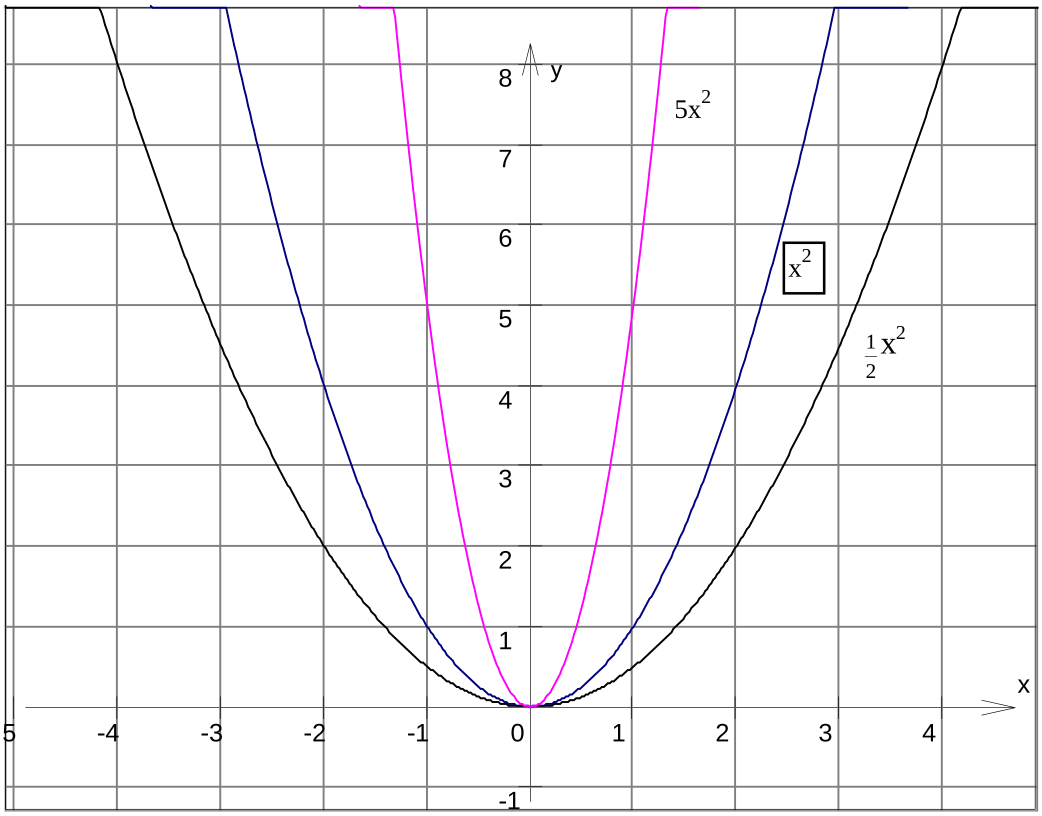
(also mit dem Koeffizienten 1 vor dem x^2) haben *alle* die Form einer Normalparabel, sind allerdings eventuell seitlich oder nach oben *verschoben* (s.u.).

Steht vor dem x^2 ein Koeffizient k mit $0 < k < 1$, so wird der Graph der Normalparabel *gestaucht*, d.h zur x-Achse hingebogen.

Steht vor dem x^2 ein Koeffizient k mit $1 < k$, so wird der Graph der Normalparabel *gestreckt*, d.h. zur y-Achse hingebogen.

Beispiele: der Graph von f: $y = 5x^2$ ist wegen $1 < 5$ gestreckt,

der Graph von g: $y = \frac{1}{2}x^2$ ist wegen $0 < \frac{1}{2} < 1$ gestaucht:



Die Scheitelpunktsform

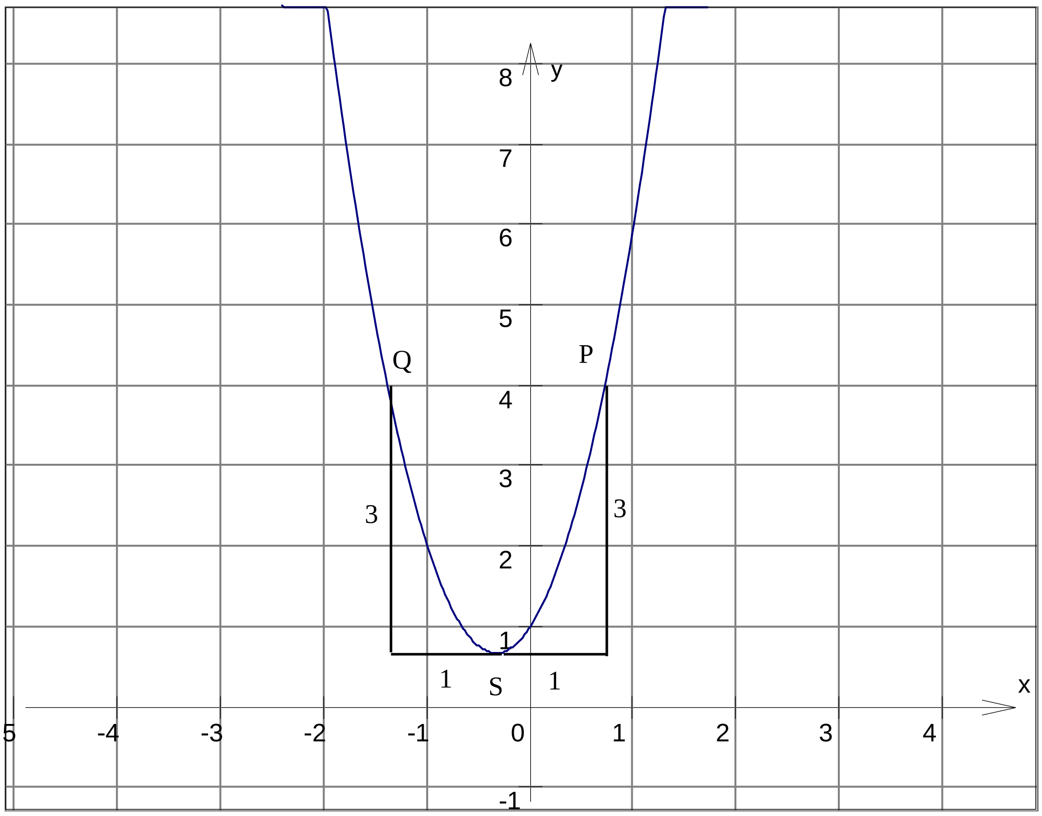
Wenn wir den niedrigsten/höchsten Punkt einer Parabel "Scheitelpunkt" nennen, so kann man sich das Zeichnen der Planskizze einer Funktion f: $y = ax^2 + bx + c$ folgendermaßen vereinfachen: man geht vom Scheitelpunkt S

a) 1 nach *rechts* und a nach *oben* (bzw. für negatives a nach *unten*) und erhält einen zweiten Punkt P,

b) 1 nach *links* und a nach *oben* (bzw. für negatives a nach *unten*) und erhält einen dritten Punkt Q.

Verbindet man nun die drei Punkte - und zwar immer waagerecht vom Scheitelpunkt ausgehend -, so erhält man eine wohlgeformte, runde statt eckige (Normal)Parabel.

Z.B. für $y = 3x^2+2x+1$:



Bei diesem Verfahren fehlt allerdings noch die Scheitelpunkts*be*rechnung (s.u.)

Ohne Nachweise sei noch erwähnt:

1. Graphen von Funktionen der Form $y = +ax^2$ sind nach *oben* geöffnet
2. Graphen von Funktionen der Form $y = -ax^2$ sind nach *unten* geöffnet
3. Graphen von Funktionen der Form $y = ax^2$ sind gegenüber der Normalparabel gestreckt/gestaucht
4. Graphen von Funktionen der Form $y = (x + b)^2$ sind gegenüber der Normalparabel um b nach *links* verschoben (also trotz + ins Negative!)
5. Graphen von Funktionen der Form $y = (x - b)^2$ sind gegenüber der Normalparabel um b nach *rechts* verschoben(also trotz - ins Positive!)
6. Graphen von Funktionen der Form $y = (x +/- b)^2$ sind also gegenüber der Normalparabel um b *seitlich* verschoben
7. Graphen von Funktionen der Form $y = x^2 + c$ sind gegenüber der Normalparabel um c nach *oben* verschoben
8. Graphen von Funktionen der Form $y = x^2 - c$ sind gegenüber der Normalparabel um c nach *unten* verschoben
9. Graphen von Funktionen der Form $y = x^2 +/- c$ sind also gegenüber Normalparabeln um c *vertikal* verschoben

Daraus ergibt sich insgesamt: hat eine quadratische Funktion die

"Scheitelpunktsform" (aus der wir - wie wir unten sehen werden - den Scheitelpunkt direkt *ablesen* können).

1. 3. 4. 6. 7. 9.
+ + +
$y = -\; a\; (x - b)^2 - c$
2. 5. 8.

So können wir die Eigenschaften (zwecks Zeichnung) direkt *ablesen* und den Graphen aus der Normalparabel erhalten, indem wir diese (in dieser Reihenfolge)

a) seitlich verschieben (parallel zur x-Achse)
b) strecken/stauchen
c) gegebenenfalls nach unten spiegeln
d) vertikal verschieben (parallel zur y-Achse)

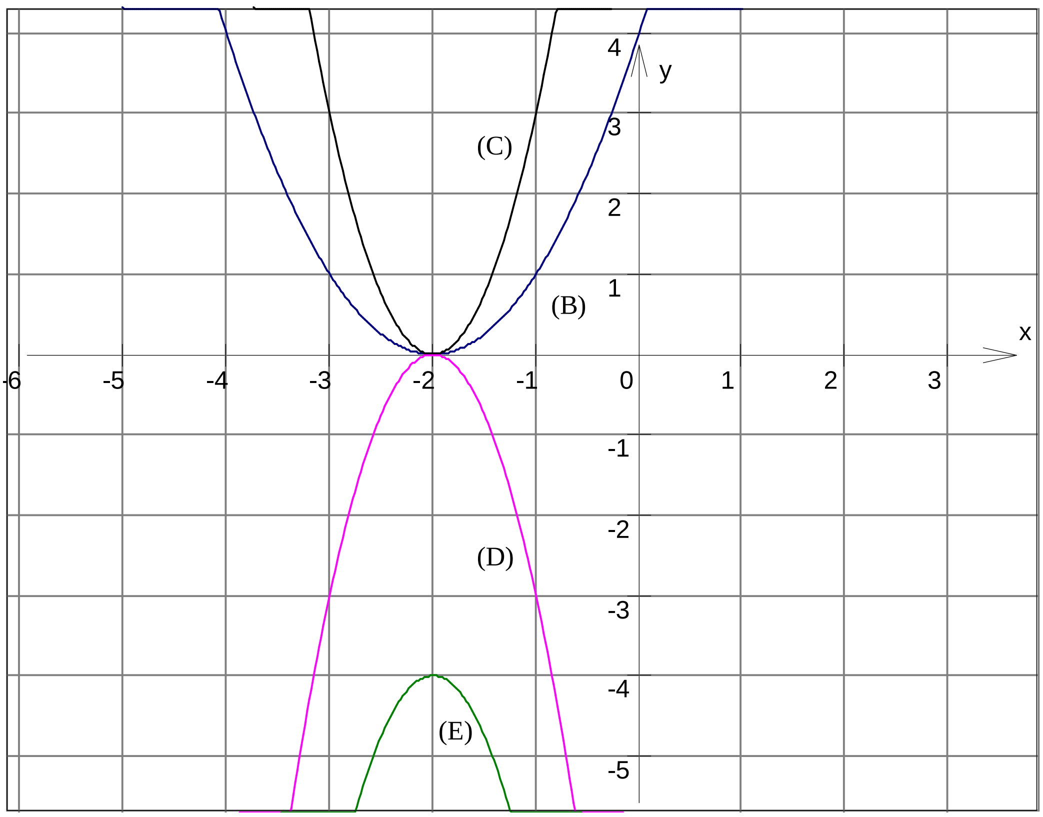
Den Scheitelpunkt können wir dann schon ablesen als

4. 7.
- +
$S(+ b \mid - c)$
5. 8.

(genaueres siehe unten: Scheitelpunktsberechnung)

Beispiel: Den Graphen von

(A) $y = -3(x + 2)^2 - 4$ können wir nacheinander zusammensetzen:
(B) $y = (x + 2)^2$ ggb. Normalparabel um 2 nach *links* verschoben
(C) $y = 3(x + 2)^2$ ggb. (B) um 3 *gestreckt*
(D) $y = -3(x + 2)^2$ ggb. (C) an x-Achse *gespiegelt*
(E) $y = -3(x + 2)^2 - 4$ ggb. (D) um 4 nach *unten* verschoben:



Leider haben aber viele quadratische Funktionen noch *nicht* diese Scheitelpunktsform. Wir werden unten bei der quadratischen Ergänzung sehen, wie man sie dann *dennoch* erreicht.

Nullstellenberechnung:

"Null*punkte*" nennt man die Schnittpunkte mit der x-Achse. Dort gilt y = 0. Den zugehörigen x-Wert nennt man Null*stelle*. Angenommen, wir wollen die Nullpunkte der Funktion f: $y = (x - 3)^2 - 16$ berechnen. Dazu setzen wir für y die 0 ein und erhalten:

$$0 = (x - 3)^2 - 16 \quad | + 16$$
$$\Leftrightarrow \quad 16 = (x - 3)^2$$

Nun setzen wir vorerst (x - 3) = z, und damit erhalten wir:

$$16 = \quad z^2$$

Gesucht ist also eine Zahl z, deren Quadrat 16 ergibt.
Das gilt für z = +4 oder z = - 4
Setzen wir nun für z wieder (x - 3) ein, so erhalten wir

$$x - 3 = +4 \;\text{ oder }\; x - 3 = - 4 \quad |+ 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 7 \;\text{ oder }\; x = - 1$$
$$\Rightarrow \quad = \{7 \quad ; \quad - 1\}$$
$$\Rightarrow \quad NP_1\,(7|0) \qquad NP_2\,(- 1|0)$$

Komplizierter wird's bei der leicht veränderten Gleichung

$$y = (x - 3)^2 - 2$$

Wie eben rechnen wir los:

$$0 = (x - 3)^2 - 2 \quad | + 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 = (x - 3)^2$$

Nun setzen wir vorerst (x - 3) = z, und damit erhalten wir:

$$2 = \quad z^2$$

Gesucht ist also eine Zahl z, deren Quadrat 2 ergibt. Solch eine Zahl kennen wir aber noch nicht. Siehe deshalb Abschnitt "Wurzel(funktion)".

Scheitelpunktsberechnung:

Wenn wir den Scheitelpunkt der Funktion f: $(x - 3)^2 - 2$ herausbekommen wollen, müssen wir uns erst wieder daran erinnern, was das eigentlich ist:

- der Scheitelpunkt ist derjenige Punkt einer Parabel, der am *niedrigsten* (bei nach *oben* offener Parabel) / *höchsten* (bei nach *unten* offener Parabel) liegt. Anders gesagt:
- der Scheitelpunkt ist derjenige Punkt, dessen y-Koordinate *minimal* (bei nach *oben* offener Parabel bzw. *maximal* (bei nach *unten* offener Parabel) ist.

Weil $y = (x - 3)^2 - 2$ wegen des positiven Koeffizienten 1 vor der Klammer nach *oben* offen ist, müssen wir also untersuchen, wann y *minimal* ist. Wegen des Gleichheitszeichens doch offensichtlich genau dann, wenn

$$(x - 3)^2 - 2$$

minimal ist. Die 2 hinten wird unabhängig von der Wahl des x *immer* abgezogen, ist also bei der Betrachtung, wann der Term minimal wird, uninteressant. Die Frage reduziert sich also darauf, wann $(x - 3)^2$ minimal ist. Da nun

$$(x - 3)^2$$

wegen des Quadrats nur *größer oder gleich* Null sein kann, wird es *minimal*, wenn es *gleich* Null ist, also wenn $(x - 3)^2 = 0$.
Wieder setzen wir $(x - 3) = z$ und erhalten

$$z^2 = 0$$

Die einzige Zahl z, deren Quadrat 0 ist, ist

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 3 &= 0 \quad | + 3 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Wenn nun aber $x = 3$ ist, so erhalten wir für y:

$$\begin{aligned} y &= (x - 3)^2 - 2 = \\ &= (3 - 3)^2 - 2 = \\ &= \quad 0 \quad - 2 = 2 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt S ist also S(3|2)

Vergleichen wir nun dieses Ergebnis mit der Gleichung

$$y = (x - 3)^2 - 2$$
$$S(+ 3 \mid - 2),$$

so sieht man, daß man die Scheitelpunktkoordinaten direkt aus der umgeformten Gleichung *ablesen* kann:

Ablesen der Scheitelpunktkoordinaten aus der Scheitelpunktsform: Hat man eine quadratische Gleichung auf die Form $y = (x - a)^2 + b \quad (\#)$ gebracht, so kann man den Scheitelpunkt direkt als S(a|b) ablesen.

Hier ist allerdings *Vorsicht bei den Vorzeichen* angebracht!!!: angenommen, wir haben eine Gleichung der Form $y = (x + 5)^2 - 10$, so müssen wir - um (#) zu erreichen - in der Klammer noch ein Minus und hinter der Klammer noch ein Plus erreichen, also in

$$y = (x -[-5])^2 + (-10)$$
$$y = (x - \ a\ )^2 + \ b$$

umformen, und können erst jetzt den Scheitelpunkt S als S(-5|-10) ablesen.
S(a | b)

Quadratische Gleichungen, die noch NICHT in Scheitelpunktsform gegeben sind (und wie man diese mittels "quadratischer Ergänzung" *erreicht*)

Oftmals sind quadratische Funktion *nicht* in der "Scheitelpunktsform" (s.o.) gegeben, sondern in der Form $y = ax^2 + bx + c$ (geordnet nach der Größe der Exponenten von x).
Fangen wir dennoch mit der Funktion f: $y = (x - 3)^2 - 16$ an, die schon in Scheitelpunktsform gegeben ist. Um sie in die Form f: $y = ax^2 + bx + c$ zu bringen, benutzen wir den Binomi:

$$y = \quad (x - 3)^2 \quad - 16 \qquad (A)$$
$$(a - b)^2$$
$$|$$
$$(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad y = (x^2 - 2x3 + 3^2) \quad - 16$$

$\Leftrightarrow \quad y = (x^2 - 6x + 9) - 16$

$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 6x - 7 \qquad (B)$

Während man nun aber mit der Scheitelpunktsform (A) wunderbar rechnen konnte (Nullstellen, Scheitelpunkt), ist das mit (B) kaum mehr möglich.
Wir müssen uns also fragen: wie ist es möglich, eine Funktionsgleichung der Form (B) wieder in eine Scheitelpunktsform (A) *zurück*zuübersetzen, also den Weg von (B) nach (A) *rückwärts* zu gehen, und zwar auch dann, wenn wir nur (B), aber noch nicht (A) kennen.
Immerhin können wir die obige Umrechnung von (A) nach (B) als Tip benutzen: Wir müssen es schaffen, in (B) einen vollständigen Binomi wiederzufinden.
Schauen wir uns dazu (B) genauer an:

$y = x^2 - 6\ x \quad - 7$

Nun deutet sich rechts ein Binomi immerhin schon an: wir schreiben ihn schon mal drunter:

$y = x^2 - 6\ x \quad - 7$

$a^2 - 2b\ a + b^2$

Also ist $a^2 = x^2$ bzw. $a = x$. Ebenso ist $6 = 2b$, also $b = 3$.
Letzteres wird sehr deutlicher, wenn wir den Koeffizienten vor x *halbieren*:

$y = x^2 - 2{\bullet}3\ x \quad - 7 \qquad (C)$

$a^2 - 2\ b\ a + b^2$

Offensichtlich haben wir nur aber für $b^2 = 3^2$ noch keine Entsprechung in unserer Gleichung (C). Um diese Entsprechung *doch noch* zu erhalten, ergänzen wir sie einfach ("quadratische Ergänzung" des halben Koeffizienten vor x), ziehen sie aber gleich wieder ab, um den Term rechts des Gleichheitszeichens nicht zu verändern (wozu dieser Trick gut ist, werden wir noch sehen):

$y = x^2 - 2{\bullet}3\ x + 3^2 - 3^2 - 7$

$a^2 - 2\ b\ a + b^2$

$\Leftrightarrow \quad y = (x^2 - 2{\bullet}3\ x + 3^2) - 3^2 - 7$ Auf die Klammer können wir jetzt den 2. Binomi anwenden.

$a^2 - 2\ b\ a + b^2$

|

$(a - b)^2$

$\Leftrightarrow \quad y = (x - 3)^2 \quad - 3^2 - 7$

$\Leftrightarrow \quad y = (x - 3)^2 \quad - 16 \qquad (A)$

Damit haben wir aber insgesamt (B) wieder in (A), also die Scheitelpunktsform überführt. Und mit (A) können wir den Scheitelpunkt und die Nullstellen (y = 0 einsetzen) berechnen.

Die quadratische Ergänzung wird *addiert* und sofort wieder *subtrahiert*. Das Ergebnis (hier $+3^2 - 3^2$) ist 0. Das war nötig, um den Term rechts des Kommas nicht im Wert zu verändern. Damit ist es aber auch *scheinbar* überflüssig. Und doch war es *sinnvoll*:

- das $+3^2$ brauchten wir für den *Binomi*,
- das -3^2 hingegen wurde hinten mitgeschleppt und erst *später* mit dem -7 zusammengefaßt, aber *nicht* im Binomi benutzt.

Zusammenfassung:

quadratisch ergänzt (und sofort wieder abgezogen) wird immer die *Hälfte* des vor dem x (nicht: x^2) stehenden Koeffizienten.

Das Verfahren der quadratischen Ergänzung funktioniert genauso, falls vor dem x *nicht* (wie bisher) eine *gerade* Zahl steht, sondern z.B. 7,5. Beispiel:

$$y = x^2 - 7{,}5\,x - 7$$

$$y = x^2 - 2 \cdot 3{,}75\,x + 3{,}75^2 - 3{,}75^2 - 7$$

$$a^2 - 2\,b\,a + b^2$$

$$\Leftrightarrow\ y = (x^2 - 2 \cdot 3{,}75\,x + 3{,}75^2) - 3{,}75^2 - 7$$

$$\underbrace{a^2 - 2\,b\,a + b^2}_{(a - b)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ y = (x - 3{,}75)^2 - 3{,}75^2 - 7$$

$$\Leftrightarrow\ y = (x - 3{,}75)^2 - 21{,}0625$$

Der Scheitelpunkt wäre hier also SP(3,75|21,0625)

Es sei noch ergänzt, daß bei + vor dem x der *erste* Binomi angewandt wird. Die quadratische Ergänzung erfolgt dann ganz genauso.

Standardpunkte

Weil das allzu oft durcheinander geworfen wird, sei deutlichst unterschieden:
Punkte und ihre Koordinaten sind deutlich zu unterscheiden: ein Punkt *besteht* aus mehreren Koordinaten.

– im 2-Dimensionalen: ein Punkt P(x|y) wird definiert durch seine x-Koordinate und seine y-Koordinate. Erst die beiden Koordinaten zusammen bestimmen genau, wo ein Punkt im 2dimensionalen Koordinatensystem liegt.
– im 3. Dimensionalen: ein Punkt P (x|y|z) wird definiert durch seine x-, seine y- und seine z.Koordinate. Erst die drei Koordinaten zusammen bestimmen genau, wo ein Punkt im 3dimensionalen Koordinatensystem liegt.

Die vorgenommene Unterscheidung hat wichtige Folgen:

– so kann wohl ein Punkt auf einem Funktionsgraphen liegen, nicht aber eine Koordinate;
– oder so können wohl die Koordinaten eines Punktes eine Funktionsgleichung erfüllen, nicht aber ein Punkt.

Um Standardpunkte von Funktionsgraphen betrachten zu können, sei vorher noch erwähnt:

Alle Punkte auf der x-Achse haben die y-Koordinate 0, also die Form P(x|0)
Alle Punkte auf der y-Achse haben die x-Koordinate 0, also die Form Q(0|y)

Die Standardpunkte sind zu zweierlei nützlich:

1., um Funktions*graphen* schnell anhand *weniger* markanter Eigenschaften/Punkte zeichnen zu können (und Funktionsgraphen informieren einen nunmal besonders anschaulich/handgreiflich über fundamentale Eigenschaften einer Funktion);

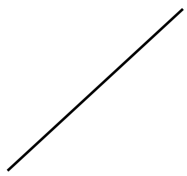
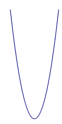
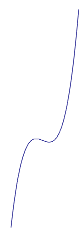
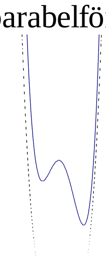
2., weil diese Standardpunkte wichtige Aussagen über das Verhalten von Funktionen enthalten (*zwischen* den Punkten hingegen ist das Verhalten arg nebensächlich, Hauptsache, die Standardpunkte werden halbwegs hübsch verbunden).
Ein Beispiel: wenn eine Funktion etwa die Verschmutzung der Umwelt beschreibt, so ist besonders interessant an ihr, wann die Verschmutzung *minimal* (Tiefpunkt) oder *maximal* (Hochpunkt) ist.

Bei *allen* Funktionen interessieren dabei besonders drei Arten von Punkten:

1. Schnittpunkte mit der x-Achse, auch Nullpunkte genannt. Ihre besondere Eigenschaft: die y-Koordinate ist 0, also hat ein Nullpunkt N *immer* die Form N(?|0). Die noch unbekannte x-Koordinate (auch Null*stelle* genannt) berechnet man dann, indem man in die Funktionsgleichung y = 0 einsetzt (womit in der Gleichung nur noch die *eine* und damit errechenbare Unbekannte x vorkommt). Es kann *verschieden viele* Nullpunkte geben.
Zur Ausdrucksweise: die Null*stelle* ist die x-Koordinate eines Null*punktes*.
2. Schnittpunkte mit der y-Achse. Ihre besondere Eigenschaft: die x-Koordinate ist 0, also hat ein Schnittpunkt S_y mit der y-Achse immer die Form $S_y(0|?)$. Die noch unbekannte y-Koordinate berechnet man dann, indem man in die Funktionsgleichung x = 0 einsetzt (womit in der Gleichung nur noch die *eine* und damit errechenbare Unbekannte y vorkommt). Jede auf ganz R definierte Funktion hat genau *einen* S_y (nie mehr oder weniger), weil es sonst keine *Funktion* wäre.

3. Hoch- bzw. Tiefpunkte auf einem Intervall. Also etwa: der Montblanc ist zwar nicht der höchste Berg der Welt, aber doch der höchste in seiner näheren Umgebung (der Alpen oder auch im Vergleich mit den umliegenden Tälern).
   Weil quadratische Funktionen nur *einen* eindeutig höchsten/tiefsten Punkt haben, spricht man bei ihnen auch von *Scheitelpunkten*.

Eine Liste der Möglichkeiten bei Potenzfunktionen bis zu 4. Grades:

	1. Grades	2. Grades	3. Grades	4. Grades
Spezialbezeichnung	(linear)	(quadratisch)	(kubisch)	
Anzahl der NullstelleN(x|0)	1., keine, unendlich viele	0;1;2	1;2;3 nicht 0 Nullstellen möglich, da stetig aus negativ - ∞ nach positiv ∞ gehend (bzw. umgekehrt)	0:1:2:3:4
Anzahl der S_y (0|y) (immer nur eine, da sonst keine Funktion vorliegt)	1	1	1	1
Hoch-/Tiefpunkte	0	1	noch nicht bestimmbar	noch nicht bestimmbar
Aussehen	Gerade 	Parabel 	s-förmig 	außen parabelförmig 

Terme/Gleichungen

Dringend zu unterscheiden ist zwischen einem *Term* und einer *Gleichung*.

Terme:

> Terme sind alle *Zahlen* bzw. größeren Einheiten, bei denen nach Einsetzung von Zahlen für Variable *Zahlen* herauskämen.
> Terme sind also alle Kombinationen aus Zahlen, Variablen (für die Zahlen eingesetzt werden können), Vor- und Rechenzeichen, Klammern, Kurzausdrücke für mathematische Rechenverfahren (z.B. sin = Sinus) - nur eben nicht Vor- und Rechenzeichen ganz alleine (die ja eh keinen Sinn hätten).

So ist z.B. 3 (also eine einfache Zahl) ebenso ein Term wie x^2 oder $17x^3 - 9x^2$ (denn alle sind nach Einsetzen einer Zahl für x ja nur andere Schreibweisen für *Zahlen*).

Oder einfacher:

> Term ist alles, wo *kein (Un-)Gleichheitszeichen* drin vorkommt, also noch *keine (Un-)Gleichung* vorliegt.

Terme können aus mehreren *Unter*termen bestehen. Z.B. gilt:

```
   17             x³          -   9          x²
= 17     •  x   •  x    •  x  -   9     •  x    •  x
  Term   Term   Term   Term     Term   Term   Term
    |             |               |            |
  Term          Term             Term        Term
          |                             |
        Term ______________________ Term
                          |
                        Term
```


Terme sind ursprünglich dazu erfunden worden, immer *wieder* auftauchende Rechnungen zu *systematisieren*. Z.B. kann man natürlich die Flächenberechnung für jeden konkreten rechteckigen Tisch *neu* herleiten, sich aber auch irgendwann die *allgemeine* Regel aufstellen (und dann besser merken): Fläche = Länge • Breite bzw. F = l • b. Und schon ist mit l • b der erste Term geboren. Und dieser Term gilt nun nicht nur für rechteckige *Tische*, sondern für *alle* Rechtecke (das ist typisch Mathematik). In diesen Term nun aber kann ich nach Lust und Laune und jeweiliger Aufgabenstellung *konkrete* Zahlen einsetzen.
Kompliziertere Terme entstehen durch *mehrere* „Arbeitsgänge“, und dann ergibt sich oft die Notwendigkeit, Terme zu vereinfachen und umzuordnen: angenommen z.B. , ich kaufe jeden Tag 3 Äpfel (a) und 4 Birnen (b), also täglich 3a + 4b. Das nun mache ich eine ganze Woche lang, also 7 Tage. Dann habe ich hinterher 7 • (3a + 4b) gekauft. Angenommen nun weiter, ich möchte am Ende der Woche wissen, wie viele Äpfel und wie viele Birnen ich gekauft habe. Dann rechne ich 7 (3a + 4b) = 7 • 3a + 7• 4b = 21a + 28b. Dieser Umformung kann ich nun *direkt* entnehmen: es waren 21 Äpfel und 28 Birnen.

Die Behandlung von Termen

Terme werden durch sogenannte *Termumformungen* verändert, ohne daß dabei allerdings ihr *Zahlenwert* verändert werden darf. Ziel der Termumformung ist es in der Regel, einen *kompliziert* aussehenden Term in *einfachere, übersichtlichere* Form zu bringen (vgl. Beispiel unten). Wichtigste Termumformungen sind einfache *Zusammenfassungen* (z.B 4x+3x=7x), *Umformungen* mit dem Kommunikativ-, Distributiv- und Assoziativgesetz sowie den Binomis sowie das *Kürzen* von Brüchen.
Der gleichwertige neue Term wird mit *Gleichheitszeichen* angeschlossen, so daß nach bei der Termumformung eine *Gleichung* entsteht (oder eine Gleichungs*kette*). Also: durch Termumformungen *ergeben* sich Gleichungen.
Beispiel:

$$\underbrace{x+2y+3x+4y}_{\text{Term}} = \underbrace{x+3x+2y+4y}_{\text{Term}} = \underbrace{[1+3]x + [2+4]y}_{\text{Term}} = \underbrace{4x+ 6y}_{\text{Term}}$$

Gleichungskette

Terme (außer, wenn sie *in* Gleichungen auftauchen) werden also in Gleichungsketten umgeformt.

Der erste, noch schwierig aussehende, und der letzte, sehr einfache Term sind dabei exakt *dasselbe*, was nur durch die durchgehende *Gleichungskette* gesichert ist. Liegt nur *einmal* eine Ungleichheit vor (Rechenfehler, fehlendes Gleichheitszeichen), so ist die Gleichheit nicht mehr gesichert.

An obiger Termvereinfachung kann man auch gut erkennen, was eigentlicher *Sinn und Zweck* solcher Vereinfachungen ist: im linken, noch ziemlich umständlichen Term x+2y+3x+4y tauchen x bzw. y noch *mehrfach* (zweimal) auf. Nun bedenke man:

in reinen Termen (außerhalb von Gleichungen) kann man für jede der Variablen (hier x bzw. y) *alle* Zahlen aus dem Definitionsbereich einsetzen, nur darf man für ein und denselben Term nicht *verschiedene* Zahlen einsetzen.

Im Falle von x+2y+3x+4y bedeutet das: ich kann für das erste x eine *beliebige* Zahl einsetzen, also z.B. 17 oder 4,235; dann ***muß*** ich aber für das zweite x *auch* 17 bzw. 4,235 einsetzen. Entsprechen kann ich für y auch *beliebige* Zahlen (*nicht* unbedingt *dieselben* wie für x) einsetzen, also z.B. 524 bzw. 0,85. Dann muß ich aber für das zweite y *auch* 524 bzw. 0,85 einsetzen.
Folgerung: in x+2y+3x+4y muß ich *zweimal denselben* Wert für x und *zweimal denselben* Wert für y einsetzen. Erstens ist das aber doppelt gemoppelt, und zweitens kann ich mich (insbesondere bei viel komplizierteren Termen) leicht damit vertun, also für x bzw. y versehentlich mal zwei *verschiedene* Zahlen einsetzen.
In der Vereinfachung 4x+ 6y sind diese beiden Fehlermöglichkeiten aber *ausgeschlossen*.
Termvereinfachungen sind insbesondere dann sinnvoll, wenn ich viele verschiedene x- bzw. y-Werte einsetzen muß: sie erleichtern dann enorm die Arbeit.

Wohlgemerkt: Termumformungen dienen der *Vereinfachung*, nicht aber (wie Gleichungen) der *Lösung*.

Anhand einer Termumformung sei mal klar gemacht, welche Schritte dabei durchzuführen sind. Dabei soll bewußt schon ein schwierigerer Term incl. Binomi und Multiplikation von Klammern behandelt werden, weil bei dessen Vereinfachung alle typischen Probleme auftauchen.

Schon jetzt sei darauf hingewiesen: im vorliegenden Fall soll die Vereinfachung insbesondere darin liegen, Klammern zu beseitigen. Der merkwürdige Effekt ist aber:

> Manchmal muß man paradoxerweise zu *Beseitigung* von Klammern zwischenzeitlich sogar *neue* Klammern einfügen (und selbst darauf kommen). Diese Hilfs-Klammern fallen aber auf die Dauer alle wieder weg. **!**

Man kann die Klammern natürlich auch erst genau in dem Augenblick hinzufügen, wenn man etwa einen Binomi umgeformt hat - nur vergißt man es dann allzu schnell. Deshalb machen wir´s im folgenden immer in einem getrennten Schritt *vorweg*.

> Wichtigstes Mittel bei Gleichungs- wie auch Termumformung ist *absolute Genauigkeit* und *systematisches* Vorgehen. **!**

Konkret bedeutet das, daß alle im folgenden durchgeführten Überlegungen und Schritte zumindest im Kopf unvermeidlich sind:

$$\underline{3\bullet(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y)^2} - \underline{(-\frac{3}{2}x + 4y)(x - 2)(-5)}$$

Davon sind zuerst nur die reinen *Produkte* (also ——— bzw. ………) je *einzeln* in sich zusammenfaßbar (denn merke: Terme kann man nur *addieren* bzw. *subtrahieren*, wenn sie in *allen* Variablen *und* deren Exponenten übereinstimmen!).
Deshalb sei vorerst nur das *linke* Produkt (——) behandelt, während wir das *rechte* (………) vorerst unverändert mitschleppen. Üblicherweise macht man das natürlich anders: man vereinfacht das linke und das rechte Produkt in Einzelschritten *abwechselnd* - und doch im Augenmerk streng getrennt.

> Dringender Tip: weitestmöglich *untereinander* arbeiten: dann sieht man immer genau, was man gerade wo verändert und was man beibehalten kann bzw. unverändert mitschleppen muß. **!**

Vorweg aber noch ein anderer Schritt: beim linken Produkt sollte man erkennen, daß da der zweite Binomi der Form $(a - b)^2$ vorliegt. Daß aber in allen Details ein Binomi vorliegt, sollte man (besonders beim dritten Binomi) vor Anwendung immer nochmals genauestens *überprüfen*. Zudem ist es hilfreich, sich den Binomi nochmals drunter zu schreiben und genau festzustellen, was im vorliegenden Fall a und was b ist:

$$\underline{3\bullet(\underbrace{\frac{1}{3}x} - \underbrace{\frac{3}{2}y})^2} \qquad\qquad \underline{-(-\frac{3}{2}x + 4y)(x - 2)(-5)}$$

$$(\ a\ -\ b\ )^2$$

Man mache sich also schon klar: der *ganze* Term $\frac{1}{3}x$ ist a, und der *ganze* Term $\frac{3}{2}y$ ist b.

Des weiteren mache man sich auch schon klar, wie der hier notwendige zweite Binomi nun in allen *Details* lautet: nämlich $(a - b)^2 = a^2$ *minus* $2ab$ *plus* b^2 . Das werden wir uns später auch *drunter* schreiben.

Wenn wir den Binomi in ———— umformen wollen, müssen wir vorweg bedenken, daß bisher der *ganze* Term $(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y)^2$ mit 3 multipliziert wird. Damit muß aber auch die *ganze* Binomi-Umformung von $(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y)^2$ mit 3 multipliziert werden. Zwar fallen bei der Binomi-Umformung die Klammern um $(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y)^2$ weg, dafür müssen wir aber *neue* Klammern [ ] *hinzufügen*, damit das *ganze* neue Ergebnis mit 3 multipliziert wird. Das sei erstmal vorweg getan:

alle Überlegungen und Schritte immer hübsch *trennen*, nie alles auf einmal erledigen wollen!

!

$$3\bullet\left[\ \left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y\right)^2\ \right] - \left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x - 2)(-5) =$$

Und nun wenden wir in der eckigen Klammer den zweiten Binomi an:

$$3\bullet\left[\ \left(\underbrace{\frac{1}{3}x}_{a} - \underbrace{\frac{3}{2}y}_{b}\right)^2\ \right] - \left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x - 2)(-5) =$$

$$(a - b)^2$$

$$= 3\bullet\left[\ \underbrace{\left(\frac{1}{3}x\right)^2}_{a^2} \underbrace{- 2 \bullet \frac{1}{3}x \bullet \frac{3}{2}y}_{-2\bullet a \bullet b} \underbrace{+}_{+} \underbrace{\left(\frac{3}{2}y\right)^2}_{b^2}\ \right] - \left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x - 2)(-5) =$$

Dabei schreibe man sich die allgemeine Binomiform durchaus *drunter* und forme entlang der Pfeile um (im Kopf muß man sowieso so vorgehen: es gibt keinen anderen Weg!).

Wichtig ist auch: um $a = \frac{1}{3}x$ und $b = \frac{3}{2}y$ müssen dringend *neue* Klammern auftauchen, damit sie *ganz* (und nicht *nur* x bzw. *nur* y) quadriert werden.

Nun können wir in der eckigen Klammer schon ein wenig aufräumen:

$$3\bullet\left[\ \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 2\bullet\frac{1}{3}x\bullet\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}y\right)^2\ \right] - \underline{\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)} =$$

$$= 3\bullet\left[\left(\frac{1}{3}x\right)\bullet\left(\frac{1}{3}x\right) - 2\bullet\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{2}\bullet xy + \left(\frac{3}{2}y\right)\bullet\left(\frac{3}{2}y\right)\ \right] - \underline{\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)} =$$

$$= 3\bullet\left[\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{3}\bullet x\bullet x - 2\bullet\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{2}\bullet xy + \frac{3}{2}\bullet\frac{3}{2}\bullet y\bullet y\,)\right] - \underline{\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)} =$$

$$= 3\bullet\left[\ \frac{1}{9}x^2 - xy + \frac{9}{4}y^2\ \right] - \underline{\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)}$$

Erst jetzt ist in der eckigen Klammer nichts mehr zu vereinfachen und können wir dazu übergehen, diese *Klammer zu beseitigen*, indem wir die davor stehende 3 mittels des Distributivgesetzes „in die Klammer hinein“ bringen. Dazu multiplizieren wir *jeden* Summanden in der Klammer mit 3:

$$3\bullet\left[\ \frac{1}{9}x^2 - xy + \frac{9}{4}y^2\ \right] - \underline{\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)} =$$

$$= 3\bullet\frac{1}{9}x^2 - 3\ xy + 3\bullet\frac{9}{4}y^2 - \underline{\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)} =$$

$$= \underline{\frac{1}{3}x^2 - 3\ xy + \frac{27}{4}y^2} - \underline{\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)} =$$

Damit ist die ganze *linke* Seite ( ) weitestmöglich vereinfacht und können wir uns an die *rechte* Seite ( ) begeben. Ab jetzt werden wir also vorerst die ganze *linke* Seite ( ) ~~unverän~~dert mitschleppen.
Bevor wir uns aber an die Behandlung der *rechten* Seite begeben, müssen wir uns klar machen, daß das *gesamte* Produkt $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)$ dort *subtrahiert* wird. Siehe das Minuszeichen davor.

Und bei einem *Minus vor einer Klammer* sollte man allergisch reagieren.

!

Also muß auch jede *gesamte Vereinfachung* des Produkts $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)$ subtrahiert werden, selbst wenn dabei Klammern wegfallen sollten. Deshalb fügen wir erstmal vorsorglich eckige Klammern um das Produkt *hinzu*:

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - 3\ xy + \frac{27}{4}y^2} - \left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5) =$$

$$= \underline{\frac{1}{3}x^2 - 3\ xy + \frac{27}{4}y^2} - \left[\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x-2)\,(-5)\right]$$

Und nun können wir uns unbesorgt um den Inhalt der eckigen Klammer kümmern. Da taucht aber gleich ein weiteres Problem auf: es liegen die *drei* Faktoren $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)$ und $(x - 2)$ und (-5) vor, man kann aber nur jeweils *zwei* miteinander multiplizieren. Wegen des Assoziativgesetzes für die Multiplikation, also $(a \bullet b) \bullet c = a\ (b \bullet c)$, ist es aber egal, *welche* der drei Faktoren wir als erste miteinander multiplizieren, und deshalb fangen wir mal mit $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)$ und $(x - 2)$ an.

Sofort müssen wir aber bedenken: das *Gesamt*ergebnis von $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right) \bullet (x - 2)$ muß anschließend mit (-5) multipliziert werden, und zwar auch dann, wenn bei der Vereinfachung von $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right) \bullet (x - 2)$ die Klammern wegfallen. Also setzen wir vorerst neue Klammern um $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right) \bullet (x - 2)$. Diesmal wählen wir zur Unterscheidung *[ ]* :

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - 3xy + \frac{27}{4}y^2} - \left[\quad\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x - 2) \qquad (-5)\right] =$$

$$= \underline{\frac{1}{3}x^2 - 3xy + \frac{27}{4}y^2} - \left[\,\mathit{[}\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x - 2)\,\mathit{]} \bullet (-5)\right]$$

Und nun können wir *in* der Klammer *[ ]* die Klammern $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)$ und $(x - 2)$ miteinander multiplizieren. Das geht, indem wir *jeden* Summanden der *einen* Klammer $\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)$ mit *jedem* Summanden der *anderen* Klammer $(x - 2)$ multiplizieren und die Ergebnisse dann aufaddieren.

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - 3xy + \frac{27}{4}y^2} - \left[\,\mathit{[}\left(-\frac{3}{2}x + 4y\right)(x - 2) \qquad\qquad\qquad \mathit{]} \bullet (-5)\right] =$$

$$= \underline{\frac{1}{3}x^2 - 3xy + \frac{27}{4}y^2} - \left[\,\mathit{[}\left(-\frac{3}{2}x\right) \bullet x + \left(-\frac{3}{2}x\right) \bullet (-2) + 4y \bullet x + 4y \bullet (-2)\mathit{]} \bullet (-5)\right]$$

Bei der weiteren Zusammenfassung in der Klammer *[ ]* beachte man das Standardverfahren: erst *Vorzeichen* zusammenfassen, dann die *Zahlen*, dann die *Variablen*:

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - 3xy + \frac{27}{4}y^2} - \left[\,\mathit{[}\ -\frac{3}{2}x^2 \quad + \quad 3x \quad + 4xy \quad - 8y \qquad \mathit{]} \bullet (-5)\right]$$

Erst jetzt ist in der Klammer *[ ]* nichts mehr zu vereinfachen und können wir dazu übergehen, diese Klammer zu *beseitigen*, indem wir die danach stehende (-5) mittels des Distributivgesetzes „in die Klammer hinein“ bringen. Dazu multiplizieren wir jeden Summanden in der Klammer mit (-5):

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - 3\,xy + \frac{27}{4}y^2} - [\,[\,-\frac{3}{2}x^2 \quad + \quad 3x \quad + 4xy \quad - \; 8y \quad] \bullet (-5)\,] =$$

$$= \underline{\frac{1}{3}x^2 - 3\,xy + \frac{27}{4}y^2} - [\quad -\frac{3}{2}x^2 \bullet (-5) \; + \; 3x \bullet (-5) + 4xy \bullet (-5) - \; 8y \bullet (-5) \qquad]$$

Bei der weiteren Zusammenfassung in der eckigen Klammer beachte man wieder das Standardverfahren: erst *Vorzeichen* zusammenfassen, dann die *Zahlen*, dann die *Variablen*:

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - 3\,xy + \frac{27}{4}y^2} - [\quad \frac{15}{2}x^2 \qquad - 15x \quad - \; 20xy \quad + \; 40y \qquad]$$

Erst jetzt ist in der eckigen Klammer nichts mehr zu vereinfachen und können wir dazu übergehen, diese Klammer zu *beseitigen*. Jetzt wird klar, wozu sie überhaupt da war: der *gesamte* Inhalt der Klammer soll subtrahiert werden. Beim Auflösen der Klammer drehen sich also *alle* Vorzeichen um („steht ein Minus vor der Klammer, dreht sich um der ganze Jammer“). Es ergibt sich:

$$\underline{\frac{1}{3}x^2 - 3\,xy + \frac{27}{4}y^2} \qquad \underline{- \frac{15}{2}x^2 \qquad +15x \quad + 20xy \quad - \; 40y}$$

Und überhaupt *jetzt zum ersten Mal* können wir die *beiden* Seiten——— und ……… weiter zusammenfassen, weil *erstmals* Summanden mit denselben Variablen *und* denselben Exponenten auftauchen. Dazu sortieren wir nach dem Kommutativgesetz der Addition erstmal nur (inklusive der Vorzeichen) um, so daß zusammen passende Summanden zwecks besserer Übersichtlichkeit nebeneinander stehen (bei sehr langen Termen addiere man nie weit auseinander liegende Summanden; da kann man sich schnell vertun sowie Unterschiede oder auch ganze Terme übersehen). Des weiteren sei auch schon wie üblich nach den Variablen sortiert: alphabetisch (x vor y) und die größten x-Potenzen nach vorne, die größten y-Potenzen nach hinten:

$$\frac{1}{3}x^2 \; - \frac{15}{2}x^2 + \; 15x - 3\,xy \; + 20xy \; - \; 40y \; + \frac{27}{4}y^2$$

Betrachten wir nun die beiden nebeneinander stehenden Terme $\frac{1}{3}x^2$ und $\frac{15}{2}x^2$. In beiden taucht x^2 aus, und deshalb können wir es nach dem Distributivgesetz ausklammern:

$$(\frac{1}{3} \quad - \frac{15}{2})\,x^2 + \; 15x - 3\,xy \; + 20xy \; - \; 40y \; + \frac{27}{4}y^2$$

Entsprechend betrachten wir auch die beiden nebeneinander stehenden Terme - 3 xy und 20xy. In beiden taucht xy auf, und deshalb können wir es nach dem Distributivgesetz ausklammern. Aber Vorsicht!: beim Ausklammern entsteht ein *Minus* vor der Klammer, und entsprechend müssen sich die *Vorzeichen umdrehen*:

$$(\frac{1}{3} \quad - \frac{15}{2})\,x^2 + \; 15x - (3 \quad \overset{!}{-}\, 20)xy \; - \; 40y \; + \frac{27}{4}y^2$$

Damit man dieses Minus in der Klammer nicht vergißt, gewöhne man sich die Rück-Probe an:

sobald man eine Klammer hinzufügt, probiert man, ob rückwärts wieder dasselbe wie *vorher* rauskommt.

!

Nun können wir in den Klammern ausrechnen (reine Zahlenrechnung):

$$-\frac{43}{6}x^2 + 15x - (-17)xy - 40y + \frac{27}{4}y^2 =$$

$$= -\frac{43}{6}x^2 + 15x + 17xy - 40y + \frac{27}{4}y^2$$

Das ist die weitestmögliche Termvereinfachung.
Es sei allerdings noch darauf hingewiesen, daß man sich das Problem mit - 3xy + 20xy = - (3xy - 20xy) hätte ersparen können, wenn man gleich als 20xy - 3xy angeordnet hätte.

Gleichungen:

Unter Gleichung versteht man die *Gesamteinheit zweier durch* Gleichheitszeichen verbundener Terme, z.B.

3x+17 = 24
Term 1 = Term 2
|
Gleichung

Viel wichtiger als diese Begriffsklauberei ist allerdings die verschiedene *Behandlung* von Termen und Gleichungen (s.u.)

Gleichungen sind *kommutativ*, d.h., wenn Term 1 = Term 2 ist,
dann ist auch Term 2 = Term 1.

Vgl: wenn Erwin genauso groß wie Arno ist,
dann ist auch Arno genauso groß wie Erwin.

Zu allgemeinen Gleichungen ist man ganz ähnlich wie zu Termen gekommen: man wollte immer wieder auftauchende Rechnungen *systematisieren* - und stellte dann z.B. die Flächen*gleichung* F = l(änge) • b(reite) für Rechtecke auf.

Die Behandlung von Gleichungen

Terme werden zur *Vereinfachung* umgeformt. Ziel der *Gleichungs*umformung ist es hingegen immer, eine *Lösung* zu finden (wozu dann oft auch Termumformungen benutzt werden, um erstmal zu vereinfachen).

Anders als bei *Termen* kann man in *Gleichungen* in der Regel keineswegs für die Variablen (innerhalb des Definitionsbereichs) *alle* Zahlen einsetzen, sondern nur ganz *bestimmte*.

Z.B. gilt $3x = 9$ nur für $x = 3$. Für sämtliche *anderen* Zahlen aber ergibt sich eben *nicht* $3x = 9$, sondern $3x \neq 9$.
Gleichungen werden *anders* als Terme umgeformt: um die *Lösungsmenge* nicht zu verändern, müssen *Äquivalenz*umformungen stattfinden, so daß eine Reihe von äquivalenten Gleichungen der Form

... = ...
⇔ ... = ...
⇔ ... = ... entsteht.

Die Gleichungen werden *untereinander* geschrieben, aber *nicht* miteinander durch Gleichheitszeichen verbunden. Anders als bei Termumformungen dürfen bei Gleichungsumformungen die Terme links und rechts des Gleichheitszeichens durchaus in ihrem *Wert* verändert werden, nur muß das auf *beiden* Seiten *gleich* geschehen, z.B. durch Addition von 3 auf *beiden* Seiten).
Und üblicherweise ist es bei Gleichungsumformungen das Ziel, am Ende x = ... stehen, also herausgefunden zu haben, *welches* x denn die Ausgangsgleichung erfüllt. Dazu ist es nötig, daß sich das x während der Äquivalenzumformungen nicht *verändert* hat. Und gerade dazu sind ja die Äquivalenzumformungen eingeführt worden: sie sorgen dafür, daß sich die Lösungsmenge garantiert nicht verändert.
Man kann sich das auch folgendermaßen vorstellen: in der *ersten*, noch komplizierten Anfangsgleichung ist x ein Männchen unter einer Tarnkappe. Erst durch einige Umformungsschritte ist es uns in der *letzten* Zeile möglich, dem Männchen die Tarmkappe abzureißen und somit herauszufinden, wer nun genau unter der Tarnkappe versteckt ist.
Wichtig dabei ist aber: wir müssen (mittels Äquivalenzumformungen) sicher stellen, daß während der Umformungen nicht das Männchen unter der Tarnkappe *wechselt*, also z.B. *erst* Erwin darunter war, *jetzt* aber Egon. Von solch einer falsch gelaufenen Umformung hätten wir auch wenig: wir könnten nur sagen „*jetzt* ist Egon drunter“, nicht aber, wer *anfangs* drunter war. Und *das* rauszubekommen - nämlich, wer *anfangs* drunter war - ist doch immer die *eigentliche* Aufgabenstellung.

Zusammenfassung:

Das Merkwürdige ist also:

Terme (außerhalb von Gleichungen) enthalten *kein* Gleichheitszeichen, werden aber in *Gleichungsketten* umgeformt. Gleichungen werden *nicht* in Gleichungsketten (sondern in *Äquivalenzketten*) umgeformt.

Ein einfaches Beispiel für die Verbindung von Term- und Gleichungsumformungen:

$$7x + 4x - 3 = 5 - 6$$

*Term*umformung/-vereinfachung auf jeder Seite

$$\Leftrightarrow \quad 11x - 3 = -1 \quad | +3$$

*Gleichungs*umformung (immer auf beiden Seiten!)

$$\Leftrightarrow \quad 11x - 3 + 3 = -1 + 3$$

*Term*umformung/-vereinfachung auf jeder Seite

$$\Leftrightarrow \quad 11x + 0 = 2$$

*Term*umformung/-vereinfachung auf der linken Seite

$$\Leftrightarrow \quad 11x = 2 \quad | :11$$

*Gleichungs*umformung

$$\Leftrightarrow \quad \frac{11x}{11} = \frac{2}{11}$$

*Term*umformung/-vereinfachung auf der linken Seite

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{11}$$

Termumformungsbeispiel

$5 - 7x(8x-4y^3)^2 =$ eckige Klammern hinzufügen

$= 5 - 7x[(8x-4y^3)^2] =$ 2. Binomi anwenden

$(a - b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2$

$= 5 - 7x[(8x)^2 - 2 \bullet 8x \bullet 4y^3 + (4y^3)^2] =$ Quadrate ausschreiben

$= 5 - 7x[8x \bullet 8x - 2 \bullet 8 x \bullet 4 \bullet y^3 + 4y^3 \bullet 4y^3] =$ Kommutativgesetz anwenden

$= 5 - 7x[8 \bullet 8 \bullet x \bullet x - 2 \bullet 8 \bullet 4 \bullet x \bullet y^3 + 4 \bullet 4 \bullet y^3 \bullet y^3] =$ Zahlen zusammenfassen

$= 5 - 7x[64 \bullet x \bullet x - 64 \bullet x \bullet y^3 + 16 \bullet y^3 \bullet y^3] =$ Variable zusammenfassen

$= 5 - 7x[64x^2 - 64xy^3 + 16y^6] =$ + vor 64 hinzu

$= 5 - 7x[+64x^2 - 64xy^3 + 16y^6] =$ -7x in + (-7x) umschreiben

$= 5 + (-7x)[+64x^2 - 64xy^3 + 16y^6] =$ Distributivgesetz anwenden

$= 5 + (-7x) \bullet (+64x^2) + (-7x) \bullet (-64xy^3) + (-7x) \bullet (+16y^6) =$ Vorzeichen zusammenfassen

$= 5 - 7x \bullet 64x^2 + 7x \bullet 64xy^3 - 7x \bullet 16y^6 =$ Kommutativgesetz anwenden

$= 5 - 7 \bullet 64 x \bullet x^2 + 7 \bullet 64 \bullet x \bullet x y^3 - 7 \bullet 16 \bullet x \bullet y^6 =$ Zahlen zusammenfassen

$= 5 - 448 x \bullet x^2 + 448 \bullet x \bullet x y^3 - 112 \bullet x \bullet y^6 =$ Variable zusammenfassen

$= 5 - 448x^3 + 336x^2y^3 - 112xy^6 =$ Sortieren nach x-Exponenten

$= - 448x^3 + 336x^2y^3 - 112xy^6 + 5$

Text- und Anwendungsaufgaben

Die Mathematik ist ein weitgehend in sich geschlossenes Denkgebäude. Aus einigen wenigen unbeweisbaren Grundannahmen (Axiomen) ist alles weitere absolut logisch folgerbar. Ein "richtiger" Mathematiker interessiert sich nur für diesen *inneren*, glasklaren und somit sogar "schönen" Aufbau der Mathematik. Ob das noch irgendwas mit der *äußeren* Wirklichkeit zu tun hat, ob es also (z.B. auf Technik oder Naturgesetze) *anwendbar* ist, ist ihm hingegen herzhaft egal.
Man mag solche Mathematik weltfremd und überflüssig finden, bedenke aber, daß *alle* kulturell-künstlerischen Spitzenleistungen "überflüssig" sind: ein schönes Gedicht z.B. hat auch keinen anderen Zweck, als einfach nur schön zu sein. Und schlimm sind Fachidioten erst, wenn sie meinen, sich auch über andere Gebiete äußern zu dürfen (z.B. ein Mathematiker spitzfindig über Gedichte).
Mehr noch: einen "echten" Mathematiker interessiert nichtmal die *Anschaulichkeit*: es reicht ihm, wenn er die Logik jedes *Einzel*schritts verstanden hat, sich unter dem Gesamtbeweis aber *gar* nichts mehr vorstellen kann. Bestes Beispiel ist da die Relativitätstheorie Einsteins, die ja auch reine Mathematik ist: aus gewissen vernünftigen Grundannahmen läßt sich mathematisch folgern, daß der Raum aus *vier* Dimensionen besteht und "in sich" gekrümmt ist. Sogar Einstein selbst hat gesagt, daß er sich das nicht mehr anschaulich *vorstellen* könne. Und dennoch: mit dieser Theorie konnte er physikalische Voraussagen machen, die später tatsächlich beobachtbar und sehr anschaulich waren. Der unanschauliche mathematische Umweg war also keineswegs überflüssig!
Die Mathematik mag allerdings noch so theoretisch und unanschaulich sein: es bleibt unbezweifelbar, daß sie

1. ursprünglich zur Lösung ganz realer Probleme (z.B. Landschaftsvermessung) geschaffen wurde,

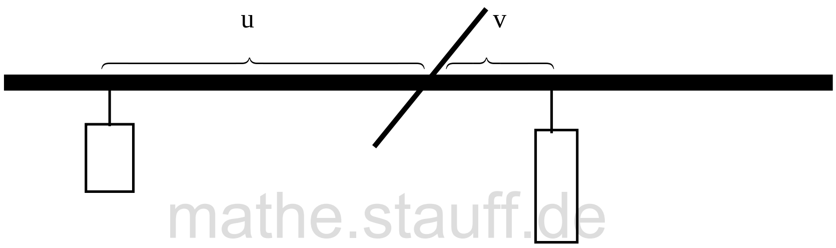
2. auch heute noch weitgehend auf reale Probleme anwendbar ist: ohne Mathematik gäbe es z.B. unsere gesamte Technik nicht, und wir würden noch ohne allen Komfort hausen (wir bemerken allerdings auch immer deutlicher die Nachteile von Mathematik und aus ihr gewonnener Technik).

Daraus folgt, daß sich der Mathematik-Unterricht nicht nur um die rein *inner*mathematische Theorie kümmern darf (so wichtig Exaktheit und mathematische Fähigkeiten auch sind), sondern auch zeigen muß, wie man Mathematik auf Alltagsprobleme *anwendet*. Da arbeitet der Mathematik-Unterricht z.B. dem Physik-Unterricht vor, der spätestens in der Oberstufe zu mindestens der Hälfte auf Mathematik aufbaut.
Solche Anwendungen der Mathematik auf mehr oder minder alltägliche Beispiele sind nun aber keineswegs *einfacher* als stramm theoretische Mathematik. Im Gegenteil: während sich die Mathematik alles *absolut genau* zurechtdefinieren kann und immer *absolut genau* arbeitet, hat man bei der Anwendung auf die Natur immer mit kleinen *Unregelmäßigkeiten* zu rechnen (wer z.B. kann das Gewicht eines Apfels *absolut genau* angeben?). Da muß man also immer Kleinigkeiten unberücksichtigt lassen. Womit sich gleich die Frage stellt: *welche* Kleinigkeiten darf man unberücksichtigt lassen, ohne das Ergebnis allzu stark zu verfälschen? Und was eigentlich *ist* eine Kleinigkeit?: wenn z.B. ein Brötchen 2 Gramm zu wenig wiegt, ist das nicht weiter schlimm; wenn aber in einem Kernkraftwerk 2 Gramm hochradioaktiven Plutoniums fehlen, ist das schon eine halbe Katastrophe (2 Gramm Plutonium sind extrem giftig).
Bei Anwendungen kommt noch ein anderes Problem hinzu: oftmals ist auf Anhieb gar nicht klar, *wo* in einem Problem eigentlich die Mathematik stecken soll. Im Mittelalter wäre z.B. kein Mensch auf die Idee gekommen, daß es *überhaupt* möglich sein könnte, mit Mathematik die Natur zu beschreiben. In der Natur gibt es *überhaupt keine* Mathematik, sondern

Mathematik ist immer nur ein *Modell*, mit dem man die Natur zu erklären versucht. So ist z.B. *nirgends* in der Natur ein Fallgesetz formuliert (es steht z.B. an einem Stein nicht dran, wie schnell er fällt), und doch kann man mit den mathematischen Gleichungen Newtons sehr genau den freien Fall eines Gegenstandes berechnen (wobei keiner weiß, ob Newtons Gleichungen nur *ungefähr* [wenn auch erstaunlich gut] oder *exakt* stimmen).
Daraus folgt schon: Mathematik kann nur *inner*mathematisch etwas beweisen. Für Naturvorgänge ist sie vielleicht erstaunlich *genau*, kann sie aber *nichts beweisen*!
Weil also in vielen Anwendungsproblemen die Mathematik noch gar nicht sichtbar ist, fängt man im Matheunterricht oft mit *Pseudo*-Anwendungsaufgaben an, wo die Mathematik so meterdick aufgetragen ist, daß man sie beim besten Willen nicht übersehen kann. Ein typisches Beispiel dafür sei hier mal durchgearbeitet, um Standardverfahren zur Lösung einer Textaufgabe vorzuführen:

Gegeben sei folgende Aufgabe:

An einem Hebel (s. Bild) hängen zwei Messingkörper, deren Gewichtskräfte zusammen 35 N betragen. Wie groß sind die einzelnen Gewichtskräfte, wenn sich der Hebel im Gleichgewicht befindet und die Längen der Hebelarme sich wie 8:3 verhalten?



(nur nebenbei sei darauf hingewiesen, daß die Zeichnung eine typische *Plan*skizze ist: sie soll nur *grundsätzliche* physikalische Zusammenhänge klarmachen und überhaupt erst den Aufgabentext *veranschaulichen*. Deshalb wurde z.B. bei den gezeichneten Hebelarmen u und v *nicht* darauf geachtet, ob sie mit denen übereinstimmen, die in der Aufgabe rauskämen [also zumindest das Verhältnis 8:3 haben]. Sondern es sollte nur klargemacht werden, daß die Hebelarme u und v *unterschiedlich* sein können und die "Waage" sich *dennoch* im Gleichgewicht befinden kann, wenn nur am *längeren* Hebelarm das *kleinere* Gewicht hängt [wie Hebelarm und Gewicht zusammenhängen, werden wir noch sehen]. Lange Rede, kurzer Sinn: weil die Zeichnung nur dem *Prinzip*, nicht aber den genauen *Werten* nach stimmt, lassen sich aus ihr auch *nicht* die gesuchten Ergebnisse der Aufgabe *ablesen*! Uns bleibt also nichts anderes übrig, als zu *rechnen*. Ja, eine genaue Skizze ist noch gar *nicht möglich*, weil wir die rechnerischen *Ergebnisse* noch gar nicht *kennen* [und umgekehrt ist selbst die genaueste Zeichnung noch zu ungenau, wenn man z.B. die Länge der Hebelarme auf 1/1000 mm genau haben will; vgl. Kapitel "Modelle"]).

Eins dürfte bei der Aufgabenstellung schon klar geworden sein: sicherlich wird etwa im Maschinenbau andauernd mit Hebeln gerechnet, bei der konkreten Aufgabenstellung muß man aber schon lange suchen, um einen halbwegs passenden Praxisfall zu finden. Offensichtlich ist die Aufgabe nicht von einem *Maschinenbauer*, sondern einem *Mathematiker* ausgeheckt worden. Seien wir froh darüber!: das hat den Vorteil, daß die Mathematik in der Aufgabe halbwegs deutlich ist. Dennoch: *ähnliche* Problemstellungen sind im Maschinenbau durchaus denkbar!
Kommen wir damit zu den typischen, auf alle Textaufgaben übertragbaren Lösungsschritten:

1. Herausdestillieren der eigentlichen *Mathematik* durch Löschen aller *nicht*mathematischen Bestandteile:

a) offensichtlich ist es schnuppe, aus welchem *Material* die Gegenstände sind. Es reicht, von *Gegenständen* zu sprechen

b) *Größeneinheiten* interessieren wohl einen *Physiker*, nicht aber einen *Mathematiker* (bzw. nur in der *Antwort*, s.u.). Also brauchen wir *nicht* zu wissen, was ein N = Newton ist, ja, es ist sogar egal, ob es sich um Newton, Kilogramm oder Zentner handelt: wir lassen die Einheit der rechnerischen Einfachheit halber einfach *weg* (ebenso werden wir bei den Hebelarmen die *Längeneinheit* weglassen)
(hier sei allerdings darauf hingewiesen, daß es in *anderen* Aufgaben auch für einen Mathematiker durchaus wichtig ist, auf Einheiten zu achten, insbesondere dann, wenn *verschiedene* Einheiten erst ineinander *umgerechnet* werden müssen. So kann man z.B. nicht mit 10 Zentimetern *und* 5 Metern *gleichzeitig* rechnen, sondern muß *eine* der beiden Einheiten in die *andere* umrechnen, z.B. 10 cm = 0,1 m.)

c) "Gewichtskräfte" ist physikalisches Fachchinesisch. Für unsere Zwecke reicht es, von *Gewichten* zu sprechen.

d) man könnte nun auf die Idee kommen, auch noch den letzten Rest Physik zu löschen, also die Hebel bzw. Hebelarme und das Gleichgewicht. In allen drei Fällen werden wir noch sehen, daß das *nicht* möglich ist.

Nach Kürzung aller außermathematischen Nebensächlichkeiten lautet unsere Aufgabenstellung also:

An einem Hebel hängen zwei Gegenstände, deren Gewichte zusammen 35 betragen. Wie groß sind die einzelnen Gewichte, wenn sich der Hebel im Gleichgewicht befindet und die Längen der Hebelarme sich wie 8:3 verhalten?

Bevor wir damit weiterarbeiten, sei die gleiche Vereinfachungsstrategie auf die *Zeichnung* angewandt:

a) an den Hebelarmen u und v interessiert überhaupt nicht ihre *Dicke*, sondern nur ihre *Länge*

b) ebensowenig interessieren die *Längeneinheiten* auf den Hebelarmen

c) weiterhin ist es uninteressant, wie die Hebel jenseits des Gewichts *weitergehen*: wir können sie also im Aufhängepunkt der Gewichte *enden* lassen.

Aus a), b) und c) folgt schon: wir können den Hebel als eine *Strecke* darstellen, die die Aufhängepunkte verbindet.

d) die genaue *Form des Aufhängemechanismusses*, um den sich der Hebel drehen kann, ist völlig unwichtig. Wichtig ist allein, daß sich der Hebel um einen dünne Achse dreht, die wir zum *Punkt* P vereinfachen.

e) ebenso uninteressant ist es, wie die Gewichte an den Hebelarmen *aufgehängt* sind (ob festgebunden, geschweißt, geklebt o.ä.); wir notieren daher nur die *Punkte* Q und R, an denen sie aufgehängt sind

f) weiterhin ist die *Form* der Gewichte uninteressant. Ja, sie können sogar aus *verschiedenem* Material sein, Hauptsache, das eine ist *schwerer* als das andere. Also: es interessiert nur die *Gewichtsgröße* und daß beide Gewichte nach *unten* ziehen. Das kann man aber beides durch *Pfeile* darstellen, wobei die *Länge* jedes Pfeils das jeweils verschiedene Gewicht angibt, die Pfeil*richtung* aber zur Erde zeigt.

Mit a)- f) erhalten wir folgende, übersichtlichere Zeichnung:

Kommen wir damit aber zur Textaufgabe zurück und zum nächsten Schritt:

2. Herausfinden der im eigentlichen Sinne *mathematischen Informationen*:
Hier hilft es, sich klarzumachen, daß einige Wörter *Umschreibungen für mathematische Zeichen* sind. Das sei im folgenden klargemacht, indem die entsprechenden Informationen a) unterstrichen, b) in mathematische Zeichen übersetzt und c) durchnummeriert werden:

I. x, y II. x + y = 35
An einem Hebel hängen zwei Gegenstände, deren Gewichte zusammen 35 betragen. Wie groß sind die
III. IV. u, v
einzelnen Gewichte, wenn sich der Hebel im Gleichgewicht befindet und die Längen der Hebelarme sich
V. 8:3
wie 8:3 verhalten?

Kommen wir aber vorerst zu

3. Definition der Variablen aus der Aufgabenfrage
In der Aufgabenfrage wird nach den beiden Gewichten gefragt. Also sind sie offensichtlich noch unbekannt, weshalb wir sie nur mit x und y bezeichnen können (I).

Man schreibe sich zu Anfang unbedingt in *Worten* auf, was man unter den einzelnen Variablen verstehen will. Das hilft einem ungeheuer bei der abschließenden *Antwort* (s.u.).

In unserem Fall müßte es also heißen:
"x ist das 1. Gewicht (genauer: die 1. Gewichtskraft),
y ist das 2. Gewicht (genauer: die 2. Gewichtskraft)."
Zusätzlich definieren wir uns laut IV.:
"u ist die Länge des linken Hebelarms,
v ist die Länge des rechten Hebelarms."
(Nach beiden ist in der Aufgabe nicht gefragt, aber wir brauchen sie kurzfristig in der Rechnung. Hinterher fallen sie wieder raus.)

4. Umsetzung der mathematischen Aufgabeninformationen in mathematische Gleichungen
Mit unserer Variablendefinition erhalten wir schon:
(A) aus der Eigenschaft II.: x + y = 35
Nun könnte man auf die Idee kommen, daß auch die III. Eigenschaft (das Gleichgewicht) so einfach umsetzbar ist. Aber seien wir vorsichtig: da wird ja keineswegs vorausgesetzt, daß die *Gewichte* gleich sind (also x = y), sondern nur, daß sie sich im Gleich*gewicht* befinden (was allerdings ein irreführendes Wort ist, meint es eben nicht "gleiche Gewichte").

Schauen wir uns daher an, ob solch ein Gleichgewicht auch möglich ist, wenn die Gewichte *ungleich* sind. Damit befinden wir uns allerdings unversehens wieder in der *Physik*, und zwar bei den Hebelgesetzen. Das aber schauen wir uns an unserer vereinfachten Zeichnung an:

Wir stellen fest (und das kann jeder selbst an einem Experiment überprüfen): die Gewichte können in der Tat *verschieden* groß sein und sich *dennoch* im Gleichgewicht befinden (d.h., daß der Waagebalken horizontal bleibt), wenn nur das vom Drehpunkt P *entferntere* Gewicht *kleiner* ist bzw. das *nähere größer*. Also: großer Hebel/kleines Gewicht, kleiner Hebel/großes Gewicht (diesen Zusammenhang kennt nebenbei jeder von Werkzeugen her: ein Brecheisen, das ja auch nur ein Hebel ist, sollte man möglichst am Ende, also mit *großem* Hebelarm, anfassen, weil man dann nur eine *kleine* Kraft braucht; genauso steht es bei einer Kneifzange, die ja auch nur aus zwei Hebeln besteht). Damit stellt sich die Frage, ob es einen *direkten* Zusammenhang zwischen Hebel*länge* und *Gewicht* gibt, ja, es deutet sich schon einer an: es wäre denkbar, daß das *Produkt* von Hebellänge und Gewicht *konstant* ist (großer Hebel mal kleines Gewicht ergibt eine "mittlere" Zahl, kleiner Hebel mal großes Gewicht ergibt ebenfalls eine "mittlere" Zahl). Und in der Tat gibt es (obwohl es *Physik* ist) einen *direkten mathematischen* Zusammenhang zwischen Hebellänge und Gewicht (hier müssen wir uns also Wissen zur Lösung der Aufgabe aus der Physik leihen): das "Drehmoment" eines Gewichtes an einem Hebel berechnet sich als Hebellänge mal Gewicht. Links erhalten wir also das Drehmoment $D_L = u \cdot x$, rechts hingegen das Drehmoment $D_R = v \cdot y$. Und eine weitere physikalisch-mathematische Regel besagt, daß eine Waage sich genau dann im Gleichgewicht befindet, wenn das rechte und das linke Drehmoment *gleich* sind, wenn also $D_L = D_R$. In unserem Fall erhalten wir also:

B) aus Eigenschaft III.: $u \cdot x = v \cdot y$

Bleibt die V. Eigenschaft: die *Hebellängen* u und v (nicht die *Gewichte*!) verhalten sich wie 8:3, also:

C) aus Eigenschaft V.: $u:v = 8:3$

(hier ist allerdings Vorsicht angebracht: daß die Hebel*längen* sich wie 8 zu 3 verhalten, bedeutet *nicht*, daß die Hebellänge $u = 8$ und die Hebellänge $v = 3$ ist, sondern es ist nur die Rede davon, daß ihr *Verhältnis* zueinander gleich 8 zu 3 ist. Denkbar wären also auch $u = 16$ und $v = 6$ [denn $16/6 = 8/3$] oder $u = 24$ und $v = 9$ [denn $24/9 = 8/3$]. Es ist also noch lange nicht klar, *was* u und v sind.)

Wieder mal wird deutlich: D_L und D_R wurden nur ganz kurzfristig gebraucht - und verschwinden sofort wieder.

Durch die Nummerierung I.- V. und ihre Umsetzung in A) - C) können wir uns sicher sein, tatsächlich *alle* Informationen aus der Aufgabenstellung benutzt zu haben. Ohne solch systematisches Vorgehen vergißt man allzu leicht eine Aufgabeninformation - und kann dann die Aufgabe nicht (eindeutig) lösen. Also:

Man achte unbedingt darauf, daß man auch wirklich *alle* mathematischen Informationen einer Aufgabe in Gleichungen übersetzt!

Wie wir festgestellt hatten, brauchten wir einiges außermathematisches, hier physikalisches, aber mathematisierbares Zusatzwissen.
Solche latenten Zusatzforderungen einer Aufgabe machen oftmals aber gerade die besondere Schweirigkeit von Textaufgaben aus: je nach Aufgabentyp sind es völlig unterschiedliche Informationen, manchmal auch rein innermathematische, auf die aber nur angespielt wird. Wenn dann beispielsweise von einer Rechteckfläche die Rede ist, muß man noch selbständig wissen, wie die berechnet wird.

5. Sammlung der Gleichungen/(jetzt erst) reine Mathematik
Gefragt war nach den beiden Variablen x und y. Um *zwei* Variablen zu berechnen, brauchen wir aber mindestens *zwei* (oder mehr) Gleichungen. Das haben wir mit A) - C), also *drei* Gleichungen, voll erfüllt. Weil die Gleichungen einzeln nicht lösbar sind, sammeln wir sie zu einem Gleichungs*system* (und nebenbei: wenn dieses Gleichungssystem nicht lösbar wäre, wäre entweder die *Gesamtaufgabe* unlösbar [das komm tin Mathebüchern allerdings kaum vor] oder hätten wir eine *zentrale Aufgabeninformation übersehen*):

A) $x + y = 35$
B) $u\cdot x = v\cdot y$
C) $u:v = 8:3$

Während alle vorherigen Punkte sich noch mit der *Übersetzung* von Physik in Mathematik befaßten, sind wir mit diesen drei Gleichungen erstmals in der *reinen* Mathematik. Erst jetzt können wir also los*rechnen*:

6. Rechnen bis zur *mathematischen* Lösung
C) $u:v = 8:3 \quad |\cdot v$
$\Leftrightarrow \; u = (8:3)\cdot v$
Das aber können wir in B) *einsetzen* und erhalten
B) $\underbrace{(8:3)\cdot v}_{u} \cdot x = v\cdot y \quad |:v$
$\Leftrightarrow \; (8:3) \cdot x = y$
Zusammen mit A) erhalten wir das Gleichungssystem

A) $x + y = 35$
B) $(8:3)\cdot x = y$,

also endlich die ersehnten *zwei* Gleichungen mit nur noch den *zwei* Unbekannten x und y (u und v, nach denen ja nie gefragt war, tauchten also nur kurzfristig auf, um letztlich doch wieder zu verschwinden. Die Hebellängen u und v tauchen als unumgängliche Unbekannte auf, ohne daß wir je erfahren, wie groß sie sind).
Durch Einsetzung von B) in A) erhalten wir:

A) $x + \underline{(8:3)\cdot x} = 35$
$\|$
B) $(8:3)\cdot x = y$

$\Leftrightarrow$
A) $x\cdot(1 + 8:3) = 35$
B) $(8:3)\cdot x = y$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} A)\quad x\bullet(\frac{3}{3}+\frac{8}{3}) = 35 \\ \\ B)\ \frac{8}{3}\bullet x = y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} A)\quad x\bullet\frac{11}{3} = 35 \quad |:\frac{11}{3} \\ \\ B)\ \frac{8}{3}\bullet x = y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} A)\quad x = \frac{105}{11} \\ \\ B)\ \frac{8}{3}\bullet x = y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} A)\quad x = \frac{105}{11} \\ \\ B)\ \frac{8}{3}\bullet\frac{105}{11} = y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} A)\quad x = \frac{105}{11} \\ \\ B)\quad y = \frac{280}{11} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbb{L} = \{(\frac{105}{11};\frac{280}{11})\}}$$

Damit sind wir natürlich noch nicht am Ende: in der Ausgangsaufgabe war ja nicht nach x und y gefragt, sondern nach zwei *Gewichtskräften*. Also muß noch folgen:

7. ANTWORT: Rückübersetzung aus der reinen Mathematik in die Ausgangsproblematik/Ausgangsaufgabe

Wir müssen also die *reine* Mathematik wieder verlassen und die *Aufgabenfrage beantworten*. Vielleicht haben wir aber über all die Rechnerei längst vergessen, was x und y eigentlich sein sollten. Glücklicherweise hatten wir uns das aber gegen Ende des 3. Schritts vorsorglich *aufgeschrieben*, und zwar als "x ist das 1. Gewicht (genauer: die 1. Gewichtskraft),
y ist das 2. Gewicht (genauer: die 2. Gewichtskraft)."
Mit den Ergebnissen aus 6. können wir also antworten:

$$\boxed{\text{"Die erste Gewichtskraft ist } \frac{105}{11}\text{ N, die zweite } \frac{280}{11}\text{ N."}}$$

(Hier haben also auch die *Einheiten* wieder aufzutauchen!)

> Man achte darauf, daß die Antwort die Frage der Anfangsaufgabe (und nicht der *vereinfachten* Aufgabenstellung!) *genau und im Wortlaut* beantwortet! (Denn schließlich darf man auf die Frage nach Mücken nicht mit Elefanten antworten).

Nun kann man einwenden, daß $\frac{105}{11}$ und 280/11 ja nicht gerade schöne Ergebnisse seien. Bei Anwendungsaufgaben sind solche Ergebnisse aber eher die Regel als die Ausnahme (man bedenke außerdem, daß sie sich aus den ganz *einfachen* Anfangszahlen 35, 8 und 3 ergaben)! Die Problemstellungen lassen sich nunmal nicht so hinbiegen, daß *immer* "schöne" Ergebnisse rauskommen. Und vorerst interessiert ja keinen die Dezimalschreibweise. Brüche sind für einen Mathematiker durchaus eine schöne Antwort!

Für einen Maschinenbauer hingegen sind Brüche eine unbrauchbare Antwort: um z.B. ein Gewicht der Größe 105/11 N herzustellen, wird man ja nicht 105 Newton-Stücke nehmen und sie in 11 gleichgroße Haufen aufteilen (mal abgesehen davon, wie man überhaupt so genau aufteilen will) und von diesen Haufen nur einen nehmen - alle anderen Haufen aber wieder wegwerfen. Nein, da wird man in Dezimalzahlen umrechnen.

Als Dezimalzahlen ergeben sich aber $\frac{105}{11} = 9{,}\overline{54}$ und $\frac{280}{11} = 25{,}\overline{45}$. Diese *periodischen* Zahlen machen aber in der Anwendung ebenfalls keinen Sinn, weil man keine periodischen Gewichte *herstellen* kann. Angenommen also, man kann Gewichte nur auf *zwei* Stellen hinter dem Komma genau herstellen. Dann reicht natürlich als Antwort:

"Die erste Gewichtskraft ist 9,54 N, die zweite 25,45 N"

(wobei wir mal von Rundungsverfahren absehen)

Folge der Rundung ist allerdings: die Gewichte werden nicht in *absolutem* Gleichgewicht hängen, sondern auf die Dauer geht eins nach unten (es sei denn, die Reibung des Drehpunkts stoppt das).

Während also in der *reinen* Mathematik (z.B. auch am Ende von 6.) nur *absolut exakte* Werte erlaubt sind, dürfen in *Antworten* auf Textaufgaben ausnahmsweise auch mal *gerundete* Werte als exakt "verkauft" werden (allerdings darf man *nicht beliebig* runden, sondern muß sich vorher einigen, *wie* genau man sein will bzw. bei einem technischen Problem sein muß).

Die *Antwort* hat noch einen anderen Vorteil, den man allerdings an unserem Beispiel schlecht sehen kann. Deshalb ein anderes Beispiel: ist in einer Aufgabe nach der Geschwindigkeit eines Autos gefragt, so bemerke ich an der rechnerischen Lösung x = 100 000 noch gar nichts, wohl aber an dem Antwortsatz "Das Auto fährt 100 000 *Kilometer pro Stunde*". Da erst fällt einem (auch an den Einheiten) auf, daß das bei einem Auto kaum stimmen kann (es sei denn, schon die Aufgabenstellung war schwachsinnig). Während das rechnerische Ergebnis 100 000 noch wunderschön glatt und damit richtig aussah, zeigt erst der *Antwortsatz*, daß man sich verrechnet haben muß. Der Antwortsatz ist also nicht bloß Schikane des Lehrers, sondern hilft einem auch *selbst*!

8. Probe

Auch bei Textaufgaben sollte man natürlich zuguterletzt eine Probe machen, indem man in die *ersten mathematischen* Gleichungen (bei uns in 5.) einsetzt. Ja, genau genommen sollte man sogar nochmals überprüfen, ob man überhaupt die richtigen Gleichungen aus der *Aufgabe*

gewonnen hat. Es wäre ja denkbar, daß man mit völlig *falschen Gleichungen* durchaus *richtig gerechnet* hat und daß das Ergebnis blödsinnig ist, weil es zwar *mathematisch richtig* ist, aber aus *falschen Gleichungen* stammt.
In der *reinen* Mathematik kann es einem ja noch egal sein, ob das Ergebnis stimmt oder nicht. Ein Techniker aber, der ohne Probe arbeitet, handelt völlig unverantwortlich, weil ein falsches Ergebnis im harmlosesten Fall zur Funktionsunfähigkeit seiner Maschine führen kann (was auch schlimm ist, wenn es sich z.B. um einen Herzschrittmacher handelt), im schlimmsten Fall aber dazu, daß die Maschine Amok läuft und zu technischen Katastrophen führt.
Proben scheinen insbesondere angebracht, wenn so „schräge“ Ergebnisse wie oben rauskommen: normalerweise kann man sich als Schüler ja darauf verlassen, daß der Lehrer eine Aufgabe mit halbwegs einfachem Ergebnis gestellt hat (geht es dem Lehrer doch weniger um komplizierte *Zahlen* als *Rechenwege*). Wie aber schon gesehen: insbesondere in Anwendungsaufgaben ergeben sich schnell aus sehr simplen Anfangs- sehr komplizierte Endwerte. Und außerdem kann´s vorkommen, daß ein sehr einfaches, aber falsches Endergebnis allzu verführerisch richtig aussieht.

Ungleichungen

Oftmals ist es in der Mathematik (und mehr noch im „Alltagsleben“) nicht so sehr von Interesse, wann ein *exakter* Wert eintritt (z.B. $3x = 12$, also für $x = 4$), sondern wann (wie lange) er über- oder unterschritten wird (also z.B. $3x < 12$; $3x \leq 12$; $3x > 12$; $3x \geq 12$).

Ein Beispiel: ein Schüler möchte einen neuen Schulrekord im Dreisprung aufstellen. Bisher lag er bei exakt 12 m. Wie lang muß dann jeder seiner Sprünge (x) sein, wann also gilt $3x > 12$? Dann gilt doch wohl $x > 4$.

Mathematiker beschäftigen sich eigentlich ungern mit *un*genauen Werten. Für sie ist schon 4,00000001 *ungleich* 4, darf man also *niemals* 4,00000001 = 4, sondern immer nur $4{,}00000001 \approx 4$ schreiben.
Umgekehrt rechnen sie dann teilweise mit höchst unpraktischen Zahlen, nämlich z.B. der irrationalen (hinter dem Komma unendlichen) Zahl $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373$. So ist z.B. die Diagonale eines quadratischen Tischs mit der Seitenlänge 1 genau diese unpraktische Zahl lang. Jeder „normale“ Mensch würde da sagen: wenn ich sie messe (nunja, wann braucht man sowas?), kann ich eh nicht genauer als millimetergenau messen, komme ich also auf das Ergebnis 1,414 m. Oder er sagt: damit etwa eine Tischdecke auf jeden Fall paßt, wähle ich sie ein bißchen *größer*, also 1,415 m.
Nun haben allerdings die Mathematiker auch den Umgang mit dem Ungenauen gelernt. Eben z.B. die Zahl $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373$ können sie ja in Dezimalschreibweise auch nie (vollständig, also exakt) aufschreiben. Aber sie haben eben die Kurzschreibweise $\sqrt{2}$ entwickelt, mit der sich prächtig rechnen läßt (z.B. $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} = 2$; und zwar führt *nur* diese Schreibweise zum *exakten* Ergebnis [=] 2, aber *keine* Rechnung mit „praktischen“ Näherungen).
Genauso können sie dann auch - wie wir unten sehen werden - mit Ungleichungen umgehen.

Bei der Behandlung mit Ungleichungen deutet sich schon ein anderes mathematisches Gebiet an, nämlich der Limes.
$3x < 12$ gilt ja gerade für *alle* $x < 4$, also z.B. für 3,9 und 3,99 und 3,999 ... 3,9999999999 ...; aber es gilt eben nicht mehr für 4.
Diese Folge von Zahlen nähert sich also beliebig der 4 an - und erreicht sie doch nie.

Stellen wir uns also mal die Frage, für welche x die Funktion
$f: y = 10x + 20$
einen *bestimmten* Wert y (z.B. $y = 100$) erreicht/unterschreitet/überschreitet, wann also gilt:

$100 = 10x + 20$	$100 > 10x + 20$	$100 < 10x + 20$	$\vert -20$
$80 = 10x$	$80 > 10x$	$80 < 10x$	$\vert :10$
$8 = x$	$8 > x$	$8 < x$	

Es seien nun x die Zahl der absolvierten Tennisstunden und y der dafür zu entrichtende Gesamtpreis (Kursgebühr).
Für $x = 8$ Stunden wird also der Gesamtpreis 100 DM *erreicht*, für $x < 8$ Stunden liegt er *unter* 100 DM, für $x > 8$ Stunden liegt er *darüber*.
Auf den ersten Blick sieht es also so aus, als könne man mit Ungleichheitszeichen (Kleiner-/Größerzeichen) *genauso* rechnen wie mit Gleichheitszeichen.
Leider ist das nicht immer so. Um Ausnahmen von dieser Regel zu finden, multiplizieren/dividieren $3 < 4$ wir mal auf *beiden* Seiten mit/durch (-1) und erhalten dann

links -3 und rechts -4. Nun liegt -4 weiter *links* auf dem Zahlenstrahl als -3, ist also *kleiner* als 3:

```
                         0
---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----->
 -4 < -3                                  3 <  4
```

Es muß daher nach der Multiplikation/Division heißen: -3 > -4.
Offensichtlich hat sich bei der Multiplikation/Division mit/durch eine(r) negative(n) Zahl das *Ungleichheitszeichen umgedreht*. Wir können daher festhalten:

Ein Ungleichheitszeichen	
- bleibt *unverändert* bei	- allen *Additionen* und *Subtraktionen*
	- Multiplikation/Division mit/durch eine(r) *positive*(n) Zahl
- *dreht sich um* bei	- Multiplikation/Division mit/durch eine(r) *negativen*(n) Zahl.

Nebenbei: daß in 3 < 4 das "<" für "kleiner" steht, kann man sich gut folgendermaßen merken:
a) die kleinere Zahl steht immer an der kleineren Pfeilspitze,
b) aus "<" kann man ein "k" wie "kleiner" machen.

Die besondere Gefahr bei Umformungen von Ungleichungen besteht aber darin, daß man manchmal mit einer *Variablen* (z.B. x) multiplizieren oder durch sie dividieren muß. Weil aber eine Variable (eben z.B. x) so „neutral“ aussieht und man gar nicht mehr sieht, ob dahinter eine positive oder negative Zahl verborgen ist, vergißt man dann allzu schnell die Umdrehung der Kleiner-/Größerzeichen für den Fall, daß hinter der Variablen auch eine negative Zahl stecken könnte.
Anders gesagt: nicht nur hinter -x kann eine negative Zahl stecken (z.B. $x = 3 \Rightarrow -x = -3$; aber $x = -3 \Rightarrow -x = -(-3) = +3$), sondern natürlich auch hinter x (z.B. x = -3).

Beispiel: für welche x ist $2 > \frac{1}{x}$? (es sei schon angemerkt, daß der Fall x = 0 sowieso ausgeschlossen ist, weil dann unerlaubterweise durch 0 dividiert würde; also $\mathbb{W} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$)
Um diese Ungleichung überhaupt zu lösen, müssen wir erstmal x aus dem Nenner des Bruchs herausholen (wir wollen ja am Ende immer x = ... haben). Das aber erreichen wir, indem wir die Ungleichung auf beiden Seiten mit x multiplizieren.
Und genau bei dieser Rechnung müssen wir nun differenzieren:
1. Fall: $x > 0 \Rightarrow$ bei der Multiplikation mit x ändert sich das Ungleichheitszeichen *nicht*:

$$2 > \frac{1}{x} \quad |\bullet x \quad \Leftrightarrow 2x > 1 \; |:2 \quad \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R};\, x > \frac{1}{2}\}$$

unten dick *durchgezogen*

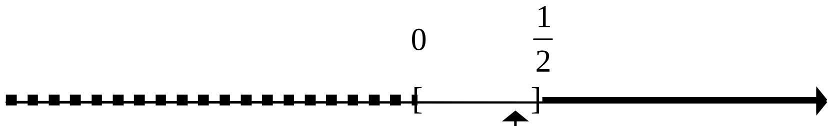
2. Fall: $x < 0 \Rightarrow$ bei der Multiplikation mit x *ändert* sich das Ungleichheitszeichen:

$$2 > \frac{1}{x} \quad |\bullet x \quad \Leftrightarrow 2x < 1 \; |:2 \quad \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R};\, x < \frac{1}{2} \textit{ und } x < 0\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}; \qquad x < 0\}$$

unten dick *gestrichelt*

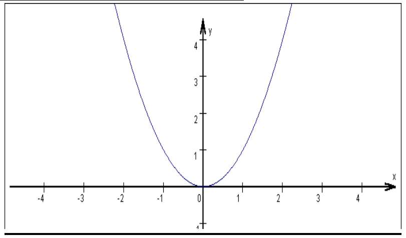
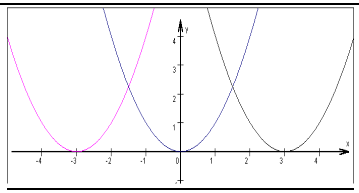
Gesamtlösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R};\, x > \frac{1}{2} \text{ oder } x < 0\}$, also eine Menge, die aus *zwei* getrennten Intervallen besteht:

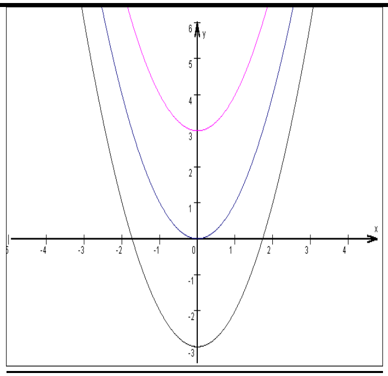
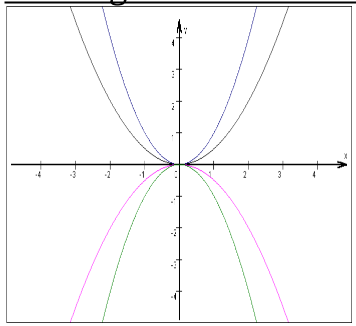


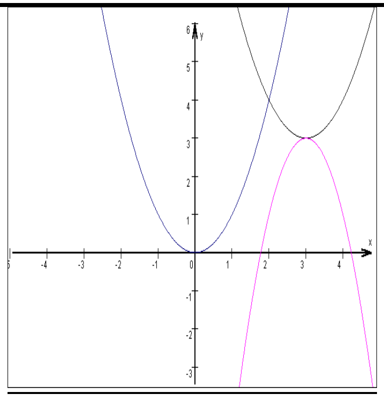
Die Lösungs-x dürfen überall auf dem
Zahlenstrahl liegen, nur eben nicht in diesem Intervall.

> Merke: Tritt bei der Umformung einer Ungleichung die Multiplikation mit einer Variablen oder die Division durch eine Variable auf, muß immer eine Fallunterscheidung (und für negative x dann eine *Umkehrung* der Ungleichheitszeichen) erfolgen.

quadratische Funktionen:

	Funktionsgleichung	Ergebnis	Form	SP
1. Grundfunktion 	$y = x^2$		Normalparabel (1 nach rechts und oben, 1 nach links und oben)	S(0|0)
2. horizontale Verschiebung 	$y = (x - h)^2$	Verschiebung um h nach rechts für h >0, Verschiebung um h nach links für h < 0	Normalparabel (s.o.)	S(h|0)
3. vertikale Verschiebung	$y = x^2 + v$	Verschiebung um v nach oben für v > 0, Verschiebung um v nach unten für v < 0	Normalparabel (s.o.)	S(0|v)

				
4. Streckung/Stauchung Öffnung nach oben/unten 	$y = s \bullet x^2$	Streckung für $\lvert s\rvert > 1$, Stauchung für $0 < \lvert s\rvert < 1$, Öffnung nach oben für $s > 0$, Öffnung nach unten für $s < 0$	gestreckte oder gestauchte Parabel (1 nach rechts und s nach oben/ unten, 1 nach links und s nach oben/ unten)	$S(0\mid 0)$
5. Kombination von 2. - 4. Scheitelpunktsform	$y = s \bullet (x - h)^2 + v$	horizontale und vertikale Verschiebung	gestreckte oder gestauchte Parabel (s.o.)	$S(h\mid v)$

	$\underbrace{2. \qquad 1. \qquad 3.}_{\text{Zeichenreihenfolge}}$	<u>und</u> Streckung/Stauchung <u>und</u> Öffnung nach oben/unten		

Herangehensweise an Wurzeln

1. VOR **JEDER** RECHNUNG MIT EINER **WURZEL** UNBEDINGT ÜBERLEGEN, **OB** UND **WO** (für welche Zahlen) DIE WURZEL ÜBERHAUPT **DEFINIERT** IST.

   Wenn sie *gar nicht* (für keine einzige Zahl) definiert ist (z.B. in d), braucht man gar nicht erst zu *rechnen*. Und umgekehrt rechne man *nur* für die Zahlen des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$ weiter, also für diejenigen Zahlen, für die die Wurzel überhaupt *definiert* ist.

   Das Schlimmste, was einem passieren kann, ist, dass man in 2. ein scheinbares *Ergebnis* erhält und gar nicht gemerkt hat, dass die Wurzel *gar nicht existiert*.

   Vorbedingung: $\sqrt{\text{SCHNURPS}}$ IST **NUR** DANN DEFINIERT, WENN „SCHNURPS“ (also der *gesamte* Ausdruck unter der Wurzel) **GRÖSSER ODER GLEICH NULL** IST.
   Wenn hingegen „SCHNURPS“ **kleiner** als Null ist, gilt 

   Beispiele:

   a) $\sqrt{x^2}$ = | x | ist für **alle** $x \in \mathbb{R}$ (unendlich viele Zahlen) definiert, da **immer** $x^2 \geq 0$
   (das Quadrat *jeder* [egal, ob *positiven* oder *negativen*] Zahl ist *positiv*!)
   $\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$

   b) $\sqrt{x}$ ist - **definiert** für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$
   - **nicht** definiert für alle $x \in \mathbb{R}^-$ $\Big\} \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$

   $\sqrt{x}$ ist also nur in etwa der *Hälfte* aller Fälle definiert:
   - für die unendlich vielen *positiven* Zahlen inklusive 0,
   - **nicht** aber für die unendlich vielen *negativen* Zahlen.

   c) $\sqrt{-x^2}$ ist - **definiert** *nur* für x = 0, da dann $-x^2 = -0^2 = -0 = 0 \geq 0$
   - **nicht** definiert für *alle anderen* (unendlich viele) Zahlen aus $\mathbb{R}$, da dann **immer** $x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0$
   $\Rightarrow \mathbb{D} = \{ 0 \}$

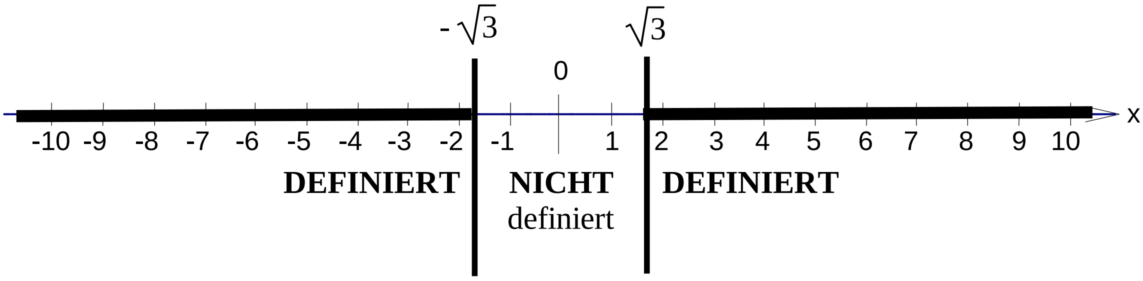
   $\sqrt{-x^2}$ ist also - **definiert** nur für eine *einzige* Zahl, nämlich 0,
   - **nicht** definiert für *alle* anderen (unendlich viele) Zahlen.

   d) $\sqrt{-x^2-1}$ ist für **keine einzige** Zahl definiert, da für *alle* Zahlen gilt:
   $x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow -x^2 - 1 \leq -1 \Rightarrow -x^2 - 1 < 0$
   $\Rightarrow \mathbb{D} = \{ \}$, also *leere* Menge

   e) $\sqrt{(x-3)^2}$ ist für **alle** $x \in \mathbb{R}$ definiert, da **immer** $\text{BLABLA}^2 \geq 0$
   $\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$

   f) $\sqrt{x^2-3}$ ist - **definiert**, wenn
   $$\begin{aligned} & x^2 - 3 \geq 0 \mid +3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 \geq 3 \mid \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ & |x| \geq \sqrt{3} \end{aligned}$$
   - **nicht** definiert, wenn
   $$\begin{aligned} & x^2 - 3 < 0 \mid +3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 < 3 \mid \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ & |x| < \sqrt{3} \end{aligned}$$
   (man beachte, wie hier immer alles hübsch übersichtlich *untereinander* steht!)
   $\Rightarrow \mathbb{D} = \{ x \in \mathbb{R}: |x| \geq \sqrt{3} \}$
   sprich: die Menge aller x Element aus $\mathbb{R}$, für die gilt: $|x| \geq \sqrt{3}$ bzw.

= { x ∈ ℝ: x ≤ - $\sqrt{3}$ oder x ≥ $\sqrt{3}$ }
sprich: die Menge aller x Element aus ℝ, für die gilt: x ≤ - $\sqrt{3}$ oder x ≥ $\sqrt{3}$



ZU BEGINN **JEDER** BEHANDLUNG VON WURZELN MUSS ALSO **UNBEDINGT** ERST MAL DER **DEFINITIONSBEREICH** 𝔻 FESTGESTELLT WERDEN!

2. Rechnung, D.H. **BESEITIGUNG** ODER **VEREINFACHUNG** DER WURZEL

WICHTIG!!!: **NUR** DA RECHNEN, WO DIE WURZEL ÜBERHAUPT **DEFINIERT** IST (vgl. 1.)

Beispiele:

a) auf dem Definitionsbereich 𝔻 = ℝ (vgl. oben e) gilt:

$\sqrt{(x-3)^2}$ = | x - 3 | = x - 3 , wenn x - 3 ≥ 0 | + 3
⇔ x ≥ 3 } Fallunterscheidung: 1. Fall

= - (x - 3), wenn x - 3 < 0 | + 3
⇔ x < 3 } 2. Fall

(denn wenn x < 3 ⇒ x - 3 < 0 ⇒ - (x - 3) > 0;
bzw. das *Negative* der *negativen* Zahl (x - 3) ist positiv)

VORSICHT!!!: MAN KANN DIE WURZEL **AUSSCHLIESSLICH NUR DANN** BESEITIGEN, WENN $\sqrt{GNULF^2}$, D.H. WENN **AUSNAHMSLOS ALLES** UNTER DER WURZEL QUADRIERT IST

(ganz wichtig: wie wir z.B. in c. noch sehen werden, kann man aber manchmal auf Umwegen dafür *sorgen*, dass das der Fall ist)

b) $\sqrt{x^2-3}$ ist zwar immerhin **teilweise** definiert (vgl. oben f.), und zwar auf

𝔻 = { x ∈ ℝ: | x | ≥ $\sqrt{3}$ }

$\sqrt{x^2-3}$ *existiert* also zwar immerhin auf 𝔻, ist aber da **überhaupt nicht mehr vereinfachbar** (die Wurzel kann **nicht** beseitigt werden), da *nur* das x quadriert wird, *nicht* aber auch die -3, also *nicht* der *gesamte* Ausdruck unter der Wurzel.

„ESELSBRÜCKE"!!!: **WURZELN** (WURZEL ZIEHEN) AUS **SUMMEN**
TUN NUR DIE **DUMMEN**!
(vgl.: *Kürzen* aus Summen
Tun nur die Dummen!)

c) $\sqrt{x^2-6x+9}$ ist nur *scheinbar* nicht zu vereinfachen, denn

- *scheinbar* wird ja nur das *erste* x quadriert, *nicht* aber auch - 6x + 9, also *nicht* der *gesamte* Ausdruck unter der Wurzel;

- *scheinbar* steht da ja eine *Summe*, aus der man bekanntlich *niemals* die Wurzel ziehen darf.

Nun gilt aber nach dem zweiten Binomi:

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2}$, und dafür hatten wir schon in a) die Lösungen gefunden.

Solch ein Umweg über die Binomis (genauer: den ersten und zweiten) wird in Zukunft noch **extrem wichtig**, weil wir damit dann doch die allermeisten Probleme lösen können. Und deshalb muss man **dringend** die Binomis kennen:

1. Binomi: $\underline{(a + b)^2} = (a + b) \bullet (a + b) = \underline{a^2 + \boxed{2ab} + b^2}$
2. Binomi: $\underline{(a - b)^2} = (a - b) \bullet (a - b) = \underline{a^2 - \boxed{2ab} + b^2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad !\qquad\quad !$

3. Binomi: $\underline{(a + b) \bullet (a - b)} = \underline{a^2 \quad - b^2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad !$

Man achte dabei insbesondere millimetergenau - auf die *Vorzeichen*
- im 1. und 2. Binomi auf das „gemischte Glied“ *2ab*

Beispiel: $(a + b)^2 = a^2 + 2\ a\ b + b^2$

$(3x + 7y)^2 = (3x)^2 + 2\bullet 3x\bullet 7y + (7y)^2 =$

$= 9x^2 + 42xy + 49y^2$

Wichtig dabei ist : - im vorliegenden Fall ist a = 3x, und dementsprechend muss das **ganze** 3x quadriert werden, also $(3x)^2 = 9x^2$
- ebenso gilt: b = 7y, und dementsprechend muss das **ganze** 7y quadriert werden, also $(7y)^2 = 49y^2$
- *falsch* wäre es hingegen,
  - *nur* das x zu quadrieren, *nicht* aber auch die 3 davor,
  - also $3x^2$;
- ebenso *falsch* wäre es,
  - *nur* das y zu quadrieren, *nicht* aber auch die 7 davor,
  - also $7y^2$.

Es wird noch besonders wichtig werden, die Binomis auch „umgekehrt“ anwenden zu können. Deshalb:

Aufgabe: Forme mittels einer binomischen Formel um: $25x^2 - 90xy + 81y^2$

Vorsicht!!!: mache Dir **immer** als **erstes** klar, ob **überhaupt** millimetergenau ein Binomi vorliegt. Z.B. **ähnelt** (3x + 7y) • (3x - 7) zwar sehr dem dritten Binomi, aber dennoch stimmt es nicht **ganz** damit überein, da in der *ersten* Klammer 7y, in der *zweiten* aber nur 7 (*ohne* y) steht.
Wenn **kein** Binomi vorliegt, bleibt einem nur, die Klammern **schrittweise** miteinander zu multiplizieren (*jeden* Summanden der *ersten* Klammer mit *jedem* Summanden der *zweiten* Klammer).

Überlebensregeln bei Wurzeln:

1.
Vorweg: eine „Definition“ in der Mathematik ist eine letztlich *willkürliche* Festlegung. Man kann alles und jedes definieren (z.B. „ab sofort sind alle Menschen violett“) - und dann logische Schlussfolgerungen daraus ziehen. Wichtig ist allein, ob die Definition *nützlich* ist und auf die Dauer viel *Arbeit spart*.
Wenn man sagt: $4^2 = 16$ bzw. „4 Quadrat = 16“, so liegt es nahe, der umgekehrten Richtung auch einen *Namen* zu geben: $\sqrt{16} = 4$ bzw. „Wurzel aus 16 ist wieder 4“. Statt des √-Zeichens hätte man genauso gut ein ¶-Zeichen benutzen können, und Enzensberger nennt die Wurzel ja auch ironisch „Rettich“.

Wenn also $4^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$
...
so liegt es nahe, zu verallgemeinern:

Rechnung ERGEBNIS

Definition: Die $\sqrt{x}$ ist diejenige Zahl, die mit sich *selbst* malgenommen (quadriert) x ergibt:

$$\sqrt{x} \bullet \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$$

Das ist eine merkwürdig INDIREKTE Definition:
- die $\sqrt{x}$ wird durch das ERGEBNIS einer Rechnung (Multiplikation) definiert;
- vgl.: Dingsbums ist diejenige Zahl, mit der ich 4 multiplizieren muss, um das ERGEBNIS 12 zu erhalten.
- vgl.: ich definiere den Regen durch sein ERGEBNIS: „Regen ist das, was die Straße nass macht.“

Beispiel $\sqrt{2}$: wie wir bewiesen haben, ist sie *ir*rational. Daraus folgt, dass JEDE Dezimaldarstellung UNGENAU ist ($\sqrt{2} \approx 1{,}414213562...$). Das EINZIGE, was wir von $\sqrt{2}$ mit SICHERHEIT wissen, ist, dass

$$\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 \text{ EXAKT GLEICH } 2.$$

Beispiel $\sqrt{529}$: von $\sqrt{529}$ weiß ich GAR NICHTS (ich habe keine Ahnung von ihrer Dezimaldarstellung) und doch ALLES, nämlich dass

$$\sqrt{529} \bullet \sqrt{529} = (\sqrt{529})^2 \text{ EXAKT GLEICH } 529.$$

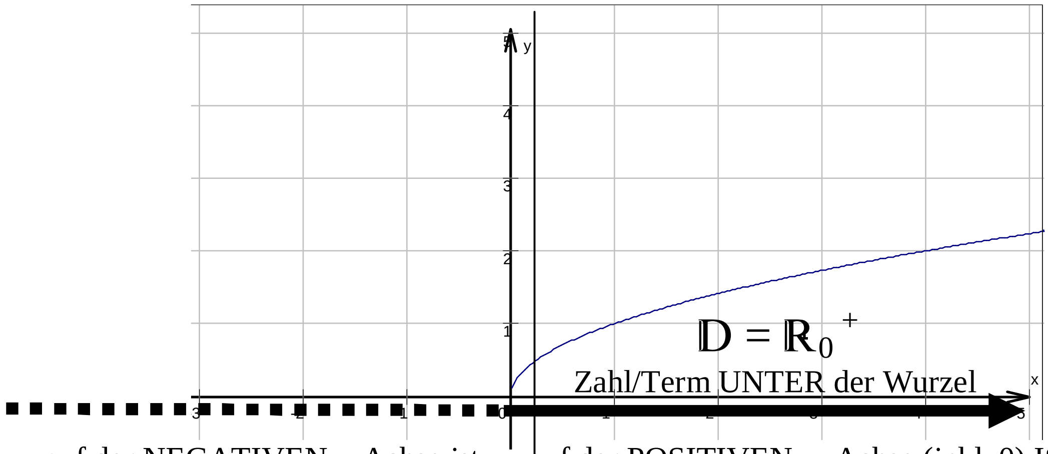
2.
Nach der Definition wäre die $\sqrt{-9}$ diejenige Zahl y, die mit sich selbst malgenommen - 9 ergäbe:

$$y^2 = -9$$

Nun ist aber y^2 IMMER ≥ 0:
1. Fall: y ist *negativ* $\Rightarrow y^2$ ist wieder POSITIV, da *negative* Zahl mal *negative* Zahl gleich POSITIVE Zahl.
2. Fall: $y = 0 \Rightarrow y^2 = 0$
3. Fall : y ist positiv $\Rightarrow y^2$ ist wieder POSITIV, da *positive* Zahl mal *positive* Zahl gleich POSITIVE Zahl.

$\Rightarrow y^2$ ist NIE negativ $\Rightarrow y^2 = -9$ FUNKTIONIERT NIE $\Rightarrow \sqrt{-9}$ GIBT ES NICHT.

$\Rightarrow$ Man kann und darf aus NEGATIVEN Zahlen NIEMALS Wurzeln ziehen  .
(Ausnahme: bei „komplexen“ Zahlen eventuell in der Oberstufe)



auf der NEGATIVEN x-Achse ist $\sqrt{x}$ NICHT definiert

auf der POSITIVEN x-Achse (inkl. 0) IST $\sqrt{x}$ definiert

Verbesserte Definition: die $\sqrt{x}$ (wobei $x \geq 0$) ist diejenige Zahl, die mit sich *selbst* malgenommen (quadriert) x ergibt: $\sqrt{x} \bullet \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$

Merke: überlege bei JEDER Wurzel *VOR* JEDER RECHNUNG, *ob* und *wann* die Zahl/der Term BLABLA (egal, was da steht!) UNTER der Wurzel $\sqrt{\text{BLABLA}}$ *negativ* ist (die Zahl/den Term UNTER der Wurzel nennt man auch Radikand von lat. radix = Wurzel)

z.B. $\sqrt{(x-3)^5}$: Wann ist $(x-3)^5 < 0$? Dann ist $\sqrt{(x-3)^5}$ NICHT definiert.

Wann ist $(x-3)^5 = 0$? Dann ist $\sqrt{(x-3)^5}$ definiert (0).

Wann ist $(x-3)^5 \geq 0$? Dann ist $\sqrt{(x-3)^5}$ definiert.

Wenn der Term *unter* der Wurzel *negativ* ist, braucht man erst gar nicht loszurechnen! Das kann viel *Arbeit* und noch mehr *Fehler* ersparen.

3.

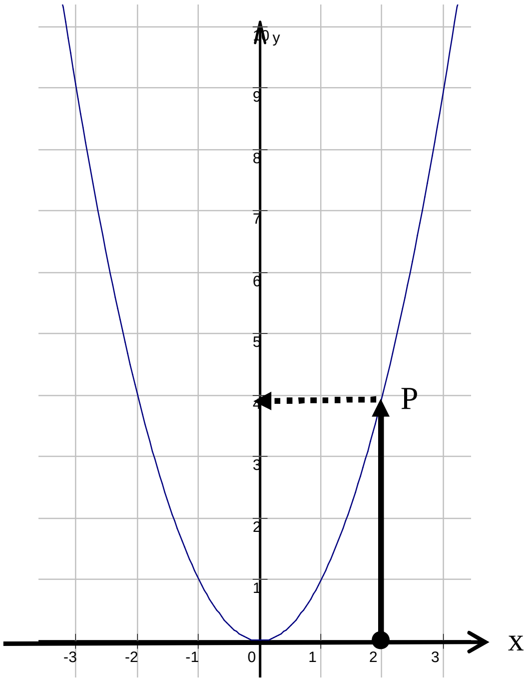
$\mathbb{D}$	$\mathbb{W}$
x →	$y = x^2$
-3 →	9
-2 →	4
-1 →	1
0 →	0
1 →	1
2 →	4
3 →	9

(Das Quadrat JEDER [auch negativen] Zahl ist POSITIV)

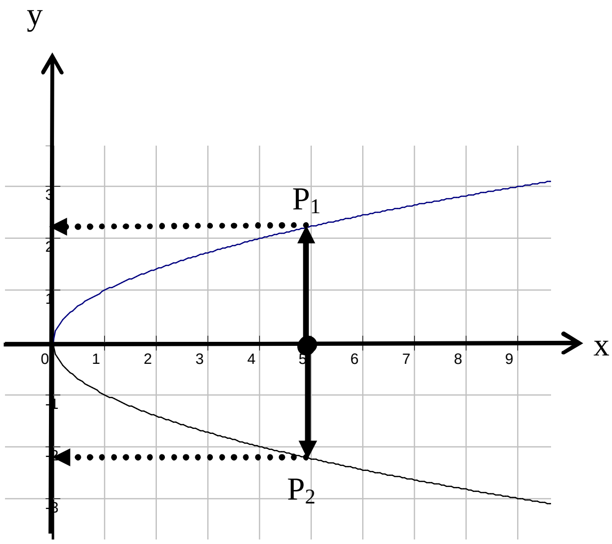
Das IST eine (quadratische)*Funktion*, da von jedem $x \in \mathbb{D}$ EIN Pfeil ausgeht, jedem $x \in \mathbb{D}$ also GENAU EIN $y \in \mathbb{W}$ zugeordnet wird.

$\mathbb{D}$	$\mathbb{W}$
x →	$y = \sqrt{x}$
9 →	3 -3
4 →	2 -2
1 →	1 -1
0 →	0

Das ist KEINE *Funktion*, da von MINDESTENS EINEM $x \in \mathbb{D}$ (z.B. 9) MEHRERE (zwei) Pfeile ausgehen, MINDESTENS EINEM $x \in \mathbb{D}$ (z.B. 9) also MEHRERE (zwei) $y \in \mathbb{W}$ (z.B. 3 UND -3) zugeordnet werden.

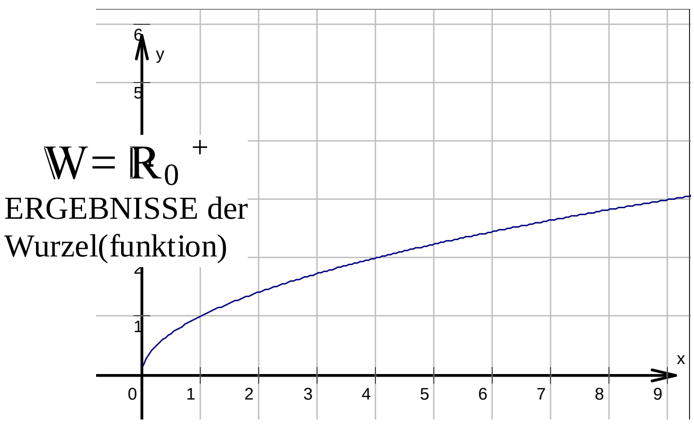


Das IST eine Funktion, weil über/unter JEDEM x (z.B. 2) GENAU EIN Punkt P des Graphen liegt.



Das ist KEINE Funktion, da über/unter MINDESTENS EINEM x (z.B. 5) MEHRERE (zwei) Punkte (P_1 UND P_2) des Graphen liegen.

Da Mathematiker aber keine NICHT-Funktionen mögen (weil sie EINDEUTIGE Lösungen wollen), beschränken sie den Wurzelgraphen auf seinen OBEREN Ast (positive y bzw. die positive y-Achse und Ursprung):



Merke: wenn das ERGEBNIS einer Wurzel NEGATIV ist, so folgt .

z.B. $\sqrt{81} = -9 \Rightarrow$ 

(aber durchaus möglich: $-\sqrt{81} = -9$; vgl. 5. unten)

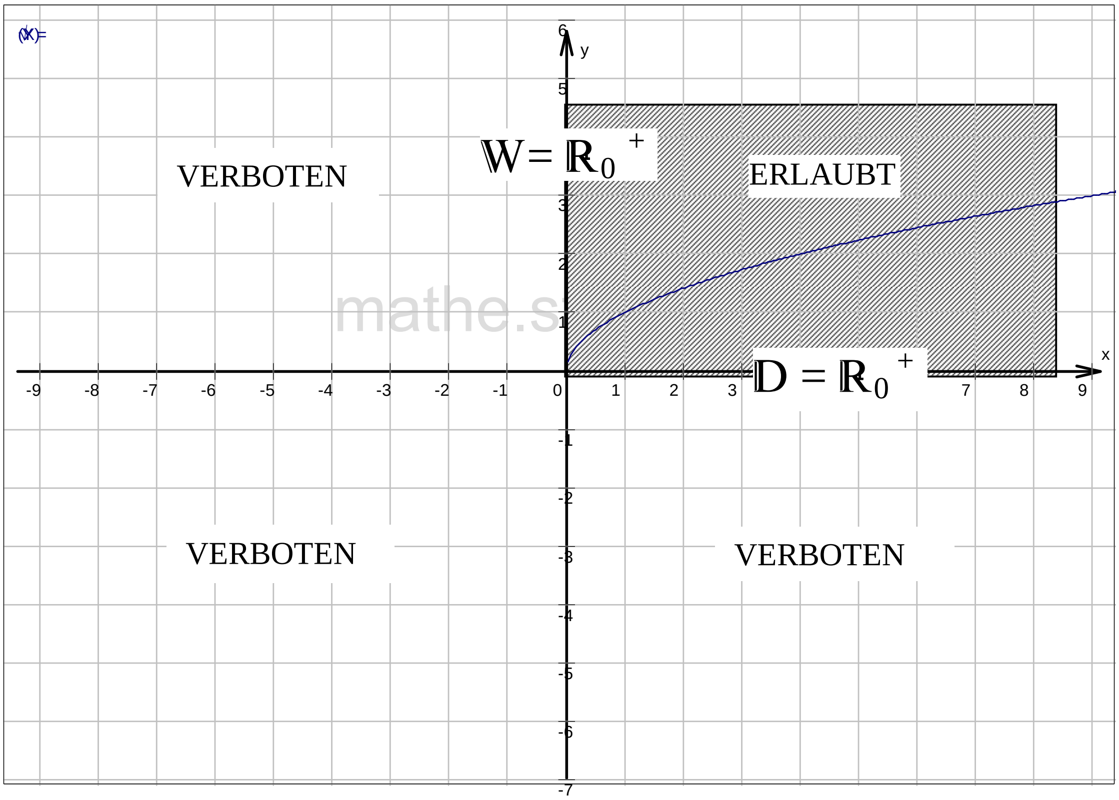
ENDGÜLTIGE Definition: die $\sqrt{x}$ (wobei $x \geq 0$) ist diejenige (EINZIGE!) Zahl ≥ 0, die mit sich *selbst* malgenommen (quadriert) x ergibt:

$$\sqrt{x} \bullet \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$$

Wegen 2. und 3. folgt $y = \underbrace{\sqrt{\boxed{\underbrace{x}_{\text{IMMER } \geq 0}}}}_{\text{IMMER } \geq 0}$

Insgesamt folgt also: • die Zahl (der Term) UNTER der Wurzel muss ≥ 0 sein
• UND das ERGEBNIS der Wurzel ist ≥ 0.
Anders gesagt: das *Innere* UND das *Äußere* der Packung ist ≥ 0.

Bei $\sqrt{x}$ ist im Koordinatensystem also nur der RECHTE OBERE QUADRANT (inklusive der positiven x- und y-Halbachse) erlaubt:



4: Weil wir oben die Wurzel als *Funktion* definiert und nur noch *positive* Ergebnisse zugelassen haben, haben wir beispielsweise bei 9 nur die *positive* Möglichkeit $+3^2 = 9$ behalten, aber die andere, *negative* Möglichkeit $(-3)^2 = 9$ verloren.
Um diese negative Möglichkeit nun aber nicht zu verlieren bzw. zu vergessen, ist leider immer eine FALLUNTERSCHEIDUNG nötig.
(Wir haben *etwas einfacher* gemacht, und deshalb ist etwas *anderes schwieriger* geworden.)

$y^2 = x$

$$\Leftrightarrow \quad y = \underbrace{(+)\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}}_{\geq 0} \quad \text{ODER} \quad y = \underbrace{-\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

---

5. Es kommt sehr drauf an, WO ein Minuszeichen steht:

$\sqrt{-9^2}$ ist NICHT definiert, da $9^2 = 81$ *positiv* und daher $-\ 9^2 = -\ 81$ *negativ* ist;

$\sqrt{(-9)^2}$ IST definiert, da $(-9)^2 = (-9)\bullet(-9) = +\ 81$ *positiv* ist: $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{+81} = 9$

$-\sqrt{9^2}$ IST definiert, da das Minus VOR der Wurzel steht (und $9^2 = +\ 81$ *positiv* ist):

$$-\sqrt{9^2} = -\sqrt{+81} = -\ 9$$

Etwas NEGATIVES kann also erst bei einem Minus VOR der Wurzel herauskommen.

Wurzel(-funktion)

Mittels der quadratischen Funkion $y = x^2$ ist es sehr einfach, zu jedem x das zugehörige Quadrat $y = x^2$ zu finden:

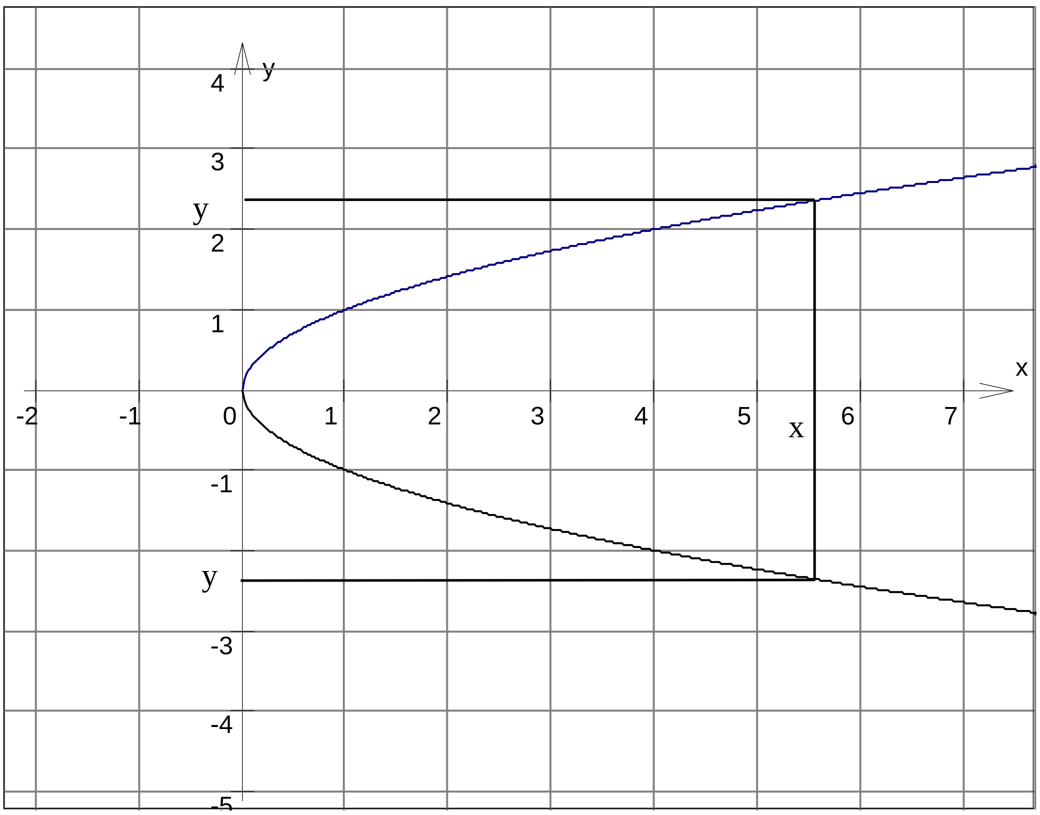
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Manchmal stellt sich das Problem aber andersrum. Z.B. in der Gleichung $y^2 = 9$. Wir suchen also das y, dessen Quadrat 9 ergibt. Oder allgemein: wir suchen dasjenige y, das quadriert wieder x ergibt (also $y^2 = x$). Es ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	0	1	4	9 .
y	0	-1 +1	-2 +2	-3 +3

Denn z.B. gilt $(-2)^2 = 4$ *und* $(+2)^2 = 4$
Wir stellen anhand der Wertetabelle schon fest:

1. Für x dürfen nur Werte aus $\mathbb{Q}^+_0$ (später $\mathbb{R}^+_0$) eingesetzt werden, denn das Quadrat eines beliebigen y kann nur *positiv* sein. Für den *Definitions*bereich D gilt also: $D = \mathbb{Q}^+_0$ (später $\mathbb{R}^+_0$)
2. Sieht man von x = 0 ab, so gibt es zu jedem x zwei *verschiedene* y. Das sieht man besonders gut, wenn man sich den *Graphen* der Zuordnung aufzeichnet:



Es ergibt sich (anders als bei *allen* quadratischen Funktionen) eine nach *rechts* geöffnete Parabel.
Der Graph stellt *keine* Funktion, sondern nur eine *Relation* dar: über/unter jedem x auf der x-Achse liegen (außer bei der Null) *zwei* y-Werte (denn in der Tat wird dann z.B. 4 auf +2 *und* 2, also *zwei* Werte abgebildet denn das Quadrat von -2 ist *auch* 4).
Nun mögen Mathematiker aber keine Abbildungen, die keine Funktionen sind. Sie sind ihnen schlichtweg zu wenig eindeutig.
Aber da sie pfiffig sind, definieren sie als "Wurzel"funktion nur den *oberen*, in der Zeichnung dicker gezeichneten Ast von g (und schon wird der 4 *nur* +2, also nur *ein* Wert zugeordnet).
Folge (A):

bei der Wurzelfunktion ist als *Werte*bereich nur $\mathbb{Q}^+_0$ (später $\mathbb{R}^+_0$) zugelassen: $\sqrt{4}$ ist *immer* nur +2, niemals -2. Oder anders gesagt:

<u>Definition:</u>
$\sqrt{x}$ (sprich: "Wurzel aus x") ist diejenige <u>positive</u> Zahl, die mit sich selbst multipliziert x ergibt, also

$$\sqrt{x} \bullet \sqrt{x} = x \text{ bzw } (\sqrt{x})^2 = x$$

Das ist auf den ersten Blick ein ziemlich frustrierendes Ergebnis: z.B. von der $\sqrt{15}$ wissen wir noch immer nicht, was sie in Dezimalschreibweise ist, sondern nur

$$\sqrt{15} \bullet \sqrt{15} = 15.$$

Wir wir unten noch sehen werden, ist das aber schon allerhand: immerhin wissen wir *das* schonmal.

Die Wurzel ist also ganz merkwürdig definiert: wir beschreiben sie nicht *direkt*, sondern durch die *Tätigkeit* (Multiplikation mit sich selbst) und das *Ergebnis*, die man mit ihr ausführen/erhalten kann. Das ist so, als wenn es den Namen "Schraubenzieher" nicht gäbe und ich deshalb immer sagen würde: "Das Ding, mit dem man Schrauben rein/raus dreht". Das ist zwar *umständlich*, aber durchaus *treffend*: da kann *nur* ein Schraubenzieher gemeint sein.
(Der Logarithmus wird später ganz ähnlich über die Tätigkeit/das Ergebnis definiert.)

<u>Die wichtigste Regel der Wurzelrechnung!!!:</u>
Es gibt keine (Quadrat)Wurzeln aus <u>negativen</u> Zahlen, denn wie bereits gesehen, ist das Quadrat jeder Zahl (also auch negativer Zahlen) immer *positiv*: $\sqrt{x}$, x e $\mathbb{Q}^-$ (später $\mathbb{R}^-$)ist nicht definiert!!!
Der Definitionsbereich von f: y = $\sqrt{x}$ ist $\mathbb{Q}^+_0$ (später $\mathbb{R}^+_0$)

Zusammenfassung:
- *nicht* erlaubt $\sqrt{-4}$ (also negative Vorzeichen *in* der Wurzel)
- *erlaubt* $\sqrt{+4}$
- *nicht* erlaubt $\sqrt{4} = -2$
- *erlaubt* $\sqrt{4} = +2$
- *erlaubt* $+\sqrt{4} = 2$ oder $-\sqrt{4} = -2$ (also negative Vorzeichen *vor* der Wurzel)

Für positive x gilt: $\sqrt{x^2} = x$ und $(\sqrt{x})^2 = x$, (C))

z.B. $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ und $(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3} \bullet \sqrt{3} = 3.$

Für *positive* x gilt also: - quadriere ich x und ziehe dann die Wurzel aus dem Ergebnis, so kommt wieder x raus - und umgekehrt: ziehe ich die Wurzel aus x und quadriere dann das Ergebnis, so kommt ebenfalls wieder x raus. Zu Deutsch: für positive x machen sich Quadrieren und Wurzelziehen gegenseitig rückgängig, sind also Umkehrfunktionen zueinander.

Schauen wir uns aber an, was für *negative* x passiert:

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = +3$ (da nur noch positive Wurzel erlaubt)

bzw. $\sqrt{(-3)^2} = \quad = -(-3)$, also

$\sqrt{x^2} = \quad - x$ für *negative* x (D)

Und $(\sqrt{x})^2$ ist für *negative* x *überhaupt nicht* definiert (da Wurzel aus negativer Zahl) (E)

Insgesamt folgt also aus (C) - (E):

1. $\sqrt{x^2} = x$ nur für *positive* x
2. $\sqrt{x^2} = -x$ für *negative* x
3. $(\sqrt{x})^2 = x$ nur für *positive* x
4. $(\sqrt{x})^2 =$ für *negative* x *nicht* definiert

Fallunterscheidung:

Nun hat man also eine *Funktion*, aber das hat auch *Nachteile*. Dazu ein Beispiel:

$x^2 = 4$

hat die Lösungsmenge L= {+2;-2}, denn $(+2)^2 = 4$ und $(-2)^2 = 4$.
Nach Wurzelziehen (und wir dürfen ja nur noch die *positive* Wurzel ziehen) ergibt sich:

$x = \sqrt{4} = +2$

Offensichtlich haben wir verbotenerweise eine Lösung (-2) verloren. Den Fehler können wir beheben, wenn wir beim Wurzelziehen grundsätzlich eine *Fallunterscheidung* einbauen:

Fallunterscheidung:

$x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = +\sqrt{4} \lor x = -\sqrt{4}$ (Minus *vor* der Wurzel)

| oder

$\Leftrightarrow x = +2 \lor x = -2$

Einzig durch Fallunterscheidung verlieren wir also beim Wurzeln keine Lösung.

Merke: durch Fallunterscheidung erhalten wir *beide* Lösungen und benutzen doch nur die *positive* Wurzel.

Fallunterscheidungen beim Wurzelziehen sind *nur* dann *nicht* nötig, wenn in einer Text- oder Geometrieaufgabe sinnvollerweise kein negativer Wert herauskommen kann. Ein Beispiel wäre da eine negative *Länge*. Aber auch die kann sinnvoll sein, wenn man darunter ein *Rückwärts*gehen oder z.B. einen Punkt *unter* der Meeresoberfläche (unter NN = Normal Null) versteht.

Wurzel*gleichungen* und *Probe*:

Durch die Definition der Wurzel als *ausschließlich positiv* (damit eine Wurzel*funktion* vorliegt) ergibt sich noch ein anderes Problem, und zwar bei Wurzelgleichungen:

Wurzelgleichungen nennt man solche Gleichungen, bei denen unter der Wurzel die Variable x auftaucht.

Wegen der Einschränkung der Wurzel*funktion* auf *positive* Ergebnisse ist hier besonders auf die *Probe* zu achten. Es können rechnerisch Ergebnisse auftauchen, die *nicht* äquivalent die Ausgangsgleichung (um deren Lösung es ja immer geht) lösen, und das merkt man nur, wenn man am Ende mit den scheinbaren Ergebnissen eine *Probe* macht.

Beispiel: $\sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}} = 4 \quad |\ ^2$ (A)

$\Leftrightarrow \quad x + 2 + \sqrt{2x+7} = 16 \quad |\ - x - 2$ (B)

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+7} .= 14 - x \quad |\ ^2$ (C)

$\Rightarrow$! $\quad 2x + 7 = 196 - 28x + x^2 \quad |$ - 2x - 7 sowie Umstellung (D)

$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 30x + 189$ (E)

Das ist eine quadratische Gleichung,
und als Lösungen z.B. mittels quadratischer Ergänzung ergeben sich:

$\Leftrightarrow \quad x = 21 \vee x = 9$ (F)

Nach dem langen Rechnen merkt man nun aber zweierlei nicht:

1., daß - wie *nur* die Probe zeigt (Einsetzen von 21 und 9 in die Ausgangsgleichung) - nur 9, nicht aber 21 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist;

2., daß also *keine* Äquivalenzumformungen vorlagen!

Folgerung: nach Lösung von Wurzelgleichungen ist *immer* eine *Probe* (Einsetzen der Endlösungen in die zu lösende Ausgangsgleichung) nötig, um zu überprüfen, ob die Ergebnisse auch *tatsächlich* Lösungen der *Ausgangsgleichung* sind.

Schauen wir uns im Nachhinein nochmal an, *wo genau* die falsche (bzw. Nicht-) Lösung 21 reingerutscht ist und woran das *lag* (wo also *keine* Äquivalenzumformung mehr vorlag):

Einsetzen von 21 in Gleichung (C) ergibt $7 \neq -7$

Einsetzen von 21 in Gleichung (D) ergibt 49 = 49.

21 ist also noch *nicht* Lösung von (C), aber *bereits* Lösung von (D). Das Quadrieren von (C) nach (D) war also *keine* Äquivalenzumformung, sondern hat die Lösung 21 hinzugemogelt. Woran lag das?

Kein Zweifel: *wenn* (C) stimmt, *dann* stimmt auch (D), denn wenn zwei *Zahlen* gleich sind, sind auch ihre *Quadrate* gleich. Also gilt:

$$(C) \Rightarrow (D)$$

Umgekehrt: wollte ich von (D) auf (C) *zurück*schließen, müßte ich beim Wurzelziehen eine *Fallunterscheidung* machen: $7 = 7 \vee 7 = -7$. Schauen wir uns den zweiten Fall an: während 49 = 49 noch eine *richtige* Aussage war, ist 7 = -7 eine eindeutig *falsche* Aussage. Die andere Möglichkeit, nämlich 7 = (+) 7, ergibt sich aber in (C) nunmal nicht für x = 21. Insgesamt gilt also *nicht*:

$$(C) \Leftarrow (D).$$

Weil also *nur* (C) $\Rightarrow$ (D), aber nicht die Umkehrung gilt, kann/darf man *nicht* von den Endergebnissen unproblematisiert rückschließen, daß sie auch die *Anfangsgleichung* (A) löst, sondern muß sie immer mittels Probe überprüfen.

> Merke: beim Wegquadrieren einer Wurzel (beim Quadrieren einer Wurzelgleichung) können fälschlich
> Lösungen *hinzu*kommen.
> Deshalb: Probe!

Wurzelgesetze:

1. $\sqrt{a \bullet b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
2. $\sqrt{a:b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ (Beweise für 1. und 2.: Quadrieren auf beiden Seiten, dann Potenzgesetze)
   (aber $\sqrt{a+b}$ ungleich $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ und $\sqrt{a-b}$ ungleich $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, denn nach Quadrieren auf beiden Seiten fällt links die Wurzel einfach weg, während rechts der 1. bzw. 2. Binomi benutzt werden muß.
   Also: "Wurzeln aus Summen [und Differenzen] tun nur die Dummen")
3. Definiert man $\sqrt[n]{a}$ als diejenige Zahl, die n-mal mit sich selbst malgenommen wieder a ergibt, so gilt:
   $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (also insbesondere $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$)
   Beweis: auf beiden Seiten mit n potenzieren, dann Potenzgesetz bzw. Definition der n-ten Wurzel.

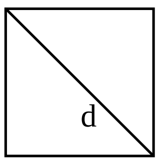
Irrationale Zahlen

Mit der neuen Wurzeldefinition ist z.B. $\sqrt{25} = 5$ (denn $5^2 = 25$) oder $\sqrt{81} = 9$ (denn $9^2 = 81$). Es ist also ganz einfach, die Wurzeln von *Quadratzahlen* natürlicher Zahlen zu finden: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ ...
Was aber soll z.B. die Wurzel aus der nächstgrößeren ganzen Zahl als 1, also die Wurzel aus 2 bzw. $\sqrt{2}$ sein?
Obwohl wir sie noch gar nicht kennen, wissen wir immerhin schon eins, nämlich daß $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ genau gleich 2 ist. Hier sieht man eine der phantastischsten Eigenarten der Wurzeln, ja, vielleicht sogar ein besonders gutes Beispiel der gesamten modernen Mathematik: ich kann mit Wurzeln wochenlang *rechnen*, ohne auch nur den blassesten Schimmer von ihren *Zahlenwerten* (in Dezimalschreibweise) zu haben. Noch schöner: während die Dezimalschreibweise 1,4142... für $\sqrt{2}$ wegen der unendlich vielen, unperiodischen Stellen hinterm Komma immer nur *näherungsweise* (gerundet) angebbar ist, ist die Schreibweise " $\sqrt{2}$ " absolut genau: damit kann ich wochenlang exakt *rechnen*, ohne $\sqrt{2}$ jemals *auszurechnen* (mit *unendlichen* Dezimalzahlen hingegen kann man *prinzipiell* nicht rechnen). Ja, daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist, ist das Einzige, was selbst der beste Mathematiker von $\sqrt{2}$ mit Sicherheit weiß.

Mit $\sqrt{2}$ verhält es sich wie mit dem Bruch $\frac{1}{3}$: jeder weiß, was ein Drittel (etwa eines Kuchens, der an 3 Leute verteilt wird) ist, und jeder, der halbwegs von Bruchrechnung Ahnung hat, kann damit rechnen (z.B.

$6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6 \bullet 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$). Mit der Dezimaldarstellung $0,\overline{3}$ hingegen kann man *überhaupt nicht* rechnen,
weil man dann unendlich viele Stellen handhaben müßte.
Oder es ist mit der $\sqrt{2}$ es wie mit einem Staubsauger: ich brauche überhaupt nicht über sein Innenleben bescheid zu wissen (die Elektronik/die vollständige Dezimalschreibweise von $\sqrt{2}$), sondern es reicht, wenn ich seine Haupteigenschaft kenne (daß er saugen kann/daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$).
Eine Wurzel in Dezimalschreibweise umzurechnen (und dann immer mit dieser zu rechnen), ist insbesondere dann ungünstig, wenn später in einer Aufgabe doch wieder *quadriert* wird, die Wurzel also von selbst wegfällt. Viele Schüler benützen den Taschenrechner viel zu *früh*.
Oftmals interessiert also die Dezimalschreibweise einer Wurzel kaum (u.a. deshalb, weil nachgewiesen wurde, daß sie hinterm Komma manchmal unendlich-unperiodisch ist, wir sie also eh nie ganz bzw. absolut exakt aufschreiben können). Es reicht oftmals zu wissen, daß $\sqrt{x} \bullet \sqrt{x} = x$ ist, und $\sqrt{x}$ ist doch ein wunderschön einfaches Endergebnis einer Aufgabe.
Dennoch läßt sich die Dezimalschreibweise jeder beliebigen Wurzel durch *Rechenverfahren* beliebig nahe annähern (vgl. das Kapitel Beweise). Es ist also *nicht* so, daß die Dezimalschreibweise einer Wurzel - etwa in einem Rechner - vom Himmel fällt.
(Ein Vergleich mit dem Logarithmus liegt nahe: auch z.B. bei log 3 brauche ich nicht die Dezimalschreibweise oder auch nur den annähernden *Wert* zu wissen, sondern es reicht zu wissen: log 3 ist diejenige Zahl, mit der ich 10 potenzieren muß, um 3 zu erhalten).

Das einfachste Beispiel, wie sich $\sqrt{2}$ ergibt, sollte man immer wissen: in einem simplen Quadrat der hübsch einfachen Seitenlänge 1 ist die einfachste Hilfslinie, die Diagonale d, bereits schäbige $\sqrt{2}$ lang:



a = 1

a = 1

Pythagoras: $a^2 + a^2 = d^2$

$$\Leftrightarrow \quad 1^2 + 1^2 = d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + 1 = d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 = d^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = d$$

Auch wenn wir noch gar nicht wissen, was nun $\sqrt{2}$ ist, so ist das Tischbeispiel doch bedeutsam: wenn es mir gelingt, einen quadratischen Tisch mit genau der Seitenlänge 1 herzustellen, dann

ist die Diagonale $\sqrt{2}$ lang. D.h., $\sqrt{2}$ *gibt* es (auch wenn wir ihren Dezimalwert noch gar nicht kennen, ja, er sich - wie wir noch sehen werden - als besonders unangenehm erweist).
Mit indirektem Beweis (vgl. Kapitel "Beweise") läßt sich zeigen:

$\sqrt{2}$ ist eine *nicht*rationale bzw. *ir*rationale Zahl, also *nicht* aus der größten bisher bekannten Menge .
D.h. insbesondere: $\sqrt{2}$ ist - *nicht* als Bruch zweier *ganzer* Zahlen darstellbar
bzw.
- in Dezimalschreibweise *un*endlich hinter dem Komma *und* *un*periodisch.

Und doch: laut Tischbeispiel *gibt* es sie! Und man mache sich gleich klar: *obwohl* die $\sqrt{2}$ als irrationale Zahl hinter dem Komma *unendlich* (und unperiodisch) ist, wächst sie doch nicht über alle Grenzen. Denn wenn $\sqrt{2}$ = 1,4142... ist, so bleibt das z.B. allemal kleiner als 1,5. Am Beispiel unseres quadratischen Tisches gesagt: die Diagonalenlänge hat zwar unendlich viele Ziffern hinterm Komma, aber das bedeutet ja nicht, daß die Diagonale immer länger und länger wird und der Tisch sich (bei *gleichbleibender* Seitenlänge 1) langsam aber sich über jede Grenze hinaus ausdehnt. Nein, die Diagonalenlänge bleibt natürlich *fest*, und die Zahl 1,4142... nähert sich, je mehr Stellen hinter dem Komma dazukommen, dieser festen Länge nur immer mehr an.

Von solchen irrationalen Zahlen gibt es eine ganze Menge (unendlich viele). Wissen sollte man insbesondere:

Die (Quadrat-)Wurzeln *all* derjenigen ganzen Zahlen, die nicht schon selbst Quadrat einer ganzen Zahl sind (1,4,9,16,25 ...), sind irrational (also $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ ...)

Um Irrtümer zu vermeiden: daraus folgt natürlich auch, daß nicht *alle* Wurzeln irrational sind: z.B. ist $\sqrt{4}$ exakt gleich 2, also eine ganz einfache natürliche Zahl.

Hier ist ein kurzer Ausflug in die Zahlenbereichserweiterung nötig:

<u>Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$</u>

<u>$\mathbb{N}$</u> = {1; 2; 3 ...} = Menge der <u>n</u>atürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$ = {0; 1; 2; 3 ...} = $\mathbb{N} \cup \{0\}$ = Menge der natürlichen Zahlen *mit* Null, genannt Menge " Null"
($\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ werden getrennt definiert, weil man die Null manchmal [etwa beim Dividieren] nicht gebrauchen kann)
<u>$\mathbb{Z}$</u> = {0; 1; -1; 2; -2; 3; -3 ...} = Menge der gan<u>z</u>en Zahlen, also inklusive der negativen
<u>$\mathbb{Q}$</u> = $\{n/m;\ n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}$ = Menge der rationalen (= "vernünftigen") Zahlen, also all der Zahlen, die
a) als Bruch/<u>Q</u>uotient zweier ganzer Zahlen darstellbar oder
b) in Dezimalschreibweise hinterm Komma *endlich* oder *periodisch* sind (z.B. 1/4 = 0,25 1/3 = 0,3333... = $0,\overline{3}$)

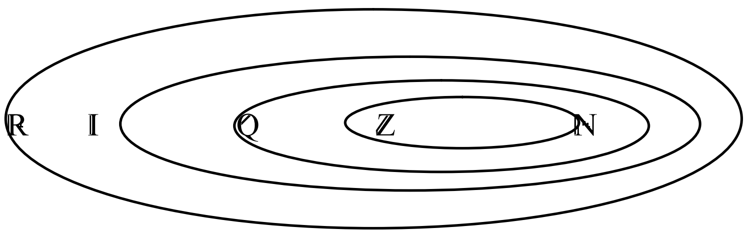
(oben nebenbei typische Mengenschreibweise: $\{n/m \; n, m \in \mathbb{Z}; m \neq 0\}$ bedeutet: die Menge aller Zahlen der Form n/m, wobei n und m beliebige Elemente aus $\mathbb{Z}$ sind, m aber nicht Null sein darf [Teilen durch Null ist verboten])

$\mathbb{I}$ = Menge der irrationalen (="unvernünftigen") Zahlen, also all der Zahlen, die *nicht* in $\mathbb{Q}$ enthalten sind, also weder in Form von a) noch von b) darstellbar sind, also in Dezimalschreibweise *weder endlich noch periodisch* hinter dem Komma sind (z.B. $\sqrt{2}$ oder $e \approx 2{,}71...$ oder $\pi \approx 3{,}14...$). Eine besonders einfache irrationale Zahl kann man sich leicht selbst konstruieren: 0,10 100 1000 10000 100000 1000000.....: da wird deutlich, daß sie weder endlich noch periodisch wird, wenn man sie nach gleichem Konstruktionsprinzip ewig fortsetzt. Und umgekehrt: obwohl diese Zahl unperiodisch ist, folgt sie dennoch einem klaren Baugesetz (nur eben nicht dem Baugesetz der Periodizität). Irrationale Zahlen sind also keineswegs notwendig völlig unstrukturiert und schwieriger als rationale Zahlen. Obige Zahl ist mir doch z.B. lieber als $\frac{1}{17} \approx 0{,}05882352941176$, wenn das auch irgendwann mal periodisch wird.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, also alle rationalen und irrationalen Zahlen *zusammen*: die reellen Zahlen Menge *aller* uns bekannten Zahlen (auf dem Zahlenstrahl lückenlos).

Aus den Definitionen folgt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) = \mathbb{R}$, d.h. jede Menge ist *Teil*menge einer weiter *rechts* stehenden, bzw. $\mathbb{R}$ ist Obermenge aller anderen linksstehenden Mengen:

man kann sich das folgendermaßen vorstellen:



Z.B. ist jedes Element aus $\mathbb{N}$ auch in $\mathbb{Q}$ (z.B. $1 = \frac{1}{1}$), aber keineswegs umgekehrt jedes Element aus $\mathbb{Q}$ auch in $\mathbb{N}$ (z.B. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$). Das aber bedeutet, daß wir problemlos ein Element aus $\mathbb{N}$ zu einem Element aus $\mathbb{Q}$ addieren können, weil wir letztlich doch nur in $\mathbb{Q}$ rechnen. Sehr praktisch ist es außerdem, daß die Mathematiker dafür *gesorgt* haben (typisch: das ist eben *nicht* vom Himmel gefallen), daß in allen Mengen die *gleichen Rechenregeln* gelten (man stelle sich vor, für $\mathbb{R}$ müßte man ganz andere Rechenregeln lernen - und nochmals andere für eine Kombination von Zahlen aus $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$).

Schauen wir uns im Nachhinein nochmals die Zahlbereichserweiterung an: die *natürlichen* und *ganzen* Zahlen liegen auf dem Zahlenstrahl im regelmäßigen Abstand von 1, hinterlassen also große *Lücken*. Die *rationalen* Zahlen scheinen auf den ersten Blick diese Lücken vollständig auszufüllen: sie *liegen unendlich dicht* nebeneinander, also so, daß nirgends eine - und sei es noch so kleine - Lücke feststellbar ist. Man könnte also meinen (und hat das auch tatsächlich lange geglaubt): nehme ich alle rationalen Zahlen *zusammen*, so erhalte ich auf dem Zahlenstrahl einen *durchgehenden* Strich. Der Beweis, daß $\sqrt{2}$ a) *existiert* und b) *irrational* ist, zeigt nun aber, daß es zwischen den *rationalen* Zahlen noch weitere, eben *ir*rationale Zahlen gab. Und das ist erstmal wenig anschaulich: *obwohl* die rationalen Zahlen schon unendlich dicht lagen (es also keine *meßbaren* Lücken von z.B. 1/1000 mm gibt), gab es zwischen ihnen noch unausgefüllte *punktuelle* Lücken. Und erst mit den irrationalen Zahlen *zusammen* sind *alle* Punkte des Zahlenstrahls ausgedrückt: mit einem durchgezogenen Strich erfasse ich also alle rationalen *und* alle irrationalen Zahlen und somit erstmals *alle* Zahlen des Zahlenstrahls.

Bis hierhin könnte man meinen, die irrationalen Zahlen seien ein nunmal *unvermeidlicher*, glücklicherweise aber doch *seltener* „Betriebsunfall“ der Mathematik (der Eindruck mag insbesondere aufkommen, wenn die Irrationalität im Schulunterricht meist nur anhand der $\sqrt{2}$ gezeigt wird). Daher kommt dann auch die Erwartungshaltung: in der Regel wird in einer Matheaufgabe schon was Rationales (und am liebsten doch eine natürliche oder zumindest ganze Zahl) rauskommen.

Nun läßt sich aber in ziemlich abgehobener mathematischer Theorie zeigen: obwohl es schon unendlich viele rationale Zahlen gibt, gibt es noch sehr viel mehr irrationale Zahlen. Oder anders gesagt: zwischen zwei schon sehr nah nebeneinanderliegende *rationale* Zahlen kann ich massenhaft *andere rationale* Zahlen, aber *noch sehr viel mehr irrationale* Zahlen legen. Und das eben *bleibt* weitgehend unanschaulich: wie soll es noch mehr als „unendlich“ geben?

Folge solch theoretischen Nachweises ist aber: kein Wunder, daß bei den *simpelsten* Anfangsaufgabenstellung (z.B. Diagonale eines quadratischen Tischs) erstaunlich oft *irrationale* Ergebnisse erscheinen. Oft hat man nur die Wahl: irrationale Anfangsaufgabenstellung (irrationale Seitenlängen des quadratischen Tischs) und rationales Ergebnis (rationale Diagonale) oder umgekehrt. Anders gesagt: rationaler Anfang und rationales Ende sind nunmal oft nicht zu erreichen.

Vielleicht versteht man anhand dieser Überlegung die Mathematiker besser: sie haben nicht nur *widerwillig* neue (irrationale) Lückenfüller hinnehmen müssen, sondern oftmals auch gezielt nach solchen Lücken in der Erkenntnis/im scheinbar Selbstverständlichen *gesucht*. Sie haben oft - ganz zwecklos - rumexperimentiert und letztlich nicht geklärte, wenn auch allgemein anerkannte Voraussetzungen in Frage gestellt: „geht das nicht alles auch noch ganz anders?“ (und so sind dann z.B. Geometrieanschauungen wie die des Mathematikers Riemann zustande gekommen, die erstmal aberwitzig unanschaulich und reines Gedankenexperiment waren - und bei Einstein plötzlich erstaunlich anwendbar wurden). Nun sind Mathematiker oftmals „auch nur Menschen“, die sich gegen Neues sträuben; gleichzeitig gehört aber zu einem „guten“ Mathematiker (wie zu jedem Wissenschaftler und Künstler) die *Freude* an solch bisher Undenkbarem; auch die Freude an der eigenen (innermathematischen) *Macht*, etwas dreist zu *definieren* statt nur *hinzunehmen*. Das gefühl eines jeden Modellbauers: „hier bin ich Gott!“

nochmals: Nullstellenberechnung (bei normierten Funktionen)

Erst jetzt, mit den Wurzeln, haben wir nämlich die Möglichkeit, *alle* quadratischen Gleichungen zu lösen (soweit sie überhaupt lösbar sind).

Vorweg: eine Gleichung heißt "normiert", wenn vor x^2 *kein* Koeffizient steht (bzw. nur $x^2 = \underline{1} \cdot x^2$).

Nachdem wir die Wurzel eingeführt haben, können wir nun auch die Nullstellen der Funktion f: $y = (x - 3)^2 - 2$ berechnen (woran wir oben gescheitert waren). Bei Nullstellen gilt $y = 0$. Setzen wir das ein, so erhalten wir:

$$0 = (x - 3)^2 - 2 \qquad | + 2$$

$\Leftrightarrow \quad 2 = (x - 3)^2 \qquad |\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow \quad +\sqrt{2} = x - 3 \quad v \quad -\sqrt{2} = x - 3 \qquad |+3$

$\Leftrightarrow \quad 3 + \sqrt{2} = x \quad v \; 3 - \sqrt{2} = x$

$\Rightarrow \quad =\{3 + \sqrt{2} \quad ; 3 - \sqrt{2}\ \}$

$\Rightarrow N_1(3 + \sqrt{2} ; 0) \quad N_2 (3 - \sqrt{2} ; 0)$

$\approx 4{,}4142 \qquad \approx 1{,}5857$

Führt man das gleiche Verfahren für die normierte allgemeine Gleichung

$0 = x^2 + px + q$

durch, so erhält man die

<u>allgemeine</u> <u>Lösungsformel</u> für normierte quadratische Gleichungen. Ist $0 = x^2 + px + q$, so ist

$$x = \frac{p}{2} +/- \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

zwei Lösungen

Der ungeheure *Vorteil* dieser Lösungsformel besteht darin, daß wir die Gleichung $0 = x^2 + px + q$ nicht erst umständlich (mittels quadratischer Ergänzung) in die Scheitelpunktsform bringen müssen, sondern p und q *direkt* aus $0 = x^2 + px + q$ *ablesen* und in die Formel einsetzen können.

Bei der Anwendung dieser allgemeinen Formel auf z.B.

$0 = x^2 - 5x - 8$

$0 = x^2 + px + q$

müssen allerdings die *Vorzeichen* mitbedacht werden, also p = - 5, q = 8.

An der allgemeinen Lösungsformel werden auch noch Spezialfälle deutlich:

Der Term $\frac{p^2}{4} - q$ unter der Wurzel (auch *Diskriminante* genannt [lat. discriminari = unterscheiden]) ist

a) *positiv* $\Rightarrow$ *zwei* Lösungen/Nullstellen (Funktionsparabel schneidet *zweimal* y-Achse)

b) 0 $\Rightarrow$ *eine* Lösung/Nullstelle (Funktionsparabel *berührt* x-Achse, und zwar im Scheitelpunkt $\Rightarrow$ Nullstelle = Scheitelpunkt)

c) *negativ* $\Rightarrow$ *keine* Wurzel ziehbar $\Rightarrow$ keine Lösung/Nullstelle (nach oben [unten] geöffnete quadr. Funktionsparabel liegt ganz oberhalb [unterhalb] der x-Achse)

An der Diskriminante entscheidet sich also, *ob* eine quadratische Funktion lösbar ist und *wieviele* Lösungen sie hat.

<u>Andere Werte</u>

Oftmals wollen wir nicht wissen, wann eine Funktion eine *Null*stelle (y = 0) annimmt, sondern einen *anderen* Wert, z.B. y = 3. Beispiel:

$$3 = x^2 - 6x - 4$$

Wir machen daraus dennoch eine Nullstellenaufgabe, indem wir auf beiden Seiten 3 subtrahieren, und erhalten

$$0 = x^2 - 6x - 7$$

Sowas können wir aber schon mittels quadratischer Ergänzung lösen (s. Nullstellenberechnung). Bei den Lösungen x_1 und x_2 haben wir allerdings zu bedenken: sie zeigen, wann

- f: $y = x^2 - 6x - 7$ den Wert y = 0 annimmt, also eine Nullstelle hat
- g: $y = x^2 - 6x - 4$ den Wert y = 3 annimmt.

Umformung NICHTNORMIERTER Funktionen

Bisher hatten wir nur normierte Funktionen betrachtet. Deshalb noch ganz kurz zur Behandlung *nicht*normierter Funktionen:

Gegeben sei eine Funktion, bei der der Koeffizient vor dem x^2 *ungleich* 1, also z.B. 3 ist:

$$y = - 3 x^2 + 18x + 21$$

Das funktioniert ganz einfach: im Vergleich mit normierten Funktionen stört die -3 vor dem x^2. Wir beseitigen es vorerst, indem wir es *aus*klammern:

$$y = - 3 x^2 + 18x + 21$$

$$\Leftrightarrow \quad y = - 3(x^2 - 6x - 7) \qquad \text{(A)}$$

Den Inhalt $x^2 - 6x - 1$ der Klammer können wir aber schon mittels quadratischer Ergänzung in $(x - 3)^2 - 16$ überführen (s.o.). Eingesetzt in (A), ergibt sich dort:

$$y = -3([x - 3]^2 - 16)$$

Multiplizieren wir nun -3 wieder *in* die runde Klammer rein, so erhalten wir $y = -3 [x - 3]^2 + 48$ und damit eine *Scheitelpunktsform*, mit der wir alle weiteren Berechnungen vornehmen können.

Die Nullstellenberechnung ist noch einfacher. Dazu setzen wir in der Formel (A) das y gleich 0 und erhalten:

$0 = - 3(x^2 - 6x - 7)$. Division auf beiden Seiten durch 3 (nur möglich, weil anders als in der Scheitelpunktsform links eine 0 steht) ergibt $0 = x^2 - 6x - 7$. Solch eine normierte Gleichung können wir aber bereits mittels quadratischer Ergänzung oder Lösungsformel lösen.

Nebenbei: aus all dem folgt, daß $y = - 3 x^2 + 18x + 21$ und $y = x^2 - 6x - 7$ dieselben Nullstellen haben (aber nicht dieselben Scheitelpunkte!)

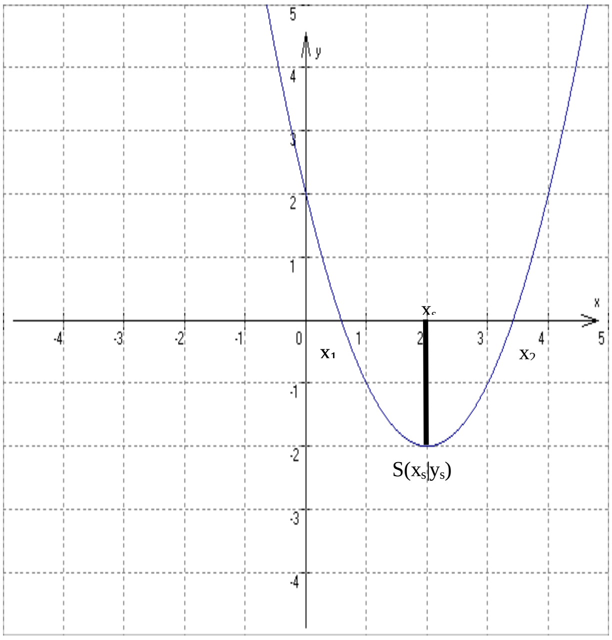
Einfachere Art der Scheitelpunktberechnung

Im Gegensatz zur Nullstellenberechnung mittels allgemeiner Lösungsformel ist bei der *Scheitelpunktsberechnung* normalerweise eine Umformung in die *Scheitelpunktsform* unvermeidbar.

Es gibt aber einen Weg, den Scheitelpunkt einer (nicht)normierten quadratischen Funktion sehr einfach zu erhalten, wenn man erstmal die *Nullstellen hat*:

dazu merken wir uns (ohne Beweis):

die Graphen aller (also auch nichtnormierter) quadratischer Funktionen sind *achsensymmetrisch* zu der Parallelen p zur y-Achse, die durch den Scheitelpunkt geht:



Angenommen nun, wir kennen schon die Nullstellen x_1 und x_2 einer Funktion f. Weiterhin sei x_S der x-Wert des Scheitelpunkts $S(x_S|y_S)$. Damit ist x_S auch der x-Wert, an dem die Parallele p die x-Achse schneidet. Da nun der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zu p ist, gilt insbesondere: x_S liegt genau in der *Mitte* zwischen x_1 und x_2. Falls wir also wohl die Nullstellen x_1 und x_2 kennen, aber noch nicht x_S, können wir x_S berechnen als $x_S = (x_2 - x_1):2$.

Dann fehlt uns zur Scheitelpunktbestimmung nur noch der y-Wert $y_S$des Scheitelpunktes S. Da S auf dem Graphen der Funktion f liegt, läßt sich y_S als *Funktionswert* von x_S bestimmen, also

$$y_S = f[x_S] = f[(x_2 - x_1):2].$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$S(\quad x_S \qquad |y_S \qquad) =$$
$$= S([x_2 - x_1]:2 \ |f[(x_2 - x_1]:2),$$

können wir also mittels dieser Formel den Scheitelpunkt aus den Nullstellen berechnen, wenn wir die Nullstellen kennen, ja, wenn die Funktion überhaupt Nullstellen *hat*.

Daraus folgt: das Verfahren funktioniert nicht (und wir müssen auf die übliche Scheitelpunktsberechnung umsteigen), wenn die Funktion gar keine Nullstellen *hat* (genauer: man könnte die Funktion noch so nach oben oder unten verschieben, *daß* sie Nullstellen hat, und daraus den Scheitelpunkt berechnen. Das soll hier aber nicht durchgeführt werden).

Ganzrationale Funktionen höheren Grades

Neben den linearen und den quadratischen Funktionen gibt es natürlich auch ganzrationale Funktionen höheren, also 3., 4. usw. Grades, also z.B. f: $y = x^3$, f: $y = 5x^3 + 6x^2 +9x +11$, f: $y = x^4$, f: $y = 7x^4 + 3$, f: $y = x^5$ usw. Diese Funktionen höheren als 2. Grades werden in der Mathematik aus einem besonders guten Grund selten betrachtet: sie sind - wenn überhaupt - nur mit größten Schwierigkeiten zu lösen (z.B. Bestimmung von Nullstellen), also nicht mit solch einem Standardverfahren wie etwa der quadratischen Ergänzung (bei quadratischen Gleichungen).
Aus diesem Grunde werden wir uns hier nur um 2 Dinge kümmern:
1. das prinzipielle *Aussehen* der Graphen dieser Funktionen
2. *Lösungsverfahren*, die *manchmal* funktionieren.

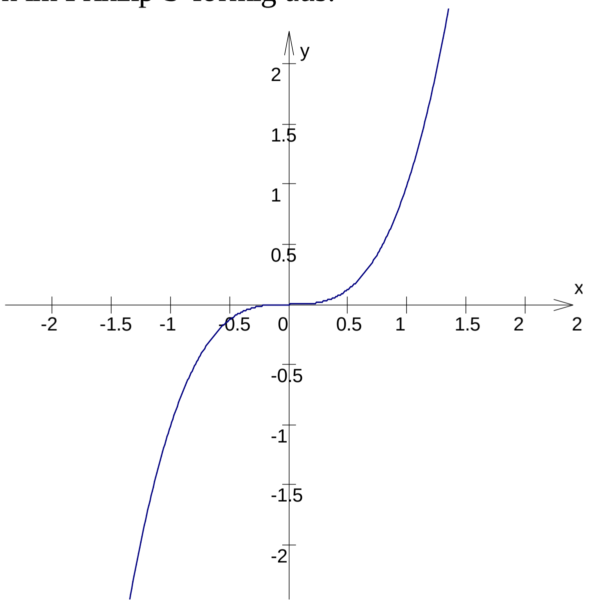
zu 1.: Aussehen von ganzrationale Funktionen höheren als 2. Grades

a) f: $y = x^3$

Die Wertetabelle ergibt:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-8	-1	0	1	8	27

und damit sieht der Graph im Prinzip S-förmig aus:



Als bedeutendste Unterschiede zur quadratischen Parabel ergeben sich:
- der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da

$$f(x) = (-x)^3 = -(x^3) = - f(x), \text{ z.B.}$$

$$f(3) = (-3)^3 = -27 = -(+3)^3 = - f(3)$$

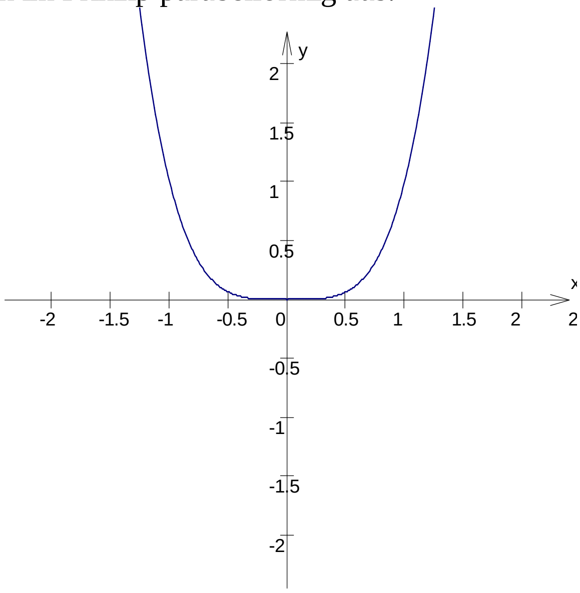
- die Funktion geht auch ins *Negative*, d.h. der Wertebereich ist *ganz* R
- Funktionen 3. (und überhaupt ungeraden) Grades haben garantiert (mindestens) *eine* Nullstelle.

b) f: $y = x^4$

Die Wertetabelle ergibt:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	81	16	1	0	1	16	81

und damit sieht der Graph im Prinzip parabelförmig aus:



Der Graph von f: $y = x^4$ sieht im Prinzip so aus wie der von f: $y = x^2$ (die Normalparabel, gestrichelt), nur ist er für $1 < x < 1$ *flacher*

für $x < 1$ und $1 < x$ *steiler*

Allgemein:

Je höher der Grad einer Funktion, desto steiler ist ihr Graph für große x.

c) Funktionen noch höheren Grades (x^5,x^6...)

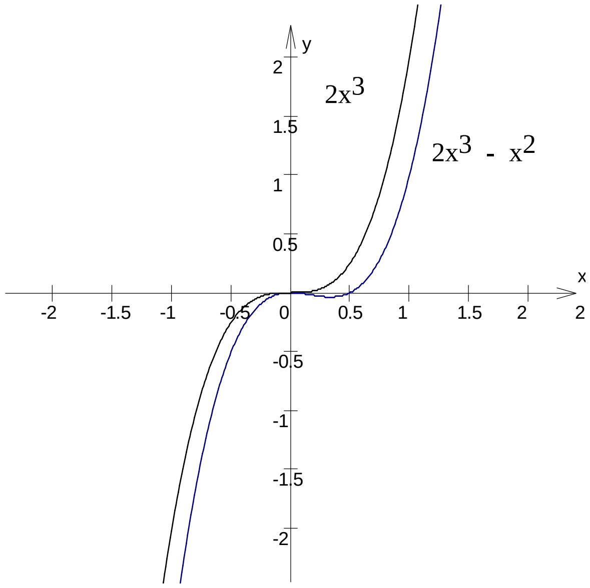
Alle Potenzfunktionen mit *geradem* Exponenten (also x^2, x^4, x^6 ...) sehen im Prinzip wie x^2, also *parabelförmig* aus.

Alle Potenzfunktionen mit *ungeradem* Exponenten (also x^3, x^5, x^7...) sehen im Prinzip wie x^3, also *s-förmig* aus.

d) Komplexere Funktionen

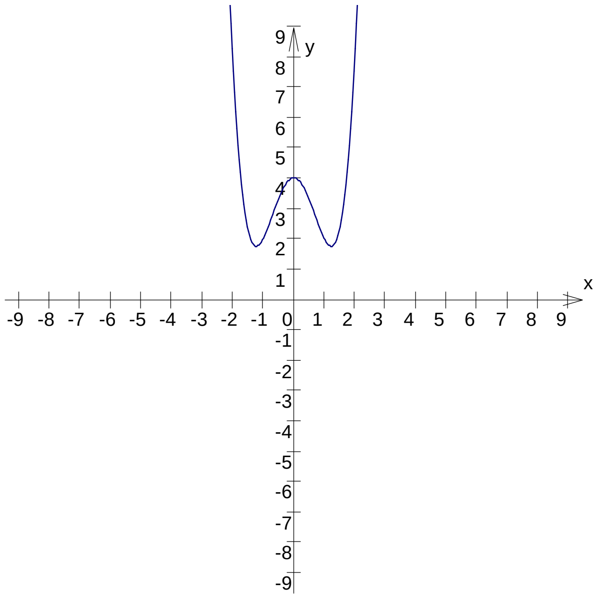
Zusammengesetzte Potenzfunktionen (= ganzrationale Funktionen) sehen für sehr große (positive oder negative) x wie die Funktion der *höchsten* Potenz aus,

$2x^3 - x^2$ also etwa wie $2x^3$ alleine: die höchste Potenz setzt sich immer durch. Nur um x = 0 herum kann die kompliziertere Funktion noch ein paar zusätzliche Schlenker durchführen:

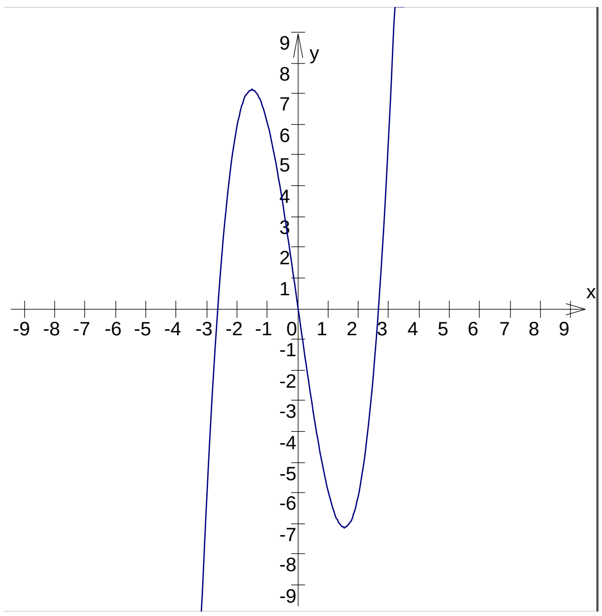


e) Symmetrien

Die Graphen aller ganzrationalen Funktionen, in denen *ausschließlich gerade* Exponenten vorkommen, sind *achsensymmetrisch zur* y-Achse.
z.B. $y = x^4 - 3x^2 + 4(x^0)$:



Die Graphen aller ganzrationalen Funktionen, in denen *ausschließlich ungerade* Exponenten vorkommen, sind *punktsymmetrisch zum* Ursprung.
z.B. $y = x^3 - 7x$:



zu 2.: Lösungsverfahren (für Gleichungen 3./4. Grades)

a) Polynomendivision (Lösungsverfahren für Funktionen 3. und höheren Grades)

Terme der Form $a_n x^n + a_{n1} x^{n1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$

bzw. $a_n x^n + a_{n1} x^{n1} + \ldots + a_1 x + a_0$

nennt man "Polynome", Funktionen der Form f: y = Polynom hingegen "*ganz*rationale" Funktionen.

(im Unterschied zu "*gebrochen* rationalen Funktionen der Form

$$f: y = \frac{\text{1. Polynom}}{\text{2. Polynom}}\ )$$

Ganzrationale Funktionen sind also *Summen/Vielfache* von Potenzfunktionen der Form f: $y = x^n$.

Also ist z.B. $\underset{a_4}{5 \bullet x^4} + \underset{a_3}{0 \bullet x^3} - \underset{a_2}{3\, x^2} + \underset{a_1}{7 \bullet x} - \underset{a_0}{1}$

ein Polynom (vierten Grades) und

$$f: y = 5 \bullet x^4 + 0 \bullet x^3 - 3\, x^2 + 7 \bullet x - 1$$

die zugehörige ganzrationale Funktion.

Nun läßt sich zeigen:

Wenn n_1 Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n ist, dann läßt sich f(x) in der Form

$$f(x) = (x - n_1) \bullet g(x)$$

schreiben, wobei g(x) *wieder* ein Polynom ist, allerdings vom Grad n - 1.
Oder anders gesagt: ist n_1 Nullstelle von f, so läßt sich aus dem Polynom von f das Polynom $(x - n_1)$ ausklammern, und es bleibt *genau* ein Polynom g(x) von (n - 1)-tem Grad über.

Beweis:
Wir teilen f(x) durch $x - n_1$ (wobei hier noch gar nicht geklärt werden soll, *wie* man Polynome durcheinander teilt). Daraus ergibt sich garantiert ein Polynom g(x) (n - 1)-ten Grades, allerdings eventuell auch ein nicht mehr auflösbarer konstanter Zahlenrest r (falls die Division nicht ganz aufgeht). Also gilt:

$$\frac{f(x)}{x - n_1} = g(x) + \frac{r}{x - n_1} \quad \text{oder } f(x) = (x - n_1) \cdot g(x) + r \qquad (A)$$

Für $x > n_1$ geht $x - n_1$ gegen Null und damit auch $(x - n_1) \cdot g(x)$. Also geht nach (A) f(x) gegen das verbleibende r, also $f(n_1) = r$ (B)
Nun ist n_1 nach Voraussetzung aber Nullstelle von f, also ist $f(n_1) = 0$. Mit (B) folgt dann r = 0. Eingesetz in (A) ergibt das:

$$f(x) = (x - n_1) \cdot g(x)$$

Folgerung: gerade wurde gezeigt, daß man für jede Nullstelle n_m eines Polynoms n-ten Grades ein $(x - n_m)$ ausklammern kann und jeweils ein Polynom übrigbleibt, dessen Grad um 1 verringert ist. Klammert man nun nacheinander für *alle* Nullstellen n_m ein $(x - n_m)$ aus, so verringert sich der Grad des verblei-benden Polynoms jeweils um 1. Offensichtlich kann man das aber höchstens n-mal machen: irgendwann verbleibt nur noch ein Polynom nullten Grades, also eine Konstante übrig. Daraus folgt:

Eine Potenzfunktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen (oder weniger).

Nun stellt sich aber die Frage, *welches* Polynom g(x) mit dem Grad (n-1) nach Ausklammern von $(x - n_1)$ übrigbleibt.
Das sei anhand der ganzrationalen Funktion

$$f: y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

exemplarisch vorgeführt.

Hier zeigt sich schon das größte Problem des Verfahrens: um es überhaupt anwenden zu können, müssen wir eine Nullstelle n_1 schon *kennen* oder sie zumindest doch durch Probieren schnell *finden* können

(nur unter *dieser* Voraussetzung ist alles folgende möglich. Das aber heißt: die *erste* Nullstelle können wir *nicht* berechnen. Folge ist sofort: können wir die *erste* Nullstelle nicht erraten, so finden wir auch die *anderen* nicht. Das aber heißt wiederum: Gleichungen 3. Grades sind *nicht immer* lösbar).
In unserem Fall sieht man schnell, daß $n_1 = 1$ solch eine Nullstelle von f: $y = x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6$ist, denn

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0.$$

Nun wenden wir den Trick der "Polynomendivision" an, der an diesem Beispiel nur *vorgeführt*, nicht aber *bewiesen* werden soll.
Man teilt das Polynom $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ durch das Polynom $(x - n_1)$, in unserem Fall also durch (x - 1). (Vorsicht: ist n_1 negativ, also z.B. $n_1 = -5$, so ergibt sich $x - n_1 = x - (-5) = x$ *plus* 5.)

Hier soll nicht erklärt werden, *wieso* man überhaupt Polynome durcheinander dividieren darf, sondern nur die Rechnung vorgeführt werden (die im Prinzip genauso funktioniert wie Zahlendivision):

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = x^2$$

Bisher hat man nur folgendes getan: den ersten Summanden des 1. Polynoms (also x^3) durch den ersten Summanden des 2. Polynoms (also x) geteilt.

Nun multipliziert man rückwärts das Ergebnis x^2 mit dem ganzen zweiten Polynom (x - 1) und schreibt das Ergebnis unter das erste Polynom:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = x^2 \\ \ x^3 - x^2 \end{array}$$

Nun werden die vorne stehenden Polynome voneinander subtrahiert:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = x^2 \\ \underline{-(x^3 - x^2 \qquad\quad)} \\ \qquad\quad - 5x^2 + 11x - 6 \end{array}$$

Nun beginnt das Spielchen von vorne: der erste Summand des neuen Polynoms (also $5x^2$) wird durch den ersten Summanden des zweiten Polynoms (also wieder x) geteilt, das Ergebnis hinten angefügt:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = x^2 - 5x \\ \underline{-(x^3 - x^2 \qquad\quad)} \\ \qquad\quad - 5x^2 + 11x - 6 \end{array}$$

Dieses 5x wird wieder mit dem ganzen zweiten Polynom (x - 1) multipliziert, das Ergebnis wieder druntergeschrieben und dann erneut subtrahiert:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = x^2 - 5x \\ \underline{-(x^3 - x^2 \qquad\quad)} \\ \qquad\quad - 5x^2 + 11x - 6 \\ \qquad \underline{-(- 5x2 + 5x \quad)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 6x - 6 \end{array}$$

Neues Spiel, neues Glück: der erste Summand des neuen Polynoms (also 6x) wird durch den ersten Summanden des zweiten Polynoms (also wieder x) geteilt, das Ergebnis hinten angefügt:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2 \qquad\quad)} \\ \qquad\quad - 5x^2 + 11x - 6 \\ \qquad \underline{-(- 5x2 + 5x \quad)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 6x - 6 \end{array}$$

Diese 6 wird wieder mit dem ganzen zweiten Polynom (x-1) multipliziert, das Ergebnis wieder druntergeschrieben und dann erneut subtrahiert:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = x^2 - 5x + 6 \qquad (\#) \\
\underline{-(x^3 - x^2 \qquad\qquad)} \\
\qquad -5x^2 + 11x - 6 \\
\qquad \underline{-(-5x2 + 5x \quad)} \\
\qquad\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{-(6x - 6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Unten bleibt Null über, die Rechnung ist also aufgegangen (was hier, aber keineswegs immer bei der Polynomdivision der Fall ist: allerdings kann als Rest r immer nur eine Zahl *ohne* Variable übrigbleiben vgl. unten).

Die Polynomendivision geht allerdings - wie gezeigt - *immer ohne* Rest auf, wenn wir durch (x - Nullstelle) teilen.

Mit (#) haben wir also erhalten

$$
\begin{array}{lll}
 & (x^3 - 6x^2 + 11x - 6):(x-1) = & x^2 - 5x + 6 \qquad | \cdot (x - 1) \\
\text{bzw.} & (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) & = (x-1)\bullet(x^2 - 5x + 6). \\
\text{bzw. } f\text{: } y = & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & = (x-1)\bullet(x^2 - 5x + 6). \\
 & & = (x-1)\bullet \quad g(x)
\end{array}
$$

In f: $y = x^3 - 6x^2 + 11x \ \ 6$ war das Polynom 3. Grades, und mit $g(x) = x^2 \ -5x + 6$ haben wir nun das Polynom einen geringeren (also 2.) Grades gefunden.

Zwischendurch sei kurz festgehalten:

Die Polynomdivision ist ebenso bei Polynomen noch *höheren* als nur dritten Grades anwendbar. Hauptsache, man kennt wenigstens eine Nullstelle bereits *vorher*.

<u>Nullstellenberechnung</u>

Den gesamten Aufwand dieses Kapitels brauchen wir aber zukünftig nur, um *alle* Nullstellen einer Funktion wie z.B.

$f\text{: } y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

zu finden.

Gesucht seien also die Nullstellen von

$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

Wann also gilt

$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$?

Nun haben wir eben mittels Polynomendivision gezeigt:

$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)\bullet(x^2 \ \ 5x + 6)$

Die rechte Seite ist genau dann Null, wenn einer der beiden *Faktoren*/eine der beiden *Klammern* Null ist (oder beide gleichzeitig). x - 1 ist aber für die bereits bekannte Nullstelle $n_1 = 1$ Null. Wir brauchen also nur noch die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 - 5x + 6$ zu suchen, um *alle* Nullstellen von $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ zu erhalten.

Nullstellen eines quadratischen Terms *können* wir aber schon mittels quadratischer Ergänzung berechnen. Wir erhalten als Nullstellen von $x^2 - 5x + 6$:

$n_2 = 2$ und $n_3 = 3.$

Insgesamt hat also $y = x^3 - 6x^2 + 11x -6$ die Nullstellen $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ und $n_3 = 3$.

Herleiten von Funktionsgleichungen aus vorgegebenen Nullstellen

Bisher waren die Funktionsgleichungen immer vorgegeben, und aus ihnen sollten Nullstellen *berechnet* werden. Mit den Polynomen der Form $(x - n_1)$ ist es nun auch möglich, umgekehrt vorzugehen: wenn wir nur die Nullstellen *wissen*, können wir daraus erst die (noch unbekannte) *Funktionsgleichung* bestimmen.
Das sei an einer quadratischen Funktion vorgeführt (funktioniert aber genauso für Funktionen 3./4. ... Grades).
Angenommen also: eine (normierte) quadratische Funktion hat die Nullpunkte $N_1(-2;0)$ und $N_2(30)$, und wir wollen gerne wissen, welche (normierte) quadratische Funktion das ist. Wir suchen also die zugehörige Funktionsgleichung.
Als Lösung bei der Nullstellenberechnung kennen wir bereits

$x = -2 \quad |+2$

$\lor \; x = -3 \quad |-3$

Nun "bringen" wir die rechts stehenden Zahlen nach links, indem wir +2 bzw. - 3 rechnen, und erhalten:

$\Leftrightarrow \; x + 2 = 0 \;\lor\; x - 3 = 0$

Nun wissen wir: das Produkt zweier Zahlen (hier $x + 2$ bzw. $x - 3$) ist *genau dann* gleich Null, wenn *eine* der beiden Zahlen Null ist.
Also gilt:

$\Leftrightarrow (x + 2) \cdot (x - 3) = 0$

Durch Auflösen der Klammern erhalten wir:

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 \quad - x \quad - 6 = 0$

Lassen wir die Zwischenschritte weg, so erhalten wir:

$x = -2 \;\lor\; x = 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 6 = 0$

Während wir erst aus $x = -2 \lor x = 3$ die Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$ *gefolgert* hatten, gilt wegen der Äquivalenzzeichen auch umgekehrt $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \lor x = 3$. Oder anders gesagt: $x = - 2$ bzw. $x = 3$ erfüllen die Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$.
Nochmals anders gesagt:
$x = - 2$ und $x = 3$ sind die x-Werte, für die die Funktionsgleichung $y = x^2 - x - 6$ den y-Wert 0 annimmt,
und somit sind $N_1(-2|0)$ und $N_2(3|0)$ Nullpunkte der Funktion f: $y = x^2 - x - 6$.
Wir haben also unser Ziel erreicht, nämlich zu vorgegebenen Nullstellen die erst noch unbekannte Funktionsgleichung gefunden.
Allgemein:

Sind $N_1(n_1|0)$ und $N_2(n_2|0)$ Nullpunkte einer normierten quadratischen Funktion, so hat die zugehörige Funktiondie Funktionsgleichung $y = (x - n_1)(x - n_2)$.
Entsprechend gilt für Funktionen 3. Grades: Sind $N_1(n_1|0)$, $N_2(n_2|0)$ und $N_3(n_3|0)$ Nullpunkte einer normierten Funktion 3. Grades, so hat die zugehörige Funktion die Funktionsgleichung $y = (x - n_1)(x - n_2)(x - n_3)$.
Entsprechendes gilt für (normierte) Funktionen 4., 5. ... Grades.

Nebenbei: hier sieht man auch, wie LehrerInnen/Schulbücher es schaffen, Funktionen zu erhalten, die (meist) so einfache Nullstellen haben: sie gehen von den einfachen Nullstellen aus, berechnen mit der eben genannten Regel die Funktionsgleichung und geben diese den SchülerInnen, die dann wieder umgekehrt die Nullstellen berechnen dürfen.

b) Substitution
(Lösungsverfahren für *einige* Funktionen 4. Grades/biquadratische Gleichungen)

Potenzfunktionen *vierten* Grades kann man unter einer besonderen Bedingung relativ einfach lösen, nämlich dann, wenn nur *gerade* Exponenten vorkommen.

Beispiel: $0 = x^4 - 5\ x^2 + 6$ (A)

Wir *substituieren* (= ersetzen) vorläufig einfach x^2 durch z, womit gleichzeitig gilt $x^4 = (x^2)^2 = z^2$. Damit vereinfacht sich (A) zu $0 = z^2 - 5\ z + 6$,
also einer quadratischen Gleichung, die wir ja bereits lösen können (wenn auch die Variable mal z statt x heißt):

$$0 = z^2 - 5 z + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = z^2 - 2 \cdot 2{,}5\, z + \underbrace{2{,}5^2 - 2{,}5^2}_{\text{quadr. Ergänzung und sofort wieder abgezogen}} + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (z^2 - 2 \cdot 2{,}5\, z + 2{,}5^2) - 2{,}5^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (z - 2{,}5)^2 - 2{,}5^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (z - 2{,}5)^2 - 0{,}25 \qquad | + 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}25 = (z - 2{,}5)^2 \qquad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad +0{,}5 = z - 2{,}5 \quad \text{oder} \quad -0{,}5 = z - 2{,}5 \qquad | + 2{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = z \quad \text{oder} \quad 2 = z$$

Nun können wir die Substitution *rückgängig* machen: da $x^2 = z$ ist, folgt:

$$x^2 = z = 3 \quad \text{oder} \quad x^2 = z = 2$$

bzw. kurz:

$$x^2 = 3 \quad \text{oder} \quad x^2 = 2 \qquad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\sqrt{3} \text{ oder } x = -\sqrt{3} \text{ oder } x = +\sqrt{2} \text{ oder } x = -\sqrt{2}$$

Damit hat die Ausgangsgleichung $0 = x^4 - 5\ x^2 + 6$ die Lösungsmenge $L = \{ \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$.

Also hat $y = x^4 - 5\ x^2 + 6$ vier Nullstellen.

Zusammenfassung:

	Nullstellenbestimmung	Scheitelpunktbestimmung
	grundsätzlich dann vereinfacht, wenn kein Absolutterm vorhanden ist, so daß zumindest ein x (erste Nullstelle x = 0) herausziehbar; z.B. $0 = x^2 - x$	

	$\Leftrightarrow$ 0 = x • (x - 1) $\Leftrightarrow$ x = 0 $\vee$ x - 1 = 0	
Funktion 1. Grades (linear)	y = 0 einsetzen, x berechnen	nicht vorhanden
Funktion 2. Grades (quadratisch)	y = 0 einsetzen a) quadratische Ergänzung b) Vieta c) p/q-Formel (Determinante unter Wurzel entscheidet über Lösungsmöglichkeiten)	quadratische Ergänzung
Funktion 3. Grades (kubisch)	y = 0 einsetzen a) eine Nullstelle vermutbar, Polynomendivision, quadr. Restterm wie oben lösen b) ansonsten nicht möglich	erst mit Ableitung (Oberstufe)
Funktion 4. Grades	y = 0 einsetzen a) eine Nullstelle vermutbar, Polynomendivision, Restterm 3. Grades; weiter wie dort unter a) b) biquadratisch $\Rightarrow$ Substitution c) ansonsten nicht möglich	„ „ „ „
Funktion höheren als 4. Grades	a) Polynomendivision bei bekannten Nullstellen, bis quadr. Restterm b) ansonsten nicht möglich	„ „ „ „

Umkehrfunktionen

Wenn ein Liter Milch 2 DM kostet, so läßt sich jeder *Liter*zahl x ein eindeutiger *Preis* y zordnen. Weil der Preis also immer doppelt so groß ist wie die Literzahl, hilft die Funktion

$$f: \underset{\text{Liter}}{x} \mapsto \underset{\text{Preis}}{y} = 2x$$

$$3\,l \mapsto 2 \cdot 3\text{ DM} = 6\text{ DM}$$

(f ist eine *Funktion*, weil jeder Literzahl nur *ein* Preis zugeordnet wird)

Angenommen nun, ich war im Kaufladen und habe für 6 DM Milch gekauft, weiß aber nicht mehr, wieviele *Liter* es waren. Diesmal muß ich also nicht mehr wie oben der (bekannten) *Liter*zahl einen (noch unbekannten) *Preis* zuordnen, sondern umgekehrt einem (bekannten) *Preis* eine (noch unbekannte) *Liter*zahl.

Weil nun aber die Literzahl immer halb so groß ist wie der Preis, hilft die Funktion

$$g: \underset{\text{Preis}}{y} \mapsto \underset{\text{Liter}}{x} = \frac{1}{2} \cdot y$$

$$6\text{ DM} \mapsto \frac{1}{2} \cdot 6\,l = 3\,l$$

(auch g ist eine *Funktion*, weil jedem Preis *eine* Literzahl zugeordnet wird)

Schauen wir uns nun die Funktionen f und g genauer an:

ist f: $x \mapsto y = 2x$, so kann ich aus einem vorgegebenen x (z.B. x = 3) schnell das zugehörige y (hier: $y = 2 \cdot 3 = 6$) berechnen.

Umgekehrt läßt sich aber aus f: $x \mapsto y = 2x$ *nicht* so problemlos ablesen, welches x zu einem vorgegebenen y gehört (z.B.: für welches x ist y = 8?).

Das können wir aber problemlos aus der Zuordnungsvorschrift von g ablesen: g: $y \mapsto x = \frac{1}{2} \cdot y$. In unserem Fall für y = 8 ergibt sich:

$$g: 8 \mapsto x = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

(oder an unserem Beispiel: für 8 DM bekomme ich 4 Liter).

Also gilt:

- mit f läßt sich zu einem vorgegebenen x das y finden (in unserem Fall zur Literzahl der Preis)
- mit g läßt sich zu einem vorgegebenen y das x finden (in unserem Fall zum Preis die Literzahl).

g tut also genau das *Gegenteil* von f.

Z.B. ist $f(5) = 2 \cdot 5 = 10$

$$g(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Oder allgemein: $g[f(x)] = g[2x] = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$

(Vorsicht: es gilt *nicht* g(5) = f(5), denn $g(5) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$)

g macht also f *rückgängig*. Daher definieren wir:

> Eine Funktion g, die eine andere Funktion f *rückgängig* macht, nennen wir auch "Umkehrfunktion" zu f.
> Umkehrfunktionen g dienen überhaupt nur dazu, Funktionen f rückgängig zu machen!!!

Weiterhin gilt:

Ist g Umkehrfunktion zu f, so ist auch f Umkehrfunktion zu g, denn dann macht nicht nur g die Funktion f rückgängig, sondern auch f die Funktion g. D.h.: Funktion und Umkehrfunktion sind *wechselseitig* zueinander Umkehrfunktion.

(Es ist wie mit Filmen: aus einem Positiv läßt sich ein Negativ und aus einem Negativ wieder ein Positiv machen, und jedes ist das Gegenteil vom anderen.)

Ein Beispiel dafür, daß f auch g rückgängig macht:

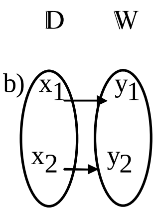
$$g(12) = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

$$f(6) = 2 \cdot 6 = 12$$

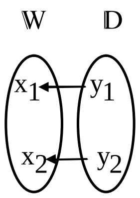
Oder allgemein: $f[g(y)] = f[\frac{1}{2} \cdot y] = 2 \cdot [\frac{1}{2} \cdot y] = y$

Nun gibt es allerdings nicht zu *jeder* Funktion f eine Umkehr*funktion*, sondern wir definieren:

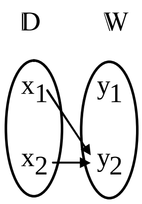
Eine Funktion $f:x \mapsto$ heißt "umkehrbar", wenn auch die Zuordnung $g:y \mapsto x$ eine *Funktion* ist. g heißt dann "Umkehrfunktion zu f". Umgekehrt ist dann auch f Umkehrfunktion zu g.

b) 

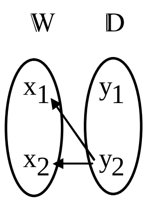
hat die Umkehrfunktion



weil auch in der neuen Umkehrrichtung jedem Element des Definitionsbereichs *ein* Element des Wertebereichs zugeordnet wird.

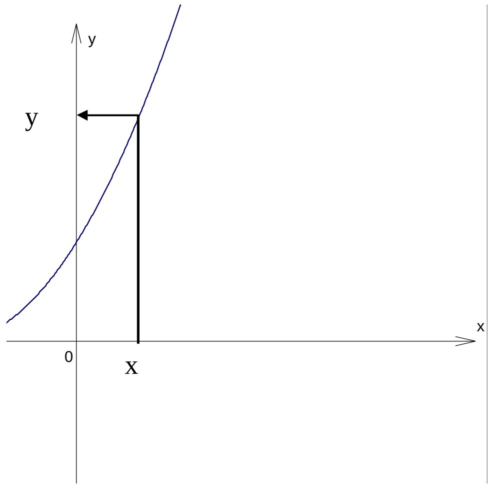


hat hingegen *keine* Umkehrfunktion, weil in

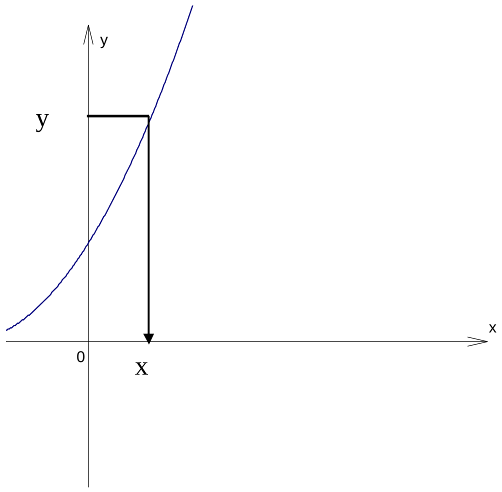


die Zuordnung g dem Element y_2 des Definitionsbereichs *mehrere* Werte des Wertebereichs (nämlich x_1 *und* x_2) zuordnet.

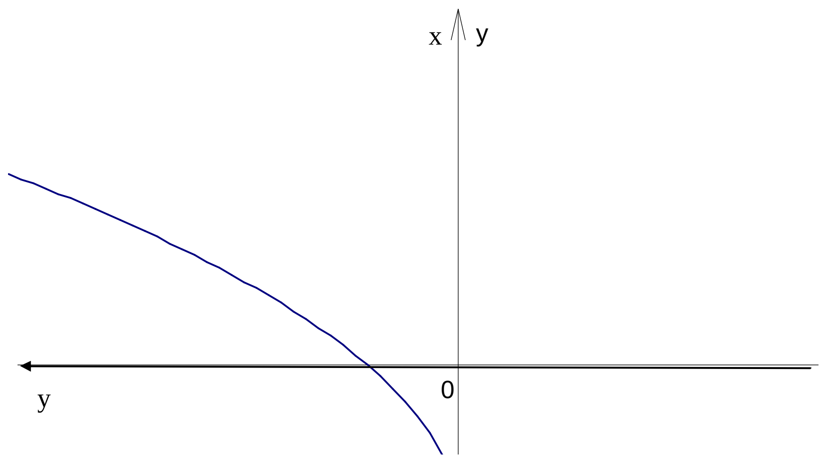
c) auch aus der *Form* des Graphen einer Funktion kann man ersehen, ob sie umkehrbar ist. Dazu zwei
Beispiele von Funktionen:
1.:



f ist eindeutig eine *Funktion*, da jedem x nur *ein* y zugeordnet wird (man erinnere sich: das kann man am Graphen erkennen, weil er a) nicht parallel zur y-Achse verläuft, b) keine Sprünge hat und c) keinen Rückwärtschlenker macht).
Aber auch die Umkehrung, also die Abbildung von der y auf die x-Achse, ist eine Funktion:

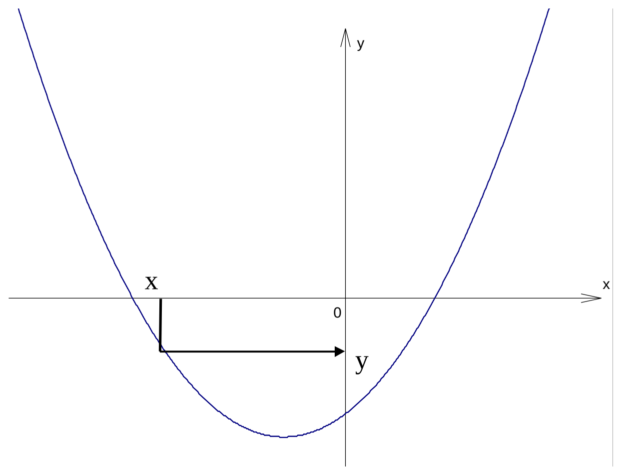


Daß auch hier eine Funktion vorliegt, kann man besser erkennen, wenn man den Graphen mal so kippt, daß der neue Definitionsbereich (y-Achse) wie gewohnt *unten* liegt und der neue Wertebereich (x-Achse) nach *oben* zeigt:

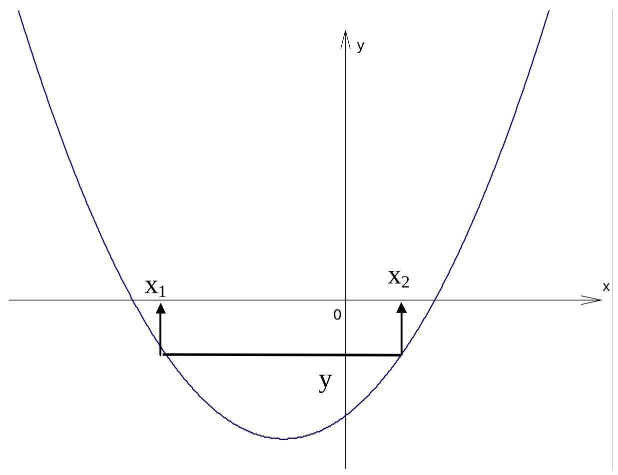


Wieder gilt: der Graph a) verläuft *nicht* parallel zur Werteachse (jetzt x-Achse), b) macht *keine* Sprünge und c) *keinen* Rückwärtsschlenker. Also ist auch die Umkehrung eine *Funktion*.

2:

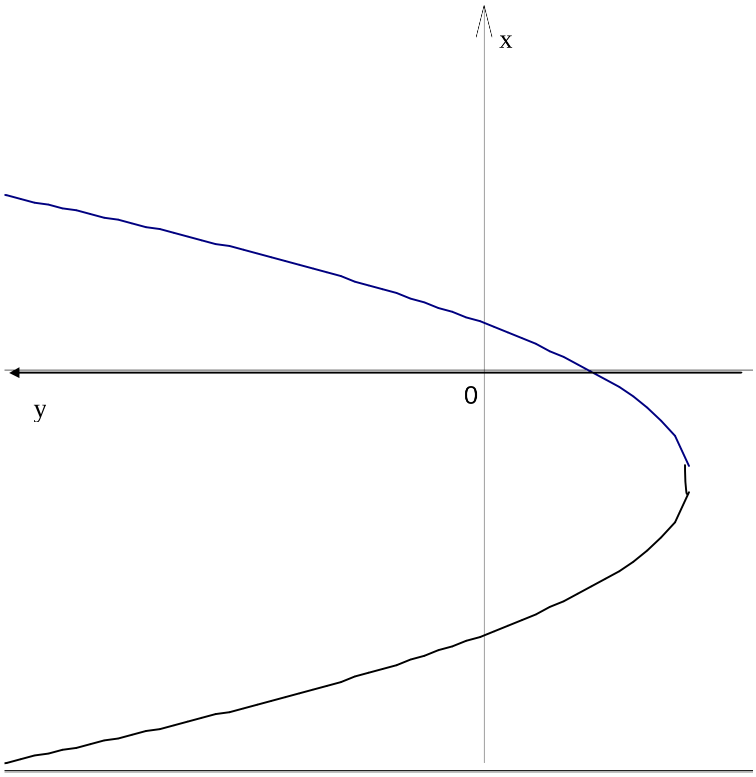


Auch g ist wieder eine Funktion. Schauen wir uns mal die Umkehrung an:



(A)

Wenn man diese wieder wie eben kippt, erhält man:



(B)

Hier sieht man deutlich, daß die Zuordnung einen Rückwärtsschlenker macht. Also ist sie *keine* Funktion: g besitzt keine Umkehrfunktion!

Schauen wir uns an, was der Rückwärtsschlenker in der gekippten Form (B) bedeutet: dort geht der Graph der Funktion erst nach rechts und dann doch wieder nach links. In der nichtgekippten Form (y) heißt das, daß der Graph erst nach unten und dann wieder nach oben geht (siehe dicke Markierung in (A)), also nicht *nur* fällt oder *nur* steigt. Wir können also festhalten:

Eine Funktion ist nur dann umkehrbar, wenn sie *nur* fällt oder *nur* steigt (vgl. Beispiel 1.)

Damit sieht man auch schon, wie man nichtumkehrbare Funktionen doch noch umkehrbar machen kann: indem man einfach den Definitionsbereich auf *Teil*stücke einschränkt, wo die Funktion *nur* steigt oder *nur* fällt (bei der Wurzelfunktion werden wir so vorgehen).

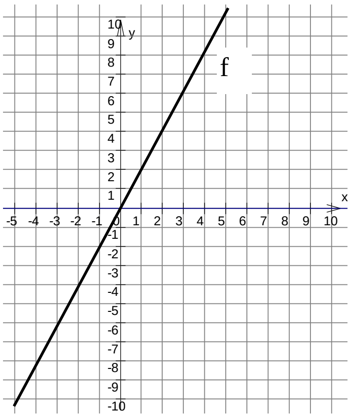
Bisher hatten wir bei Umkehrfunktionen immer ganz ungewohnt ein y auf ein x abgebildet. Um bei der üblichen Zuordnung $x \mapsto y$ zu bleiben, benennen wir die Variablen am Ende einfach wieder um.
Beispiel: $f: y = 2x \quad |:2$ hat die Umkehrfunktion

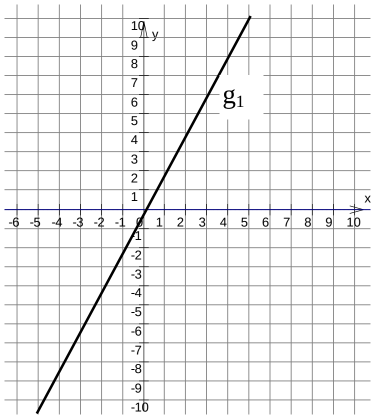
$g_1: \frac{y}{2} = x$ oder

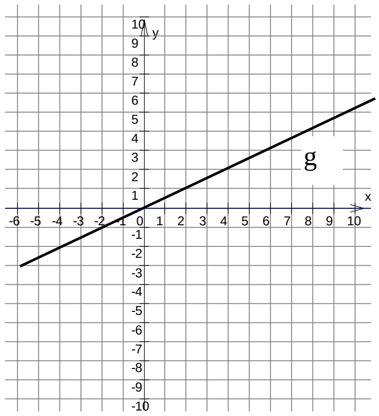
$g_1: x = \frac{1}{2}y$ Umbenennung von x in y und umgekehrt ergibt:

$g: y = \frac{1}{2}x$

Graphisch sieht das so aus:





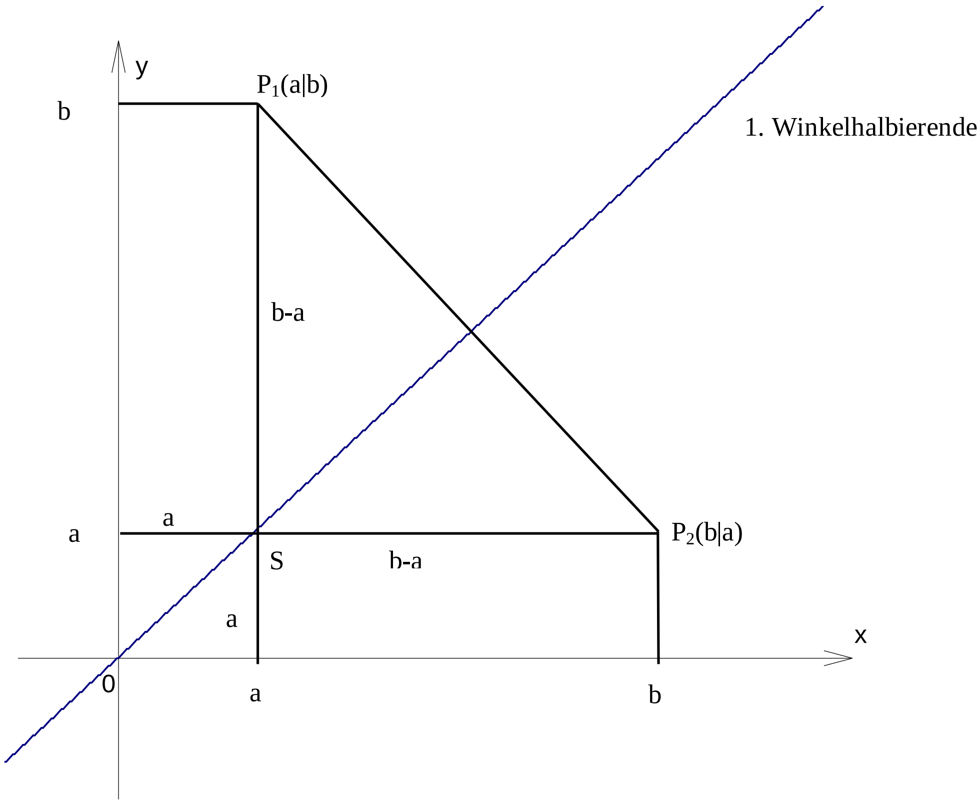


Graph der Umkehrfunktion durch Achsenspiegelung

Was passiert nun genau *graphisch* bei der Vertauschung eines x- und y-Wertes?
Schauen wir uns dazu eine allgemeine Funktion f und ihre Umkehrfunktion g mal genauer an.
Angenommen, es gilt:

$f(a) = b \Rightarrow$ zugehöriger Punkt $P_1(a|b)$

Dann gilt: $g(b) = a \Rightarrow$ zugehöriger Punkt $P_2(b|a)$:



Die Winkelhalbierende des Winkels zwischen der positiven x- und der positiven y-Achse nennen wir auch 1. Winkelhalbierende (gestrichelt).
Q ist ein Quadrat, weil Länge und Breite gleich, nämlich a sind. Deshalb liegt der Punkt S auf der 1. Winkelhalbierenden. Das Dreieck P_1SP_2 hat zwei *gleiche* Schenkel der Länge (b-a), ist also *gleichschenklig*. Außerdem ist die 1. Winkelhalbierende auch Winkelhalbierende *dieses* Dreiecks (da sie durch S geht und

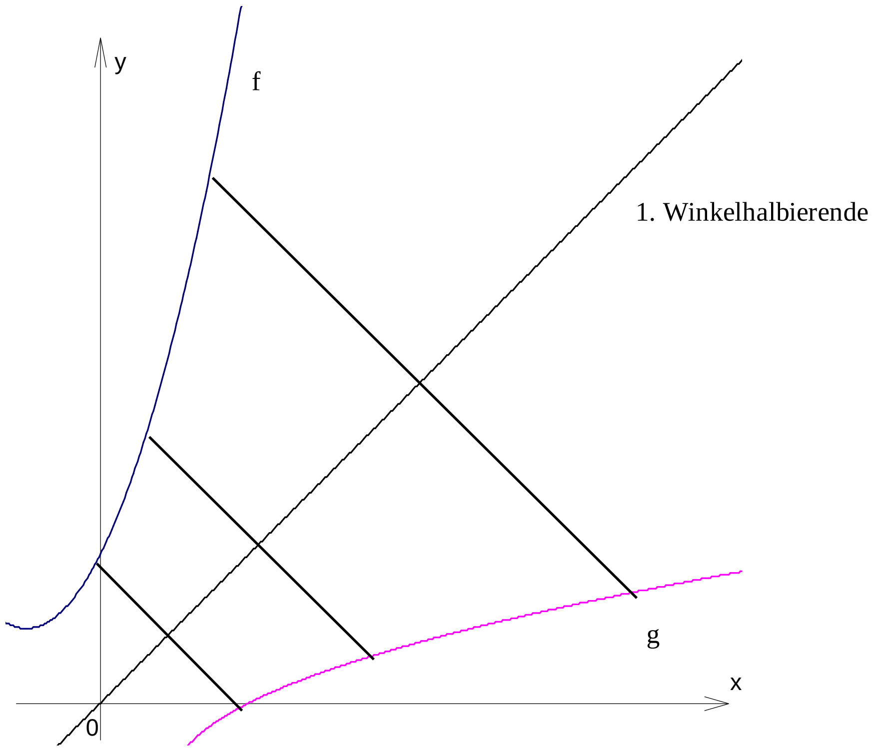
die Seiten $\overline{S}\ \overline{P}_1$ und $\overline{S}\ \overline{P}_2$ parallel zur y- bzw. x-Achse sind). Für die Winkelhalbierende des Winkels zwischen den gleichen Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks gilt aber:
1. sie *halbiert* die gegenüberliegende Seite (hier $\overline{P}_1\overline{P}_2$)
2. sie verläuft *senkrecht* zu dieser Seite.

Aus 1. und 2. folgt: man erhält P_2 durch Achsenspiegelung von P_1 an der 1. Winkelhalbierenden.

Also gilt allgemein:

Ist eine umkehrbare Funktion f gegeben, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion g (nach Austausch von x und y) aus dem Graphen von f durch *Achsenspiegelung* an der ersten Winkelhalbierenden.

Beispiel: durch Spiegelung von f (vorgeführt an einigen Punkten) erhalten wir die Umkehrfunktion g:



Die wichtigsten Umkehrfunktionen sind (jeweils wechselseitig): a) Quadrat- und Wurzelfunktion (bzw. allgemeiner x^n und $\sqrt[n]{x}$, wobei $\sqrt[n]{x}$ diejenige Zahl ist, die n mal mit sich selbst malgenommen x ergibt) b) Exponential- und Logarithmusfunktion

Exponentialfunktionen

Aussehen und Eigenschaften der Exponentialfunktionen:

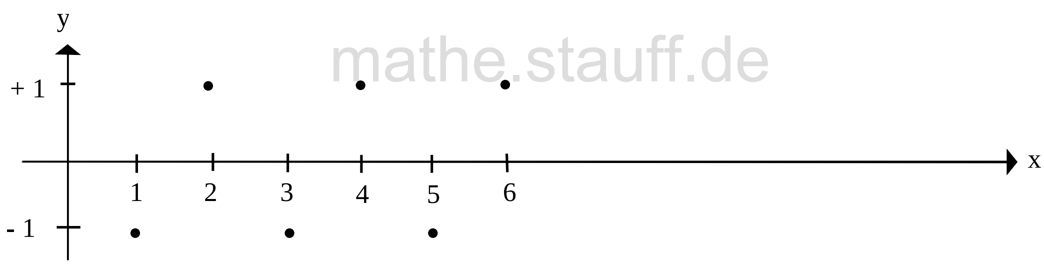
- bei *Potenz*funktionen der Form $y = x^n$ ist die *Basis* variabel und der *Exponent fest* (z.B. $y = x^2$)
- bei *Exponential*funktionen der Form $y = a^x$ ist hingegen der *Exponent variabel* (deshalb der passende Name "Exponentialfunktionen") und die *Basis fest* (z.B. $y = 2^x$)

Exponentialfunktionen der Form $y = a^x$ sind grundsätzlich nur für $a > 0$ definiert, also $a \in \mathbb{R}^+$ ohne Null

(also z.B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ oder $y = 3^x$).

Außerdem muß gelten: $a \neq 0$, da 0^x *immer* gleich Null, also überhaupt keine Exponentialfunktion mehr.

Für *negative* a ergäbe sich ein arges Zickzack. Schauen wir uns z.B. für $a = -1$ die Funktion f: $y = (-1)^x$ an, wobei wir uns hier bei den x auf natürliche Zahlen beschränken. Dann ist $f(n) = (-1)^n = +1$ für *gerade* n und $f(n) = (-1)^n = -1$ für *ungerade* n, so daß die Funkion so aussähe:



Typische Exponentialfunktionen tauchen bei Wachstums- und Zerfallsprozessen auf:

1. Wachstumsprozesse

Eine Kettenreaktion bei der Kernspaltung verläuft folgendermaßen: zu Beginn = Zeitpunkt 0 wird 1 Atom in zwei Teile gespalten: $f(0) = 1$

Jede Hälfte des ersten Atoms zertrümmert wieder je ein weiteres Atom. Zum Zeitpunkt 1 werden also 2 Atome gespalten: $f(1) = 2$

Die 4 Hälften der zweiten Atome zertrümmern wieder je ein weiteres Atom. Zum Zeitpunkt 2 werden also 4 Atome gespalten: $f(2) = 4$

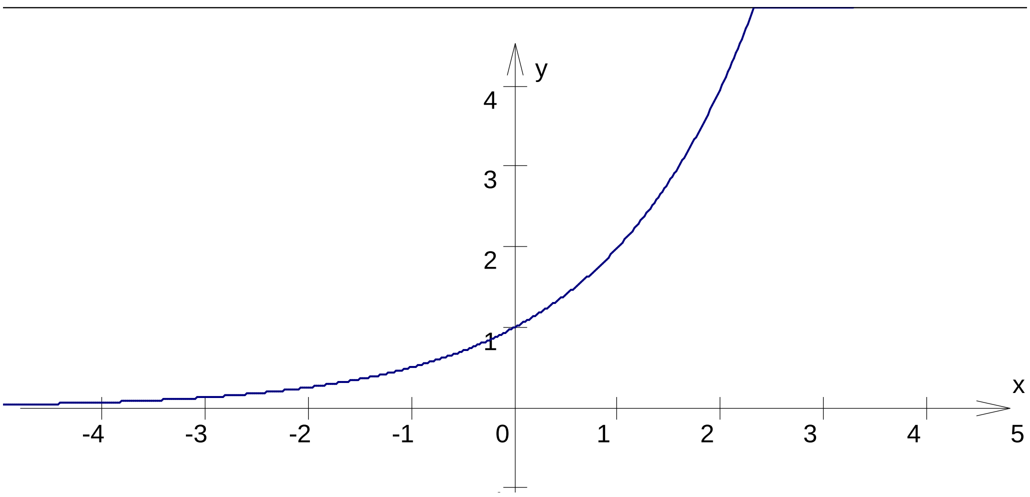
Entsprechend geht es weiter: zum Zeitpunkt 3 sind es 8 Atome $\Rightarrow f(3) = 8$

" " 4 " " 16 " $\Rightarrow f(4) = 16$

In jeder Zeiteinheit *verdoppelt* sich also die Zahl der neu gespaltenen Atome gegenüber dem *vorherigen* Zeitpunkt. Also folgt allgemein:

zum Zeitpunkt n werden 2^n Atome gespalten $\Rightarrow f(n) = 2^n$

Die Kettenreaktion wird also durch die Funktion f: $y = 2^n$ beschrieben, und der zugehörige Graph ist



Sieht man mal davon ab, daß solch eine Kettenreaktion rasend schnell vor sich geht (die Zeitpunkte neuer Spaltungen also sehr schnell aufeinander folgen), so sieht man an dieser Exponentialfunktion das absolut Teuflische von exponentiellen Wachstumsprozessen: weil sich die Zahl der gespaltenen Atome immer verdoppelt, explodiert diese Funktion schnell über alle Grenzen. Zum Zeitpunkt 100 sind z.B. schon

$f(100) = 2^{100} \approx 1.267.700.000.000.000.000.000.000.000.000$

Atome gespalten, also etwa eine Quintillionen Atome. Glücklicherweise frißt sich das nicht ewig weiter (wovor die ersten Atomforscher echte Angst hatten: daß nämlich die ganze Erde und die Luft anfangen würden zu "brennen"), die grauenhafte Wirkung solcher Zahlen sieht man aber z.B. an Hiroshima.
Auch eine andere "Hinterhältigkeit" exponentieller Wachstumsfunktionen kann man an unserem Beispiel gut sehen: sie sehen anfangs ganz *harmlos*, ja fast *linear* aus. Ein deutlicheres Beispiel ist da die Zunahme der Weltbevölkerung: jahrhundertelang war eine Zunahme zwar vorhanden, aber kaum bemerkbar heute aber stellen wir fest:

1960	3	Milliarden
1990	6	Milliarden
2000	≈10	Milliarden

Exponentielle *Wachstumsprozesse* funktionieren nach der Funktion

$f: y = a^x$, wobei $a > 1$

Sie explodieren ungeheuer schnell, z.B. auf die Dauer schneller als jede Potenzfunktion noch so hohen Grades.

2. Zerfallsprozesse

Radioaktives Material zerfällt in bestimmten "Halbwertszeiten". Das bedeutet, daß nach einem bestimmten - je nach Material verschiedenen - Zeitraum immer nur noch die *Hälfte* an Radioaktivität vorhanden ist (der Rest wurde in die Umwelt abgestrahlt). Angenommen, wir haben zu Beginn = Zeitpunkt 0 1 kg radioaktives Material: $f(0) = 1$
Nach 1 Halbwertszeit, also zum Zeitpunkt 1 haben wir noch die Hälfte davon. Zum Zeitpunkt 1 liegt also $\frac{1}{2}$ kg radioaktives Material vor: $f(1) = \frac{1}{2}$
Nach 2 Halbwertszeiten, also zum Zeitpunkt 2 haben wir wiederum noch die Hälfte davon. Zum Zeitpunkt 2 liegt also $\frac{1}{4}$ kg radioaktives Material vor: $f(2) = \frac{1}{4}$

Nach 3 Halbwertszeiten, also zum Zeitpunkt 3 haben wir wiederum noch die Hälfte davon. Zum Zeitpunkt 3 liegt also $\frac{1}{8}$ kg radioaktives Material vor: $f(3) = \frac{1}{8}$

Entsprechend geht es weiter:

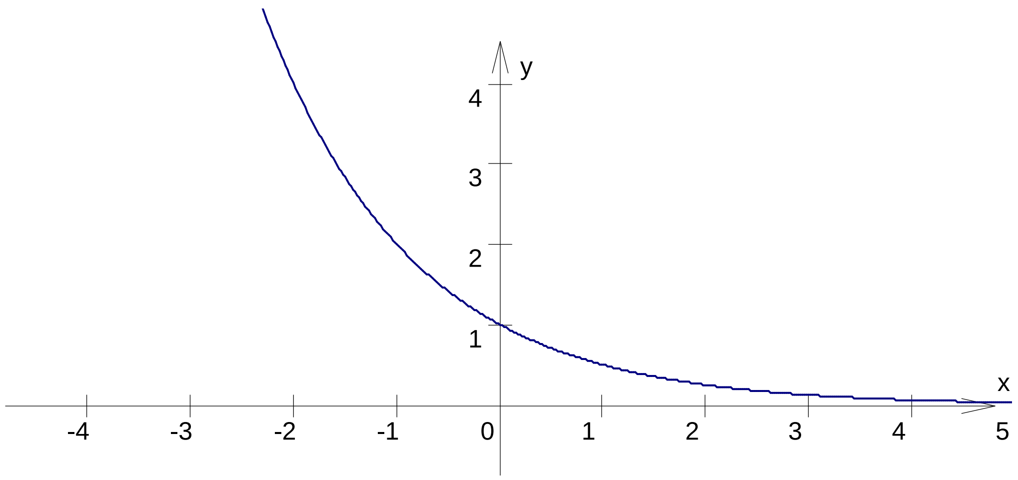
zum Zeitpunkt 4 ist es $\frac{1}{16}$ kg $\Rightarrow f(4) = \frac{1}{16}$

" " 5 " " $\frac{1}{32}$ kg $\Rightarrow f(5) = \frac{1}{32}$

In jeder Zeiteinheit *halbiert* sich also die Menge radioaktiven Materials gegenüber dem *vorherigen* Zeitpunkt. Also folgt allgemein:

zum Zeitpunkt n gibt es $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ kg radioaktives Material $\Rightarrow f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Die *Zerfallsfunktion* wird also durch die Funktion f: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ beschrieben, und der zugehörige Graph ist



Bei radioaktiven Zerfallsprozessen steht es mit den Zeiträumen genau umgekehrt wie bei Kettenreaktionen: der Abstand der Zeiträume, nach denen die radioaktive Menge halbiert ist, also eine Halbwertszeit, kann manchmal sehr lang sein. Es gibt z.B. radioaktive Stoffe, die erst nach einigen hunderttausend Jahren nur noch die halbe Radioaktivität haben. Also: Radioaktivität kann man rasend schnell herstellen, aber in alle Ewigkeit nicht beseitigen. Daß sie so schlecht zu beseitigen ist, hat auch noch einen anderen Grund: zwar halbiert sich pro Zeiteinheit die Radioaktivität, aber es bleibt ja immer noch eine Hälfte *übrig*. Mathematisch gesagt: f: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ konvergiert zwar asymptotisch gegen Null/die x-Achse, erreicht sie aber *nie*. Ganz stimmt das in der Praxis allerdings nicht: irgendwann ist tatsächlich das letzte Atom verstrahlt, weil ich ja Materie nicht ewig halbieren kann. Nur: weil auch der kleinste Brocken Materie aus so unglaublich vielen Atomen besteht (mit nur 8 kg Plutonium [kleiner als eine Schokolade!] kann man eine Atombombe bauen), dauert es ungeheuer lange, bis ich das letzte Atom erreiche.

Exponentielle *Zerfalls*prozesse funktionieren nach der Funktion

f: $y = a^x$, wobei $0 < a < 1$ (z.B. $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{2}{3}$)

Alle Exponentialfunktionen der Form f: $y = a^x$ (also ohne Koeffizient *vor* dem a) haben einen markanten Punkt, nämlich P(0|1) gemeinsam, weil sich für x = 0 immer $y = a^0 = 1$ ergibt, egal wie a aussieht.
Jede Exponentialfunktion der Form $y = a^x$ (also wieder ohne Koeffizient vor dem a) hat noch einen anderen markanten Punkt, nämlich Q (1|a), da sich für x = 1 immer $y = a^1 = a$ ergibt (je nach a verschieden!).
Bei *Wachstums*funktionen f gilt:

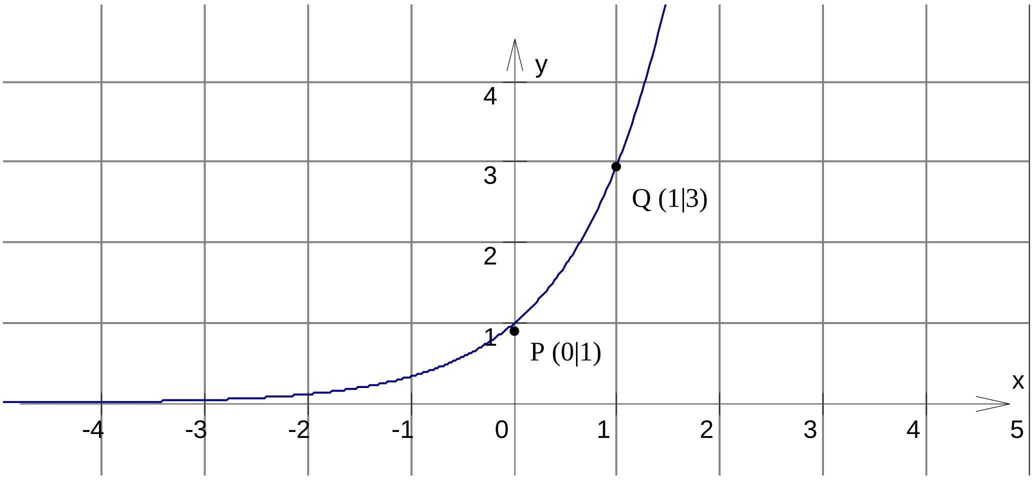
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

d.h. die Funktionsgraphen konvergieren gegen die *negative* x-Achse als Asymptote.
Bei *Zerfalls*funktionen f gilt:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

d.h. die Funktionen konvergieren gegen die *positive* x-Achse als Asymptote.
Jede Exponentialfunktion der Form $y = a^x$ hat den *vollen* Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, aber den *eingeschränkten* Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
Daraus folgt insbesondere: Exponentialfunktionen der Form $y = a^x$ haben *keine* Nullstellen.

Weiß man also ungefähr, wie Exponentialfunktionen *aussehen*, so lassen sich mit den zwei Punkten P und Q gute Planskizzen zeichnen. Z.B. sieht der Graph von f: $y = 3^x$ folgendermaßen aus:



Wie kompliziertere Funktionen wie z.B.

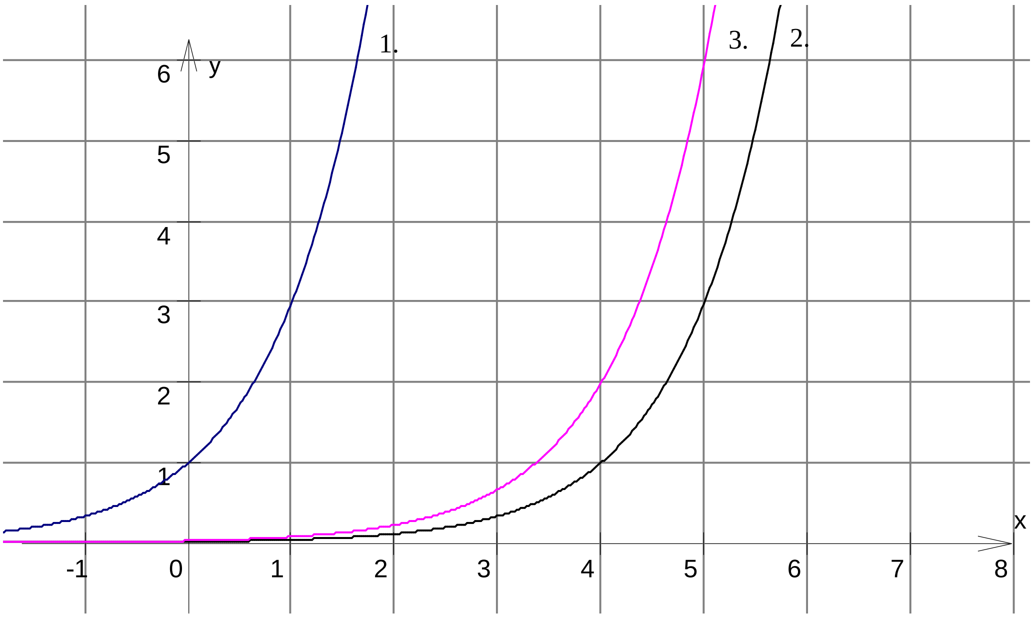
f: $y = 2 \cdot 3^{(x - 4)}$

aussehen, kann man sich wieder klarmachen, indem man sie nacheinander *zusammensetzt*:

1: $y = 3^x$

2. $y = 3^{(x-4)}$: durch (x - 4) wird der Graph um 4 nach *rechts* verschoben
(da z.B. x - 4 = 0 erst für x = 4)

3. $y = 2 \cdot 3^{(x-4)}$: die Multiplikation mit 2 *erhöht* jeden y-Wert auf das 2fache



Der dritte Fall ist nun besonders wichtig: üblicherweise haben Wachstumsprozesse ja zum Zeitpunkt 0 nicht den Anfangswert 1, sondern c (z.B. c = 2, c = 17 ...).

Die übliche Exponentialfunktion hat also die Form $y = c \bullet a^x$. Ihre Graphen sehen wie bereits bekannt aus, nur daß sie durch den Standardpunkt P(0|c) gehen.

Rechnen mit Exponentialgleichungen

Wie üblich, will man natürlich auch mit Exponentialfunktionen *rechnen*, und zwar in ähnlichen Fällen wie bei allen anderen Funktionen:

– der (einzige) Schnittpunkt mit der y-Achse ist wie immer sehr einfach zu berechnen: ich brauche nur x = 0 *einzusetzen* und erhalte daraus die y-Koordinate
– wie man schon aus obigen Graphen ersieht, gilt:

Exponentialfunktionen der Form $y = a^x$ haben (anders als viele Potenzfunktionen) grundsätzlich *keine* Nullstelle/-punkte: $0 = a^x$ ist für kein möglich. (außer wenn a = 0, was wir oben ausgeschlossen hatten)

– allerdings kann man sich wie bei anderen Funktionen auch fragen, wann eine Exponentialfunktion einen *anderen* Wert als Null, z.B. y = 1024 erreicht.
An unserem Kettenreaktionsbeispiel: zu welchem Zeitpunkt x werden y = 1024 Atome gespalten? Für welchen Zeitpunkt x gilt also: $f(x) = 2^x = 1024$?
Um das x für $2^x = 1024$ zu finden, also x = ... zu erhalten, muß das x aus dem Exponenten in die Basis "heruntergeholt" werden. Nun könnte man auf die Idee kommen, dies dadurch zu erreichen, daß man auf beiden Seiten die x-te Wurzel zieht.
Dann erhalten wir $\sqrt[x]{1024} = 2$, was uns offensichtlich überhaupt nicht hilft, denn $\sqrt[x]{1024} = 1024^{1/x}$, womit x *keineswegs* aus dem Exponenten verschwunden ist (sondern dort sogar noch als *Bruch* auftaucht).
Wir müssen uns also einen *anderen* Weg suchen.

Fortsetzung s. „Logarithmusfunktionen“

Logarithmusfunktionen

Schon im Abschnitt „Exponentialfunktionen“ hatten wir uns gefragt, wann die Exponentialfunktion $y = 2^x$ z.B. $y = 1024$ erreicht.
Am Kettenreaktionsbeispiel: zu welchem Zeitpunkt x werden y = 1024 Atome gespalten?
Für welchen Zeitpunkt x gilt also: $f(x) = 2^x = 1024$?
Um das x für $2^x = 1024$ zu finden, also x = ... zu erhalten, muß das x aus dem Exponenten in die Basis "heruntergeholt" werden. Nun könnte man auf die Idee kommen, dies dadurch zu erreichen, daß man auf beiden Seiten die x-te Wurzel zieht.
Dann erhalten wir $\sqrt[x]{1024} = 2$, was uns offensichtlich überhaupt nicht hilft, denn $\sqrt[x]{1024} = 1024^{\frac{1}{x}}$, womit x *keineswegs* aus dem Exponenten verschwunden ist (sondern dort sogar noch als *Bruch* auftaucht).
Wir müssen uns also einen *anderen* Weg suchen.
Dazu überlegen wir erstmal, was x in $1024 = 2^x$ denn eigentlich *ist*:

in $1024 = 2^x$ ist x *diejenige* Zahl, mit der ich 2 potenzieren muß, um 1024 zu erhalten.

Oder allgemeiner:

in $b = a^x$ ist x *diejenige* Zahl, mit der ich a potenzieren muß, um b zu erhalten.

Damit sind wir beim Logarithmus:

Logarithmusdefinition und Rechenregeln

Für unser neues Problem definieren wir uns den neuen Begriff des "Logarithmus":

$x = \log_b a$ ist *diejenige* Zahl, mit der ich b potenzieren muß, um a zu erhalten. Wir sagen dann auch: x ist der Logarithmus von a zur Basis b. Wichtig: $\log_b a$ ist also nur eine erstmal kompliziertere Schreibweise für eine *Zahl* (so wie $\sqrt{x}$ eine *Zahl* ist), wenn wir diese Zahl auch noch nicht *kennen*.

Z.B. ist $\log_2 1024 = 10$, denn $2^{10} = 1024$ (wobei wir die 10 bisher allerdings nur durch *Probieren* herausfinden können)

Nach Logarithmendefinition gilt: $x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$, was man sich durch einen kleinen Trick besonders gut merken kann: $x = \log_{b(x\nearrow)} a$

Mit $x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$ haben wir endlich unser Ziel erreicht, nämlich die Exponentialgleichung in die Form x = ... gebracht.
Die Frage, wie man denn nun $\log_b a$ *berechnen* kann, lassen wir hier vorerst unbeantwortet (wir werden ganz am Ende noch sehen, wie wir unser Beispiel $2^x = 1024$ noch einfacher lösen kann).

Vorerst einige Regeln, die sich aus der Logarithmusdefinition ergeben:

1. Logarithmenregel:
Logarithmus und Exponentialfunktion heben sich gegenseitig auf, sind also *Umkehrfunktionen* zueinander.
Also: wenn ich a *erst* zur Basis b logarithmiere und *dann* b mit dem Ergebnis potenziere, erhalte ich das Ausgangs-a.

$$b^{\log_b a} = a$$

Beweis: in $b^{\log_b a}$ ist $x = \log_b a$ nach Logarithmendefinition diejenige Zahl x, mit der ich b potenzieren muß, um a zu erhalten. *Wenn* ich nun b mit x potenziere, *muß* also a herauskommen. Also ist

$$b^{\log_b a} = a$$

Umgekehrt:

2. Logarithmenregel:
Wenn ich *erst* b mit a potenziere und *dann* zur Basis b logarithmiere, also $\log_b (b^a)$ rechne, so erhalte ich auch wieder das Ausgangs-a:

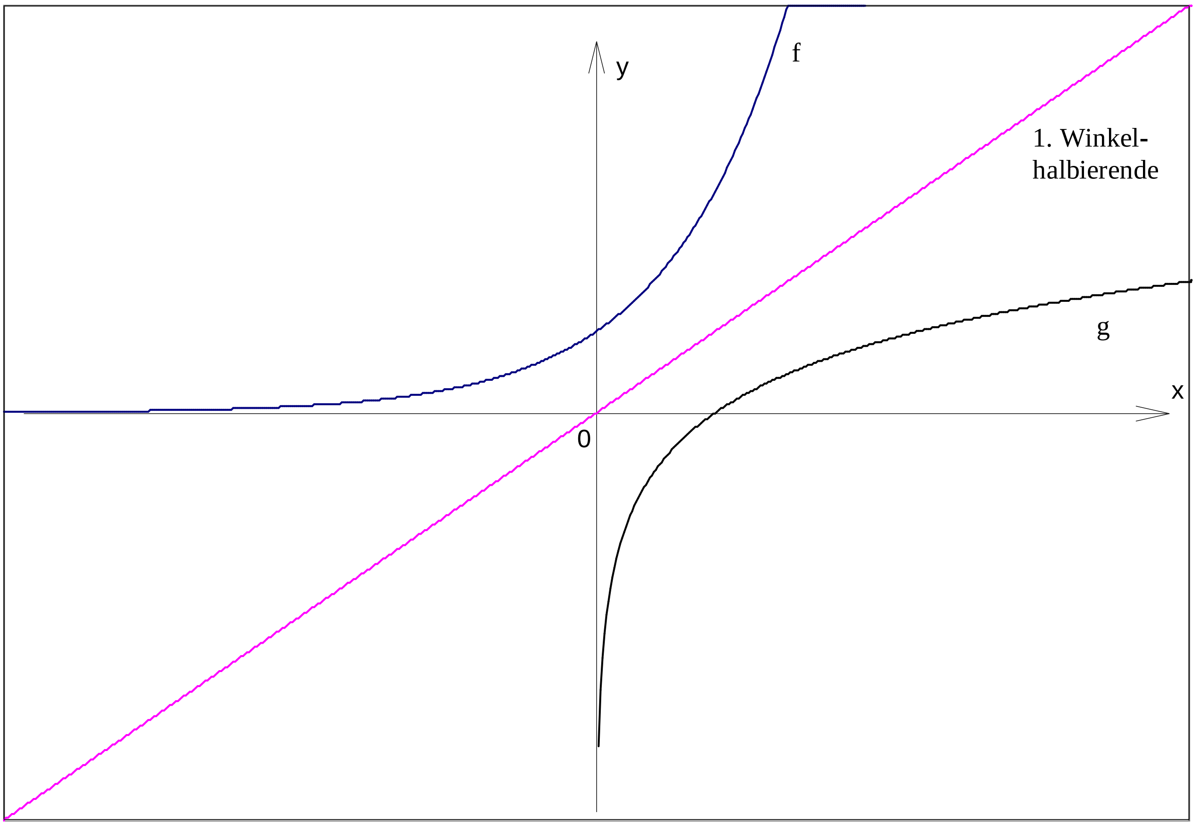
$$\log_b (b^a) = a$$

Beweis: $x = \log_b (b^a)$ ist nach Logarithmendefinition diejenge Zahl x, mit der ich b potenzieren muß, um b^a zu erhalten. Gesucht ist also die Zahl x, für die gilt: $b^x = b^a$.
Da zwei Potenzen mit *gleicher Basis* nur dann gleich sein können, wenn auch die *Exponenten gleich* sind (Exponentenvergleich), folgt: x = a und damit

$$\underbrace{\log_b (b^a)}_{x} = a$$

Logarithmus*funktion*

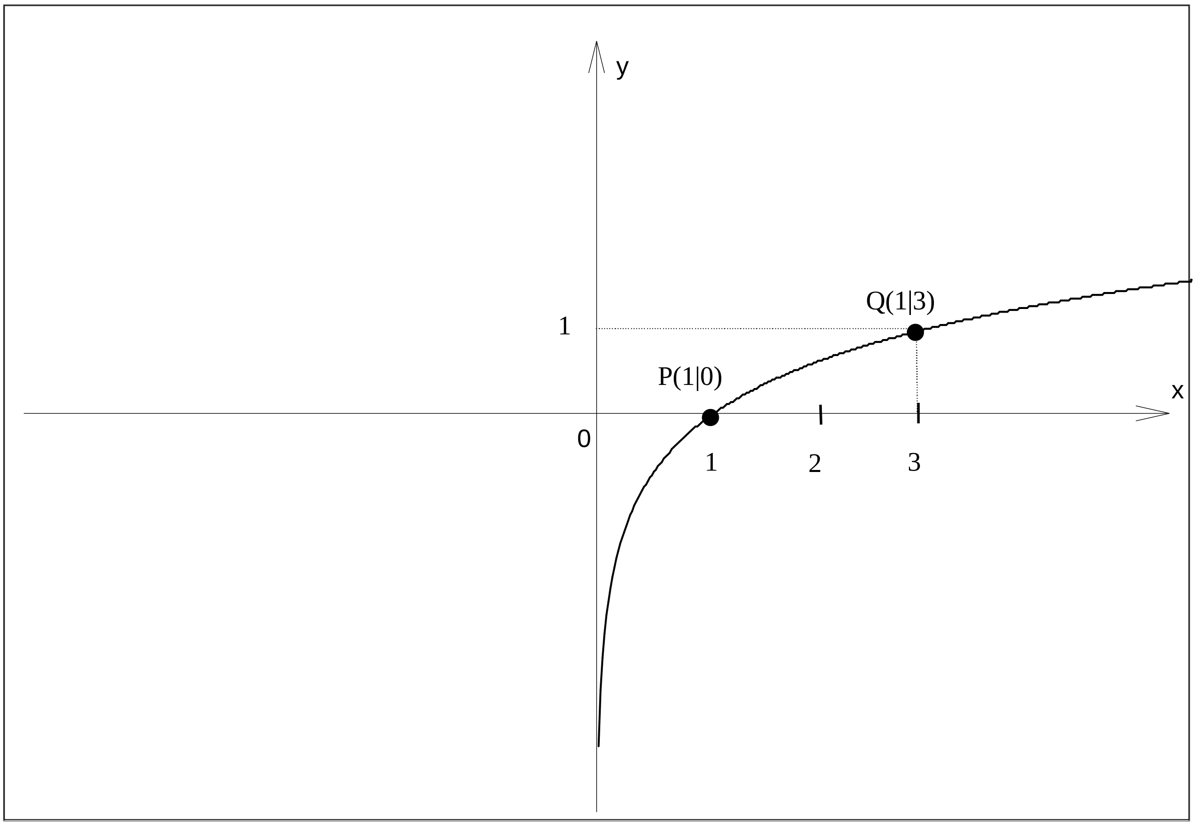
Die Exponentialfunktion f: $y = b^x$ und die Logarithmusfunktion g: $y = \log_b x$ sind also *Umkehrfunktionen* zueinander. Damit können wir den Graph von $y = \log_b x$ durch *Spiegelung* des Graphen von $y = b^x$ an der 1. Winkelhalbierenden erhalten (vgl. Umkehrfunktionskapitel):



Aus dem Graphen von $y = \log_b x$ können wir schon einige Eigenschaften der Logarithmen ablesen:

1. $y = \log_b x$ ist nur auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ definiert (also *keine* Logarithmen aus *negativen Zahlen und Null* möglich!!!)
2. Der *Werte*bereich ist hingegen $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.
3. Die *Basis* eines Logarithmus darf nur aus $\mathbb{R}^+$ sein (vgl. Exponentialfunktion)
4. der Graph von f: $y = \log_b x$ geht für $x \searrow 0$ asymptotisch gegen die y-Achse
5. da der Graph einer *Exponential*fuktion für große x unendlich *steil* wird, wird der Graph der *Logarithmus*funktion für große x unendlich *flach* (ohne jedoch gegen eine Grenze zu konvergieren)
6. Der Graph von g: $y = \log_b x$ geht *un*abhängig von der Wahl des b durch den Punkt P(1;0), denn für x = 1 ergibt sich immer $y = \log_b 1 \Leftrightarrow b^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$
7. Der Graph von g: $y = \log_b x$ geht *abhängig* von der Wahl des b durch den Punkt Q(b;1), denn für x = b ergibt sich $y = \log_b b \Leftrightarrow b^y = b \Leftrightarrow b^y = b^1 \Leftrightarrow y = 1$

Mit diesen Eigenschaften können wir z.B. die Logarithmenfunktion g: $y = \log_3 x$ problemlos zeichnen:



Logarithmengesetze:

1. Logarithmengesetz
$\log_b(a \bullet c) = \log_b a + \log_b c$

2. Logarithmengesetz
$\log_b(a:c) = \log_b a \;\; \log_b c$

3. Logarithmengesetz
$\log_b(\frac{1}{c}) = \;\; \log_b c$

4. Logarithmengesetz
$\log_b(a^c) = c \bullet \log_b a$

besonders wichtig!

Die Gesetze werden bewiesen, indem man jeweils b mit *beiden* Seiten potenziert und dann *Potenz*gesetze anwendet. Die *Logarith*mengesetze ergeben sich also aus den *Potenz*gesetzen.

Vorsicht: allzu leicht verwechselt man die Rechenzeichen im 1. bzw. 2. Logarithmengesetz. Grandios *falsch* sind also:

$\log_b(a + c) = \log_b a \bullet \log_b c$

$\log_b(a : c) = \log_b a : \log_b c$

Daß aber • und + bzw. : und • etwas miteinander zu tun haben, kann man sich anhand der Potenzgesetze merken (woher die Logarithmengesetze ja stammen): $a^n \bullet a^m = a^{n+m}$

$a^n : a^m = a^{n \bullet m}$

Solange es noch keine Rechner gab, halfen alle vier Logarithmengesetze ungeheuer bei komplizierteren Rechnungen (und nebenbei: *alle* Rechner arbeiten logarithmisch).
Heutzutage brauchen wir hingegen fast nur noch das *erste* und *vierte* Logarithmengesetz:

Endlich!!!: Lösung von Exponentialgleichungen mittels Log.

Mit dem 4. Logarithmengesetz können wir endlich z.B. unser Anfangsproblem lösen, nämlich die Frage, für welches x gilt: $1024 = 2^x$?

$$1024 = 2^x \qquad |\log_b \text{ (wobei b beliebig ist)}$$

$$\Leftrightarrow \log_b 1024 = \log_b(2^x) \underset{\text{4. Log.Gesetz}}{=} x \cdot \log_b 2 \quad |:\log_b 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_b 1024}{\log_b 2} = x \text{ ist also das gesucht x.}$$

Oder allgemein:

$$\boxed{y = a^x \Leftrightarrow x = \frac{\log_b y}{\log_b a} \text{ (egal, wie b aussieht)}}$$

Wenn - wie oben gesagt - die übliche Exponentialfunktion nun die Form f: $y = c \bullet a^x$ hat, so können wir zu einem vorgegebenen y (z.B. y = 3) das zugehörige x mittels des 1. und 4. Logarithmengesetzes finden:

$$y = c \bullet a^x$$

$$\Leftrightarrow \log_b y = \log_b(c \bullet a^x)$$

$$\Leftrightarrow \log_b y = \log_b c + \log_b a^x$$

1. Log.-Gesetz

$$\Leftrightarrow \log_b y = \log_b c + x \bullet \log_b a \quad | - \log_b c$$

4. Log.-Gesetz

$$\Leftrightarrow \log_b y - \log_b c = x \bullet \log_b a \quad | : \log_b a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_b y - \log_b c}{\log_b a} = x$$

Also:

$$\boxed{y = c \bullet a^x \Leftrightarrow x = \frac{\log_b y - \log_b c}{\log_b a} \quad \text{(egal, wie b aussieht)}}$$

Logarithmen zu zwei speziellen Basen

An den letzten Sätzen ist nun besonders bemerkenswert, daß wir die Gleichung $y = a^x$ bzw. $y = c \bullet a^x$ mittels des Logarithmus zu *beliebiger* Basis b nach x auflösen können. Folge ist: die Mathematiker betrachten nur noch die

Logarithmen
– zur Basis b = 10 (Zehnerlogarithmus), also $\log_{10}$.

Statt $\log_{10}$ schreibt man oft auch einfach lg (läßt also die Basis 10 weg), und auf dem Rechner findet man ihn als log oder lg.

– oder zur Basis b = e ("natürlicher Logarithmus"), also $\log_e$, wobei $e \approx 2{,}7182$ (eine irrationale Zahl, die merkwürdigerweise bei vielen natürlichen Wachstumsprozessen vorkommt).

Statt $\log_e$ schreibt man auch einfach ln ("n" wie natürlich; die Basis e läßt man wieder weg), worunter man ihn auch auf dem Rechner findet.

Logarithmen sind häufig *irrational* (der Rechner zeigt auch nur ungenau die ersten 10 Stellen an). Man hat sich deshalb geeinigt:

Bei Logarithmen werden in der Regel nur die ersten *vier* Stellen hinter dem Komma angegeben. Folge ist dann natürlich: weil die Zahlen *gerundet* bzw. *abgebrochen* sind, müssen sie mit einem *Ungefähr*-Zeichen (≈) angeschlossen werden (es sei denn, man weiß ganz genau, daß es ausnahmsweise *rationale* oder gar *ganze* Zahlen sind).

Überlassen wir nun das *Berechnen* von Logarithmen grundsätzlich dem Rechner, so erhalten wir in unserem Beispiel $1024 = 2^x$ mit dem Zehnerlogarithmus

$$x = \frac{\lg 1024}{\lg 2} \approx \frac{3{,}0103}{0{,}30103} = 10$$

Endlich haben wir x *berechnet*!: Nach 10 Zeiteinheiten hat die Wachstumsfunktion $y = 2^x$ (atomare Kettenreaktion) den Wert 1024 erreicht!

Der Limesbegriff

Der Begriff des Limes (lat. Grenze) ist die grundlegende Entdeckung der ganzen neuzeitlichen Mathematik. Er macht es möglich, Überblick über das Unendliche zu bekommen. Schauen wir uns dazu mal die folgende Folge von Zahlen an:

$a_1 = 0{,}9 \qquad a_2 = 0{,}99 \qquad a_3 = 0.999 \ \ldots \qquad a_n = \underbrace{0{,}9........9}_{\text{n Neunen}}$

Offensichtlich läßt sich das beliebig fortsetzen (man hängt immer mehr Neunen an: tausend Neunen, millionen Neunen, milliarden Neunen ...).
Das Bezeichnende für die ganze moderne Mathematik seit 1500 nach Christus ist nun: *ohne* alles *durchrechnen* zu müssen (das ist bei unendlich vielen Fällen prinzipiell *unmöglich*), bemerkt man doch schnell eine Merkwürdigkeit: die Zahlen kommen immer näher, ja sogar *unendlich nahe* an 1 heran (der Abstand zu 1 ist 1/10, 1/100, 1/1000 ...), obwohl die 1 *niemals erreicht* wird. Also nochmals: obwohl ich grundsätzlich nicht die unendlich vielen Folgenelemente durchrechnen kann, kann ich doch eine sehr genaue Aussage über das Verhalten aller Folgenglieder machen.

Der "Limes" zeigt, an welche Zahl eine Zahlenfolge immer näher/unendlich nahe herangeht (Fachausdruck: gegen welche Zahl die Folge "konvergiert"), ohne diese Zahl dabei notwendig zu erreichen (kommt man zwar beliebig nahe an die Zahl dran, erreicht sie aber nicht, so spricht man von "asymptotischer" Konvergenz).

In unserem Fall gilt: für n gegen unendlich geht die Zahlenfolge a_n gegen 1, bzw. der Limes (für n gegen unendlich) der Zahlenfolge a_n <u>ist</u> 1 bzw. in Kurzschreibweise

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

Eine weitere Folge ist

$b_1 = \frac{1}{1} \qquad b_2 = \frac{1}{2} \qquad b_3 = \frac{1}{3} \ \ldots \qquad b_n = \frac{1}{n}.$

Auch sie läßt sich beliebig fortsetzen (ein Tausendstel, ein Milliardenstel ...). Sie wird offensichtlich (im Positiven) immer *kleiner*, ja, kommt unendlich nahe an Null heran (Abweichung ein Tausendstel, ein Milliardenstel...), ohne die Null jedoch jemals zu erreichen:

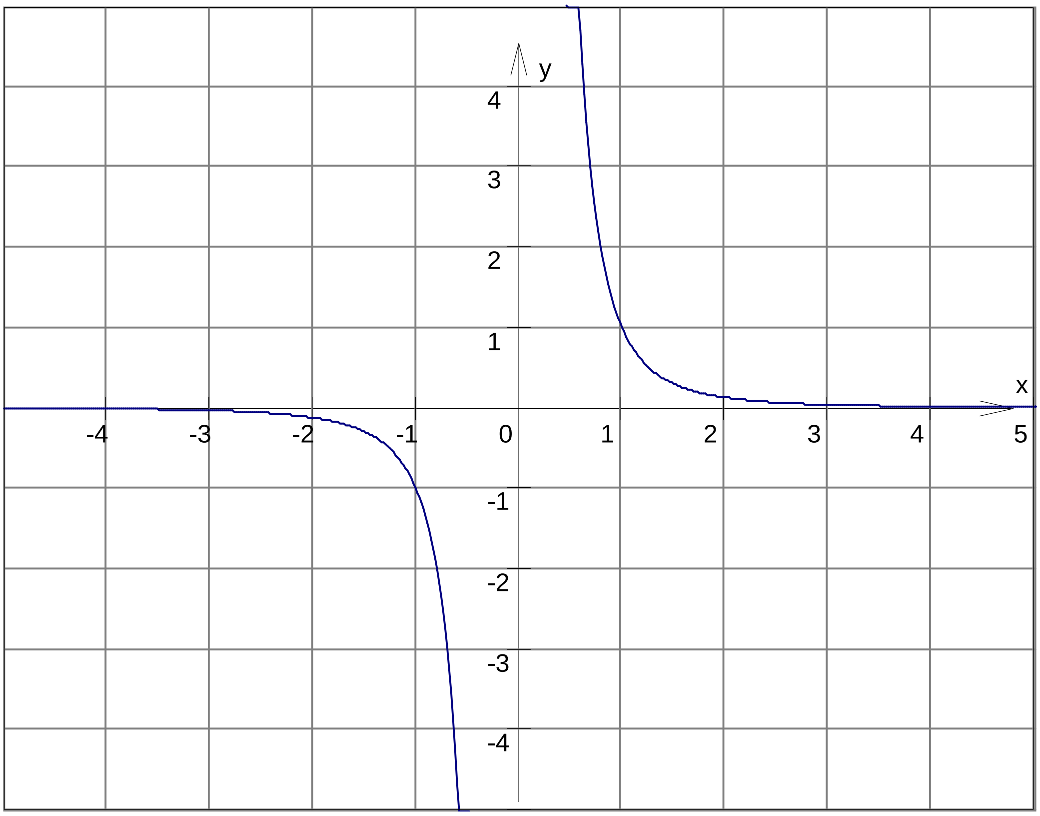
$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Also: eine Folge kann gegen einen Limes gehen, ohne daß auch nur ein *einziges* Folgenelement dieser Limes *ist*.

Folgen sind immer nur *punktuell* definiert. Z.B. liegen bei der Folge $b_n = \frac{1}{n}$ zwischen $b_2 = \frac{1}{2}$ und $b_3 = \frac{1}{3}$ keine weiteren Folgenelemente. Wir können den Limesbegriff aber problemlos auch auf *Funktionen* übertragen, die auf einem Intervall, also *kontinuierlich* definiert sind:

Beispiel sei die Funktion f: $y = \frac{1}{x^3}$.

Der wichtigste Schritt ist natürlich wieder mal, die 0 aus dem Definitionsbereich auszunehmen (denn durch 0 und also auch 0^3 darf man nicht teilen). Für x = 0 ist also kein y definiert, über/unter x = 0 darf also kein Punkt des Graphen auftauchen.
Der Graph der Funktion sieht folgendermaßen aus:



In der Tat liegt über/unter x = 0 kein Punkt. Um so erstaunlicher ist das Verhalten der Funktion in der *Nähe* von x = 0:

a) für sehr nahe an Null liegende, aber *positive* x (z.B. $x = \frac{1}{3}$) ist y sehr groß

$(y = 1:(\frac{1}{3})^3 = 1:(\frac{1}{27}) = 27)$. Man sagt auch: f: $y = \frac{1}{x^3}$ geht für *nahe an Null liegende, positive* x "asymptotisch" (also unendlich nahe) an die *positive* y-Achse, und zwar von *rechts*:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^3} = +\infty$$ (∞ bedeutet Unendlich, ↘ bedeutet Annäherung von rechts/größeren Zahlen)

b) für sehr nahe an Null liegende, aber *negative* x (z.B. $x = -\frac{1}{4}$) ist y sehr klein

$(y = 1:(-\frac{1}{4})^3 = 1:(-\frac{1}{64}) = -64)$. Man sagt auch: f: $y = \frac{1}{x^3}$ geht für *nahe an Null liegende, negative* x "asymptotisch" (also unendlich nahe) an die *negative* y-Achse, und zwar von *links*:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$$ (↗ bedeutet Annäherung von links/kleineren Zahlen)

Weiterhin fällt asymptotisches Verhalten gegen die x-Achse auf:

c) für sehr große x (z.B. x = 7) liegt y sehr nahe bei 0 (y = $1:7^3 = 1:343 \approx 0{,}0029$). Man sagt auch: f: y = $\frac{1}{x^3}$ geht für *sehr große* x "asymptotisch" (also unendlich nahe) an die *positive* x-Achse, und zwar von *oben*:

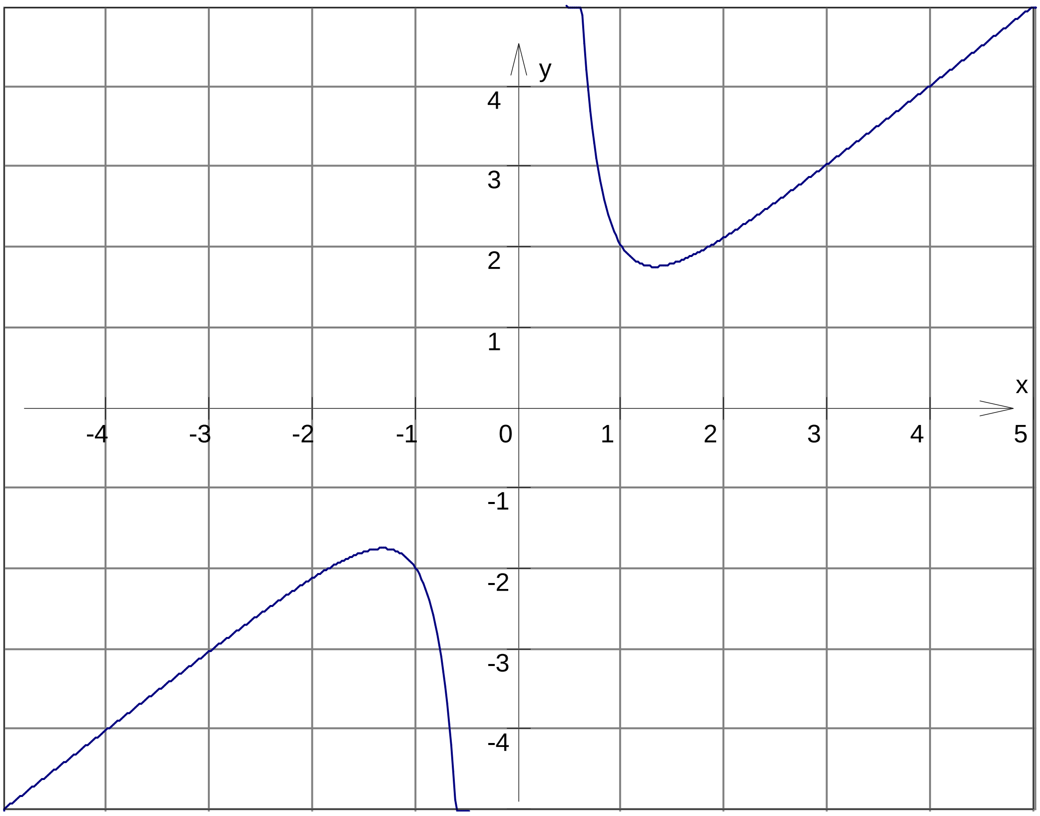
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

d) für sehr kleine x (z.B. x = -8) liegt y sehr nahe bei 0 (y = $1:(-8)^3 = 1:(-512) \approx -0{,}0019$). Man sagt auch: f: y = $\frac{1}{x^3}$ geht für *sehr kleine* x "asymptotisch" (also unendlich nahe) an die *negative* x-Achse, und zwar von *unten*:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

a) - d): die Linien, gegen die der Graph der Funktion konvergiert, *ohne* sie jedoch zu erreichen, nennt man auch "Asymptoten". Hier sind die Asymptoten die Koordinatenkreuz-Achsen, also Geraden.

Daß Asymptoten aber auch "krumm" sein können, zeigt das Beispiel der Funktion g: $x + \frac{1}{x^3}$, deren Graph folgendermaßen aussieht:



Hier zeigt sich:

a)

$$\lim_{x \searrow 0} \left(x + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \searrow 0} x + \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^3} = 0 + \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^3}.$$

Für $x \searrow 0$ nähert sich g also asymptotisch f: $y = \frac{1}{x^3}$ an.

b)

$$\lim_{x \nearrow 0} \left(x + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \nearrow 0} x + \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^3} = 0 + \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^3}.$$

Für $x \nearrow 0$ nähert sich g also asymptotisch f: $y = \frac{1}{x^3}$ an.

a), b) $\Rightarrow$ für $x \nearrow 0$ und $x \searrow 0$ verhält sich g fast wie f.

$\Rightarrow$ für $x \nearrow 0$ und $x \searrow 0$ hat der Graph von g als Asymptote den Graphen von f, also eine "krumme" Asymptote

c)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} x + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} x + 0 = \lim_{x \to +\infty} x.$$

Für $x \to +\infty$ nähert sich g also asymptotisch an h: $y = x$ an.

d)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \to -\infty} x + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} x + 0 = \lim_{x \to -\infty} x.$$

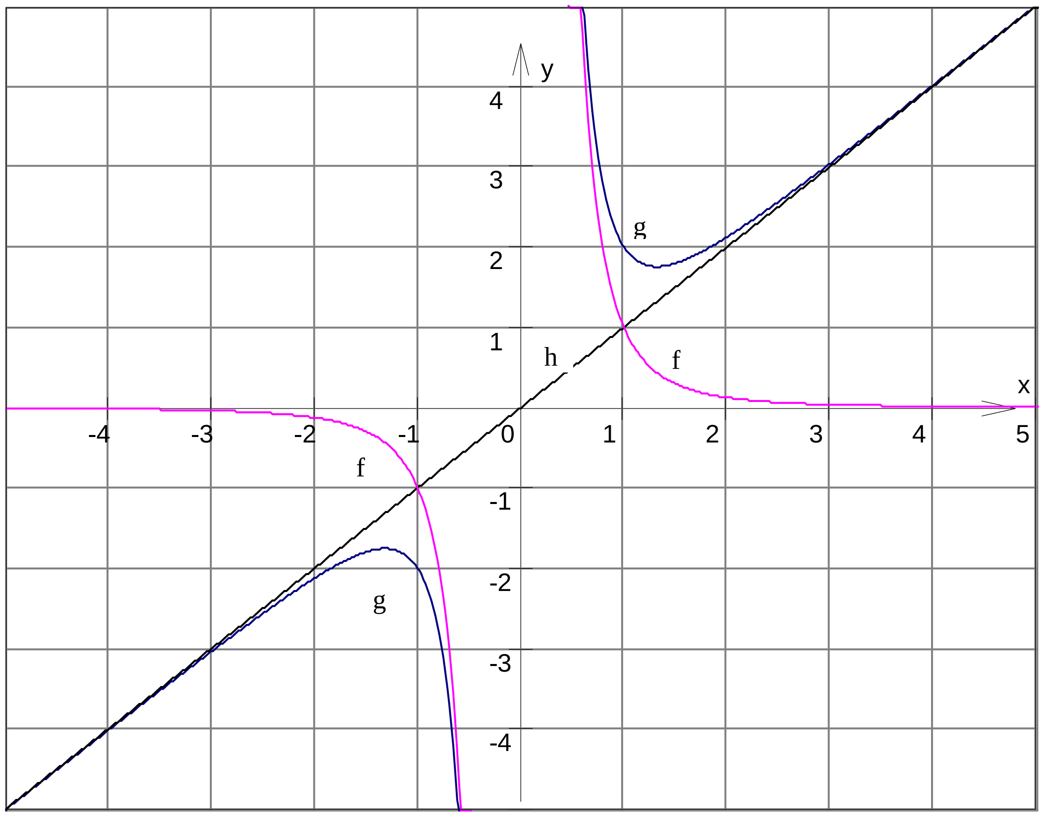
Für $x \to -\infty$ nähert sich g also asymptotisch an h: $y = x$ an.

c), d) $\Rightarrow$ für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ verhält sich g fast wie h.

$\Rightarrow$ für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ hat der Graph von g als Asymptote den Graphen von h.

a)- d): für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ setzt sich h durch,
für $x \nearrow 0$ und $x \searrow 0$ setzt sich f durch.

Sehr deutlich wird das, wenn man f, g und h in ein Koordinatensystem zeichnet:



Zuguterletzt: der Limes ist und bleibt eine kleine Hinterhältigkeit (wie etwa indirekte Beweise): da wachsen Zahlen immer weiter - und sollen dennoch nicht über eine Grenze gehen? Wie soll das funktionieren?: ich gehe immer weiter und komme doch nie an?

Noch hinterhältiger: 0,9/0,99/0,999/0,999 ... mag ja tatsächlich limitisches Verhalten klarmachen: da wachsen die Zahlen immer mehr, kommen aber nie *über* 1, dafür aber beliebig nahe an 1 *dran*. Und obwohl noch unendlich viele Zahlen folgen, definieren wir den Limes (1) dennoch als "Ende" dieser Reihe.

Es kann noch problematischer werden: im Beispiel eben bleibt klar: es *gibt* einerseits die Folge 0,9/0,99/0,999/0,999 ... (jedes einzelne, endliche Element), und andererseits *gibt* es auch den Grenzwert 1, gegen den - unendlich weitergedacht konvergiert. Man erinnere sich: in der Unterstufe kennt man die Zahl 1 sogar, *bevor* man überhaupt die rationalen Zahlen 0,9/0,99/0,999/0,999 ... kennenlernt.

Es gibt aber auch mathematische Gegenstände, die überhaupt erst durch einen Grenzwertprozeß *zustandekommen*. Das wäre so, als gäbe es die 1 noch gar nicht als Zahl, sondern als *entstehe* sie erst als Limes der Folge.

Ein anschauliches Beispiel: da geht jemand gedankenlos vor sich hin, und erst langsam, aber sicher entsteht für ihn das Ziel: „ach, eigentlich könnte ich, wo ich schon da bin, in das Café da vorne gehen“ Genau genommen: das Café *gab*´s natürlich schon vorher, es entsteht nicht erst durch´s Gehen. Aber es wird dem Spaziergänger erst beim Spazieren zum *Ziel*.

Ein geometrisches Beispiel ist das Problem der Tangente an einen *krummen* Graphen (vgl. Ableitung in der Oberstufe). Weil man sie nicht direkt (absolut genau) zeichnen und auch nicht direkt ihre exakte Geradengleichung angeben kann (es fehlt zu beidem ein zweiter Punkt), stellt sich der Mathematiker erstmal gänzlich ungläubig: was er nicht eindeutig erfassen kann, *gibt* es auch gar nicht. Über das Sekantenverfahren kann er nun aber die Tangente immer genauer *annähern*. Bzw. ebenso unmathematisch gesprochen: die Sekanten gehen immer näher gegen die Tangente. Mathematisch macht das aber keinen Sinn: die Sekanten gehen gegen etwas, was es *noch gar nicht gibt*. Also argumentiert der Mathematiker *andersrum*: er *definiert* die

Tangente überhaupt erst als Grenzwert der Sekanten, sie *entsteht* überhaupt erst durch den unendlich gedachten Grenzwertprozeß der Sekanten.
Einfacher und doch kaum anschaulicher gesagt: es gibt kein Verfahren, die Kreisfläche *direkt* aus dem Kreisradius zu berechnen oder sie gar direkt vom Kreis abzulesen. Also sagt der Mathematiker ganz einfach: es *gibt* gar keine Kreisfläche. Und dann nähert er sie (wohlgemerkt: die es noch gar nicht gibt) mit immer feineren Dreiecksauslegungen des Kreises an (hat also wohl vom *Kreis*, aber noch nicht von der Kreis*fläche* eine Vorstellung): er sieht also: die Dreiecksauslegung kommt der Kreis*linie* immer näher. Und die Kreisfläche *definiert* er sich erst *nachher* als eben den *Grenzwert* der Dreiecksauslegung.
Keine Frage: an den Limes kann man sich gewöhnen - und doch versteht ihn *keiner* richtig, weil er immer so *in*direkt definiert ist, als unendlich entferntes *Ziel* einer Folge.
Un doch ist der Limes nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Technik ungeheuer hilfreich. Das ist halt typisch für unsere schizophrene Kultur: vieles ist nunmal nur mit mathematischen Krücken erkennbar - stimmt aber. Wir haben nichts anderes als *Modelle* der Welt, die wir notgedrungen für die *Wirklichkeit* halten.

Zins- und Zinseszinsrechnung:

Konkretes Beispiel: G_1 = 100 DM p = 10	**Allgemein** (nur mit Buchstaben)
1. Jahr: Jahresanfang: G_1 = 121 DM Jahresende: $P_1 = G_1 \bullet \frac{p}{100} =$ $= 100\text{ DM} \bullet \frac{10}{100} = 10\text{ DM}$ $E_1 = G_1 + P_1 =$ $= 100\text{ DM} + 10\text{ DM} = 110\text{ DM}$	1. Jahr: Jahresanfang: G_1 Jahresende: $P_1 = G_1 \bullet \frac{p}{100}$ (A) wegen (A) $E_1 = G_1 + P_1 =$ $= G_1 + \overbrace{G_1 \bullet \frac{p}{100}} =$ Ausklammern von G_1 aus beiden Summanden $= G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})$
2. Jahr: Jahresanfang: G_2 = 110 DM Jahresende: $P_2 = G_2 \bullet \frac{p}{100} =$ $= 110\text{ DM} \bullet \frac{10}{100} = 11\text{ DM}$ $E_2 = G_2 + P_2 =$ $= 110\text{ DM} + 11\text{ DM} = 121\text{ DM}$	2. Jahr: Jahresanfang: $G_2 = G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})$ (A) Jahresende: $P_2 = G_2 \bullet \frac{p}{100}$ (B) wegen (B) $E_2 = G_2 + P_2 =$ $= G_2 + \overbrace{G_2 \bullet \frac{p}{100}} =$ Ausklammern von G_2 aus beiden Summanden $= G_2 \bullet (1 + \frac{p}{100}) =$ $= \overbrace{G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})} \bullet (1 + \frac{p}{100}) = G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})^2$

3. Jahr: Jahresanfang: $G_3 = 100$ DM Jahresende: $P_3 = G_3 \bullet \frac{p}{100}$ $= 121 \text{ DM} \bullet \frac{10}{100} = 12{,}1 \text{ DM}$ $E_3 = G_3 + P_3 =$ $= 121 \text{ DM} + 12{,}1 \text{ DM} = 133{,}1 \text{ DM}$	3. Jahr: Jahresanfang: $G_3 = G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})^2$ (A) Jahresende: $P_3 = G_3 \bullet \frac{p}{100}$ (B) $E_3 = G_3 + \overbrace{P_3}^{\text{wegen (B)}} =$ $= G_3 + G_3 \bullet \frac{p}{100} =$ Ausklammern von G_3 aus beiden Summanden $= G_3 \bullet (1 + \frac{p}{100}) =$ $= G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})^2 \bullet (1 + \frac{p}{100}) = G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})^3$
	n-tes Jahr $\boxed{E_n = G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})^n}$
	Beispiel: 10tes Jahr also $n = 10$ $\Rightarrow E_{10} = G_1 \bullet (1 + \frac{p}{100})^{10}$

Dabei gilt:
G_1 = Grundwert/Guthaben zu Beginn des *ersten* Jahres
p = *gleichbleibender* Prozentsatz über die Jahre hinweg
n = Zahl der Jahre
E_n = Guthaben am Ende des n-ten Jahres

Die dick umrandete Formel erlaubt es also, das Guthaben am Ende des n-ten Jahres direkt aus dem Grundwert zu Beginn des *ersten* Jahres zu berechnen.